

УДК 517.97 (575.2) (04)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ФАКТОРИЗАЦИИ

С. Б. Доулбекова

Исследованы вопросы разрешимости задач нелинейной оптимизации, упругих колебаний в случае, когда функция внешнего воздействия нелинейно зависит от функции управления, причем её обратная функция является многозначной.

Ключевые слова: метод факторизации; нелинейное интегральное уравнение; дифференциальное неравенство.

О единственности решения краевой задачи. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый функцией $V(t, x)$, которая удовлетворяет в области $Q_T = Q \times [0, T]$ гиперболическому уравнению [1]

$$V_{tt} - AV = g(x)f[t, u(t)], \quad x \in Q \subset R^n, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

а на границе Q_T начальным

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad x \in Q, \quad (2)$$

и граничному

$$GV(t, x) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)V_{x_j}(t, x)\cos(\xi, x_i) + a(x)V(t, x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

условиям, где функция $f[t, u(t)] \in H(0, T)$ описывает изменения внешнего воздействия и нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0, T)$; $g(x) \in H(Q)$, $\psi_1(x) \in H_1(Q)$, $\psi_2(x) \in H(Q)$ – заданные функции; оператор A действующий по формуле

$$AV(t, x) \equiv \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)V_{x_j}(t, x))_{x_i} - c(x)V(t, x),$$

является эллиптическим в замкнутой области $\bar{Q} = Q \cup \gamma$ с кусочно-гладкой границей γ , т.е. условия

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in H(Q), \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j \geq C_0 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2, \quad C_0 > 0$$

выполняются для любых вещественных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; $a(x), c(x)$ – ограниченные неотрицательные измеримые функции; ξ – внешняя нормаль к γ в точке $x \in \gamma$; H – гильбертово пространство; H_1 – соболево пространство первого порядка; T – фиксировано.

Функция $V(t, x) \in H(Q_T)$, имеющая обобщенные производные $V_{x_i}(t, x), i = 1, \dots, n$, называется обобщенным решением краевой задачи (1)–(3), если она удовлетворяет интегральному тождеству [2]

$$\int_Q (V_t(t, x)\Phi(t, x))_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_Q \left[V_t \Phi_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)V_{x_j} \Phi_{x_i} - c(x)V(t, x)\Phi(t, x) \right] dxdt - \\ - \int_{t_1}^{t_2} \int_\gamma a(x)V(t, x)\Phi(t, x) dxdt + \int_{t_1}^{t_2} \int_Q g(x)f[t, u(t)]\Phi(t, x) dxdt$$

почти для всех t_1 и t_2 ($0 \leq t_1 < t_2 \leq T$) и для любой функции $\Phi(t, x) \in H_1(Q_T)$ и в слабом смысле начальному условию (2), т.е. условия

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_Q [V(t, x) - \psi_1(x)] \Phi_0 dx = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_Q [V_t(t, x) - \psi_2(x)] \Phi_0 dx = 0$$

должны выполняться для любой функции $\Phi_0(x) \in H(Q)$.

Обобщенное решение краевой задачи (1)–(2) при каждом $u(t) \in H(0, T)$ определяется по формуле [2]

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] z_n(x), \quad (4)$$

где $\psi_{1n}, \psi_{2n}, g_n$ – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi_1(x), \psi_2(x), u g(x); \{z_n(x)\}$ – полная ортонормированная система собственных функций краевой задачи

$$Az(x) = -\lambda z(x), \quad x \in Q, \quad \Gamma z(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

а $\{\lambda_n\}$ – соответствующая последовательность собственных значений, причем $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ и $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Поскольку в общем случае для функции $f[t, u(t)]$ её обратная функция $f^{-1}[t, u(t)]$ является многозначной, то между элементами пространства управлений $\{u(t)\}$ и пространства состояний $\{V(t, x)\}$ нет взаимно однозначного соответствия, т.е. согласно (4) одно и то же состояние управляемого процесса $V(t, x)$ может быть определено конечным или счетным числом управлений $u(t)$. Это обстоятельство существенно влияет на применение принципа максимума при построении оптимального управления. В этой связи введем понятие “обобщенное управление”. Это позволяет исследовать вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации на основе принципа максимума.

Определение 1. Обобщенным управлением $U(t)$ назовем класс (конечное или счетное множество) управлений $u(t) \in H(0, T)$ таких, что

$$U(t) = \{u_1(t), \dots, u_m(t) | f[t, u_k(t)] = h(t), \forall u_k(t) \in H(0, T), k = 1, \dots, m \leq \infty\}, \quad (5)$$

где $h(t)$ – некоторая функция, определенная на отрезке $[0, T]$.

