

## О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

*Т.Ю. Урывская*

---

Исследована задача оптимизации тепловых процессов в случае, когда уравнение содержит разрывный коэффициент, функция внешнего воздействия нелинейно зависит от управления и минимизируется кусочно-линейный функционал. Разработан алгоритм построения ее решения.

*Ключевые слова:* обобщенное решение; условие оптимальности; знако-определенное решение.

Рассмотрим тепловой процесс  $V(t, x)$ , описываемый краевой задачей [1, 2]:

$$V_t = V_{xx} + a(t)V + g(x)f[t, u(t)], \quad 0 < x < 1, 0 < t < T,$$

$$V(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad \alpha > 0, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

где коэффициент  $a(t) \in H(0, T)$  является разрывной функцией,  $g(x) \in H(0, 1)$ ,  $\psi(x) \in H(0, 1)$ ,  $f[t, u(t)] \in H(0, T)$  – заданные функции, причем функция внешнего воздействия  $f[t, u(t)]$  нелинейно зависит от функции управления  $u(t) \in H(0, T)$ ,  $H$  – гильбертово пространство,  $T$  – фиксировано.

Используя метод Фурье, формальное решение краевой задачи (1) можно представить в виде

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \quad (2)$$

где  $\{z_n(x)\}$  – полная ортонормированная система собственных функций, а  $V_n(t)$  определяется как решение линейного интегрального уравнения

$$V_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \Psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} a(\tau) V_n(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

и имеет вид

$$V_n(t) = e^{\int_0^t [-\lambda_n^2 + a(\eta)] d\eta} \Psi_n + \int_0^t e^{\int_s^t [-\lambda_n^2 + a(\eta)] d\eta} g_n f[s, u(s)] ds,$$

где  $\{\lambda_n\}$  – соответствующая система собственных значений, удовлетворяющих условиям:

$$\lambda_n \leq \lambda_{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty, \quad n\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$\Psi_n$ ,  $g_n$  – коэффициенты Фурье соответственно функций  $\Psi(x)$ ,  $g(x)$ . Если функция  $f[t, u(t)]$  удовлетворяет условию

$$f_u[t, u(t)] \neq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4)$$

то легко проверить, что каждому управлению  $u(t) \in H(0, T)$  соответствует единственное решение краевой задачи (1)  $V(t, x)$  и это решение является элементом пространства  $H(Q)$ ,  $Q = (0, 1) \times (0, T)$ . Это решение назовем слабо обобщенным решением [3], т.к. оно не является классическим решением.

Далее рассмотрим задачу оптимизации, где на множестве решений краевой задачи (1) при выполнении условия (4), требуется минимизировать функционал

$$I[u, V] = \int_0^1 [V(t, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt, \quad \beta > 0, \quad (5)$$

где  $\xi(x) \in H(0, 1)$  – заданная функция.

Пара  $(u^0(t), V^0(t, x)) \in H(0, T) \times H(Q)$ , на которой функционал (5) достигает минимального значения, называется оптимально парой. При этом  $u^0(t)$  называется оптимальным управлением,  $V^0(t, x)$  – оптимальным процессом.

Согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [4] оптимальное управление  $u^0(t)$  находим из соотношений

$$\beta \operatorname{sign} u(t) = f_u[t, u(t)] \int_0^1 g(x) \omega(t, x) dx, \quad (6)$$

$$-f_u[t, u(t)] (f_u^{-1}[t, u(t)])_u \operatorname{sign} u(t) < 0, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

где  $\omega(t, x)$  определяется как решение сопряженной краевой задачи

$$\begin{aligned} \omega_t + \omega_{xx} + a(t)\omega(t, x) &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t < T, \\ \omega(T, x) + 2[V(T, x) - \xi(x)] &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ \omega_x(t, 0) = 0, \quad \omega_x(t, 1) + \alpha\omega(t, 1) &= 0, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned} \quad (8)$$

Обобщенное решение краевой задачи (8) находим по формуле

$$\omega(t, x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\int_{-h_n}^t [-\lambda_n^2 + a(\eta)] d\eta} \left[ -h_n + \int_0^T e^{\int_{-h_n}^{\tau} [-\lambda_n^2 + a(\eta)] d\eta} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] z_n(x), \quad (9)$$

где  $h_n = \xi_n - \Psi_n e^{\int_{-h_n}^0 [-\lambda_n^2 + a(\eta)] d\eta}$ .

$\xi_n, V_n(t), \omega_n(t)$  – коэффициенты Фурье соответствующих функций. Соотношения (6) и (7) называют условиями оптимальности. Согласно (9) находим, что

$$\int_0^1 g(x) \omega(t, x) dx = -2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{\int_{-h_n}^t [-\lambda_n^2 + a(\eta)] d\eta} \left[ -h_n + \int_0^T e^{\int_{-h_n}^{\tau} [-\lambda_n^2 + a(\eta)] d\eta} g f[\tau, u(\tau)] d\tau \right].$$

Учитывая монотонность функции  $f[t, u(t)]$ , т.е. условие (4), условие оптимальности (6) перепишем в виде

$$\beta u(t) f_u^{-1}[t, u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n, \quad (10)$$

где  $G_n(t) = g_n e^{\int_{-h_n}^t [-\lambda_n^2 + a(\eta)] d\eta}$ .