Введением “обобщенного управления” вместо пространства управлений $H(0, T)$ можно рассматривать новое пространство $\tilde{H}(0, T)$, элементами которого являются взаимно непересекающиеся классы $U(t)$. Тогда согласно (4), каждое обобщенное управление $U(t)$ определяет единственное обобщенное решение:

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) g_n f[\tau, U(\tau)] d\tau \right] z_n(x). \quad (6)$$

Оптимальное обобщенное управление. Рассмотрим следующую задачу нелинейной оптимизации: Среди управлений $u(t) \in H(0, T)$ найти такое управление $u^0(t) \in H(0, T)$, которое вместе с соответствующим ему решением $V^0(t, x)$ краевой задачи (1)–(3) минимизирует нелинейный интегральный критерий качества

$$I[u(t)] = \int_Q \left\{ [V(T, x) - \xi_1(x)]^2 + [V_t(T, x) - \xi_2(x)]^2 \right\} dx + \beta \int_0^T P[t, u(t)] dt, \quad \beta > 0, \quad (7)$$

где $\xi_1(x), \xi_2(x) \in H(Q)$, $P[t, u(t)]$ – заданные функции.

Пусть $u(t)$ некоторый элемент обобщенного управления $U(t)$, а $V(t, x)$ соответствующее ему решение краевой задачи (1)–(3). Непосредственным вычислением можно показать, что для приращения функционала (7) имеет место равенство

$$\Delta I[u] = I[u + \Delta u] - I[u] = - \int_0^T \Delta \Pi[t, V(t, x), \omega(t, x), u(t)] dt + \int_Q \left\{ \Delta V^2(T, x) + \Delta V_t^2(T, x) \right\} dx,$$

где $\Delta P[u(t)] = P[\cdot, u(t) + \Delta u(t)] - P[\cdot, u(t)]$,

$$P[t, V(t, x), \omega(t, x), u(t)] = \int_Q g(x)\omega(t, x)dx f[t, u(t)] - \beta P[t, u(t)]. \quad (8)$$

Функция $\omega(t, x)$ как решение сопряженной краевой задачи

$$\begin{aligned} \omega_{tt} - A\omega &= 0, \quad x \in Q, \quad 0 \leq t < T, \\ \omega(T, x) + 2[V_1(T, x) - \xi_2(x)] &= 0, \\ \omega_t(T, x) - 2[V(T, x) - \xi_1(x)] &= 0, \quad x \in Q, \\ \Gamma \omega(t, x) &= 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 \leq t < T, \end{aligned} \quad (9)$$

определяется по формуле

$$\omega(t, x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] \frac{z_n(x)}{g_n}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \{G_{1n}(t), G_{2n}(t)\}, \quad h_n = (h_{1n}, h_{2n}) \\ G_{1n}(t) &= g_n \cos \lambda_n(T-t), \quad G_{2n}(t) = \frac{g_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n(T-t) \\ h_{1n} &= \xi_{2n} - \lambda_n \psi_{1n} \sin \lambda_n T - \psi_{2n} \cos \lambda_n T, \\ h_{2n} &= \xi_{1n} - \psi_{1n} \cos \lambda_n T - \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n T, \end{aligned}$$

ξ_{1n}, ξ_{2n} – коэффициенты Фурье соответственно функций $\xi_1(x)$ и $\xi_2(x)$.

Согласно (8) принцип максимума [3] позволяет определить подозрительные на “оптимальность” управлений $\{\tilde{u}(t)\}$ из условий оптимальности

$$\int_Q g(x)\omega(t, x)dx \cdot f_u[t, u(t)] - \beta P_u[t, u(t)] = 0, \quad (11)$$

$$\int_Q g(x)\omega(t, x)dx \cdot f_{uu}[t, u(t)] - \beta P_{uu}[t, u(t)] < 0. \quad (12)$$

Заметим, что в силу произвольности элемента $u(t) \in U(t)$, условия оптимальности (11)–(12) выполняются для каждого элемента обобщенного управления $U(t)$.

Определение 2. Обобщенное управление (класс) $U^0(t)$, элементы которого удовлетворяют условиям оптимальности (11)–(12) называется оптимальным обобщенным управлением.