Таким образом, оптимальное управление  $u^0(t)$  следует находить как решение нелинейного интегрального уравнения (10), удовлетворяющее дополнительному условию (7). Эта задача по своей постановке является новой в теории интегральных уравнений и обладает специфическими особенностями. Например, нелинейное интегральное уравнение (10) является фредгольмовым и его решение не обладает свойством продолжаемости, т.е. решение строится в целом на отрезке  $[0, T]$ . Если полагать  $u(t) > 0, t \in [0, T]$ , то решение интегрального уравнения

$$\beta f_u^{-1}[t, u(t)] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n, \quad (11)$$

должен быть только положительного знака и удовлетворять дополнительному условию

$$f_u[t, u(t)] (f_u^{-1}[t, u(t)])_u > 0, \forall t \in [0, T]. \quad (12)$$

Если же полагать  $u(t) < 0, t \in [0, T]$ , то решение интегрального уравнения

$$-\beta f_u^{-1}[t, u(t)] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n, \quad (13)$$

должно быть только отрицательного знака и удовлетворять дополнительному условию

$$f_u[t, u(t)] (f_u^{-1}[t, u(t)])_u < 0, \forall t \in [0, T]. \quad (14)$$

Заметим, что если среди решений положительного знака уравнения (11) не имеется решения, для которого выполняется условие (12), то отсутствует решение задачи (11)–(12). В этом случае задача оптимизации также не имеет решения.

Таким образом, существование оптимального управления тесно связано с вопросом существования решения задачи (11)–(12) (или задачи (13)–(14)). Отметим, что выявление тех условий, при выполнении которых задача (11)–(12) имеет решение, требует дополнительных исследований.

Предположим, что в условиях рассматриваемой задачи оптимизации решение задачи (11)–(12) (или задачи (13)–(14)) существует. Оно может быть найдено методом, разработанным проф. А.А. Керимбековым [5]. Положим

$$\beta \text{sign} u(t) f_u^{-1}[t, u(t)] = \theta(t). \quad (15)$$

Из условия (7) следует, что соотношение (15) однозначно разрешается относительно  $u(t)$ , т.е. имеет равенство

$$u(t) = \varphi[t, \theta(t), \beta]. \quad (16)$$

В силу (15) и (16) уравнение перепишем в виде

$$\theta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, \varphi(\tau, \theta(\tau), \beta)] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n, \quad (17)$$

или в операторной форме

$$\theta = K[\theta], \quad (18)$$

где оператор  $K[\cdot]$  действует по формуле:

$$K[\theta] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \left[ h_n - \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, \varphi(\tau, \theta(\tau), \beta)] d\tau \right].$$

Можно показать, что оператор  $K[\cdot]$  переводит пространство  $H(0, T)$  в себя.

Далее, пусть выполняются условия:

(i) функция  $f[t, u(t)]$  удовлетворяет условию Липшица по функциональному аргументу  $u(t)$ , т.е.

$$\|f[t, u(t)] - f[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq f_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H; \quad (19)$$

(ii) функция  $\varphi[t, \theta(t), \beta]$  удовлетворяет условию Липшица по функциональному аргументу  $\theta(t)$ , т.е.

$$\|\varphi[t, \theta(t), \beta] - \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\|_H. \quad (20)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = TM \lambda_0 \varphi_0(\beta) \|g(x)\|_H^2 < 1, \quad (21)$$

где  $\lambda_0, M, \varphi_0(\beta) - const$ , операторное уравнение (18) в пространстве  $H(0, T)$  имеет единственное решение.

Доказательство.  $H(0, T)$  – является полным метрическим пространством. При выполнении условий (19)–(21) оператор  $K[\theta]$  является сжимающим. Поэтому согласно принципу сжимающих операторов [6, 7] уравнение (18) имеет единственное решение.

Решение уравнения (18) может быть найдено методом последовательных приближений [6, 7] по формуле:

$$\theta_n = K[\theta_{n-1}], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $\theta_0(t)$  – произвольный элемент пространства  $H(0, T)$  и при этом приближенное решение  $\theta_n(t)$  удовлетворяет оценке

$$\|\bar{\theta}(t) - \theta_n(t)\|_H \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \|K[\theta_0] - \theta_0\|_{H(0, T)},$$

где  $\bar{\theta}(t)$  – точное решение уравнения (18).

Далее  $\bar{\theta}(t)$ , подставив в (16), решение нелинейного интегрального уравнения (11) находим по формуле:

$$u^0(t) = \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta].$$

### Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
2. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
3. Плотников В.И. Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Серия мат. – 1968. – Т. 32. – №4. – С. 743–755.
4. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
5. Керимбеков А. Нелинейное оптимальное управление колебаниями в линиях передач. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2008. – 132 с.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
7. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 304 с.