Построение оптимального обобщенного управления. При определении элементов оптимального обобщенного управления $U^0(t)$ рассмотрим случаи, когда

$$f_u[t, u(t)] = 0 \quad \text{и} \quad f_u[t, u(t)] \neq 0.$$

I. Пусть $\bar{u}_1(t), \dots, \bar{u}_k(t)$ элементы класса $U^0(t)$ удовлетворяющее условию

$$f_u[t, \bar{u}(t)] = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (13)$$

Определение 3. Элементы класса $\bar{U}(t)$, удовлетворяющие условию (13), называются стационарными (особыми) управлениями.

Среди стационарных управлений “оптимальным” может быть лишь, то управление $\bar{u}^-(t)$, которое также должно удовлетворять уравнению

$$P_u[t, u(t)] = 0$$

и удовлетворяет условию оптимальности (12). Проверка условия (12) согласно (10) сводится к проверке выполнения неравенства

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[G_n^*(t) \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] \right] f_{uu}[t, u(t)] + \beta P_{uu}[t, u(t)] > 0$$

и является довольно сложной задачей. Этот случай требует отдельного исследования.

II. В случае, когда

$$f_u[t, u(t)] \neq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (14)$$

существует обратная функция $f^{-1}[t, u(t)]$. Поэтому условие (11) перепишем в виде

$$\beta P_u[t, u(t)] f_u^{-1}[t, u(t)] = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right]. \quad (15)$$

Нетрудно показать, что условие оптимальности (12) эквивалентно условию

$$f_u^{-1}[t, u(t)] \left(f_u^{-1}[t, u(t)] P_u[t, u(t)] \right)_u > 0. \quad (16)$$

Если ввести обозначение

$$\beta P_u[t, u(t)] f_u^{-1}[t, u(t)] = v(t),$$

то, согласно (16), существует взаимно однозначное ($\forall t \in [0, T]$) отображение $\varphi: H(0, T) \rightarrow H(0, T)$

такое, что

$$u(t) = \varphi[t, v(t), \beta]. \quad (17)$$

Поэтому равенство (15) перепишем в операторной форме

$$v(t) = G[v(t)], \quad (18)$$

где

$$G[v(t)] = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, \varphi(\tau, v(\tau), \beta)] d\tau \right]. \quad (19)$$

Лемма 1. Пусть функции $f[t, \varphi]$ и $\varphi[t, v(t), \beta]$ удовлетворяют условию

$$\|f[t, \varphi]\|_H \leq C_0 \|\varphi\|_H, \quad \|\varphi(t, v(t), \beta)\|_H \leq C_1 \|v(t)\|_H, \quad C_0, C_1 > 0, \quad (20)$$

где $\|\cdot\|_H$ – норма в пространстве H .

Тогда оператор $G[\cdot]$ отображает пространство $H(0, T)$ в себя.

Доказательство. Используя оценки

$$\|G_n(t)\|^2 = g_n^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \leq g_n^2 \lambda_0, \quad \forall t \in [0, T], \quad 1 + \frac{1}{\lambda_n} \leq \lambda_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора, и соотношение (20) непосредственным вычислением имеем неравенство:

$$\begin{aligned} \int_0^T G^2[v(t)] &\leq \int_0^T \left(2 \sum_{i=1}^{\infty} G_i^*(t) \left[h_i - \int_0^T G_i(\tau) f[\tau, \varphi(\tau, v(\tau), \beta)] d\tau \right] \right)^2 dt \leq \\ &\leq 4 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|G_n(t)\|^2 dt \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\| h_n - \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, \varphi(\tau, v(\tau), \beta)] d\tau \right\|^2 \leq 8\lambda_0 T \|g(x)\|_H^2 \cdot \\ &\cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \lambda_n^2 \right) \psi_{1n}^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \psi_{2n}^2 + \xi_{1n}^2 + \xi_{2n}^2 \right\} + \lambda_0 T \|g(x)\|_H^2 \|f[t, \varphi]\|_H^2 \right\} = \\ &= 8\lambda_0 T \|g(x)\|_H^2 \left\{ \|\psi_1(x)\|_H^2 + \lambda_0 \|\psi_2(x)\|_H^2 + \|\xi_1(x)\|_H^2 + \|\xi_2(x)\|_H^2 \right\} < \infty \end{aligned}$$

из которого, в силу свойств заданных функций, следует утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть, каждая из функций $f[t, \varphi]$ и $\varphi[t, v(t), \beta]$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\begin{aligned} \|f[t, \varphi] - f[t, \bar{\varphi}]\|_H &\leq f_0 \|\varphi - \bar{\varphi}\|_H, \\ \|\varphi[t, v, \beta] - \varphi[t, \bar{v}, \beta]\|_H &\leq \varphi_0 \|v - \bar{v}\|_H, \quad f_0, \varphi_0 > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда оператор $G[\cdot]$ при выполнении условия

$$2\lambda_0 T \|g(x)\|_H^2 f_0 \varphi_0 < 1 \quad (22)$$

является сжимающим оператором в пространстве $H(0, T)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства

$$\begin{aligned} \|G[v] - G[\bar{v}]\|_H^2 &\leq \left(2\lambda_0 T \|g(x)\|_H^2\right)^2 \|f[t, \varphi(t, v(t), \beta)] - f[t, \varphi(t, \bar{v}(t), \beta)]\|_H^2 \leq \\ &\leq \left(2\lambda_0 T \|g(x)\|_H^2\right)^2 f_0^2 \|\varphi(t, v(t), \beta) - \varphi(t, \bar{v}(t), \beta)\|_H^2 \leq \left(2\lambda_0 T \|g(x)\|_H^2 f_0 \varphi_0\right)^2 \|v(t) - \bar{v}(t)\|_H^2. \end{aligned}$$

Теорема. Пусть выполнены условия (20)–(22). Тогда нелинейное интегральное уравнение (18) имеет в пространстве $H(0, T)$ единственное решение.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из леммы 1 и 2 и из того, что $H(0, T)$ является полным метрическим пространством [4].

Решение уравнения (18) может быть найдено методом последовательных приближений [4]

$$v_n(t) = G[v_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $v_0(t)$ произвольный элемент пространства $H(0, T)$. Пусть

$$\bar{v}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t)$$

решение уравнения (18). Тогда согласно (17) получим “оптимальное” управление

$$\tilde{u}^0(t) = \varphi[t, \bar{v}(t), \beta].$$

Теперь по “оптимальному” управлению $\tilde{u}^0(t)$ можно определить оптимальное обобщенное управление $U^0(t)$, т.е. класс (множество) управлений $\{u(t)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$f[t, u(t)] = f[t, \tilde{u}^0(t)]. \quad (23)$$

Решение задачи нелинейной оптимизации. Пусть $U^0(t)$ оптимальное обобщенное управление, элементами которого являются управления $\tilde{u}(t)$, удовлетворяющих уравнению (23), т.е.

$$U^0(t) = \{\tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_r(t) \mid f[t, \tilde{u}_k(t)] = f[t, \tilde{u}^0(t)], \quad r \leq \infty\}.$$

На элементах класса $U^0(t)$ функционал (7) имеет вид

$$I[\tilde{u}(t)] = \int_0^1 \left\{ [\tilde{V}(T, x) - \xi_1(x)]^2 + [\tilde{V}_i(T, x) - \xi_2(x)]^2 \right\} dx + \beta \int_0^T P[t, \tilde{u}(t)] dt, \quad \beta > 0,$$

где первый интеграл принимает постоянное значение при любом управлении $\tilde{u}(t) \in U^0(t)$, а значение второго интеграла подвергается изменению, когда управление $\tilde{u}(t)$ пробегает множество $U^0(t)$. Поэтому искомое оптимальное управление $u^0(t) \in H(0, T)$ может быть найдено как решение задачи

$$I[u^0(t)] = \min_{\tilde{u}(t) \in U^0(t)} I[\tilde{u}(t)],$$

которая может быть решена с применением того или иного метода оптимизации [5].

Пусть $u^0(t)$ оптимальное управление. Тогда тройка $(u^0(t), V^0(t, x), I[u^0(t)])$, где

$$V^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} g_n f[\tau, u^0(\tau)] d\tau \right] z_n(x)$$

– оптимальный процесс,

$$I[u^0] = \int_Q [V^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T P[t, u^0(t)] dt$$

– минимальное значение функционала (7), определяет решение задачи нелинейной оптимизации.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР Серия мат. – 1968. – Т. 32. – №4. – С. 743–755.
3. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
4. *Люстерник Л.Н., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
5. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
6. *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
7. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 497 с.
8. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 474 с.
9. *Бутковский А.Г.* Управление системами с распределенными параметрами (обзор) // Автоматика и телемеханика. – 1979. – №11. – С. 16–65.