УДК 517.97 (575.2) (04)

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ПОЛУЛИНЕЙНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

А. Керимбеков, Т.Ю. Урывская

Исследованы вопросы разрешимости задач нелинейного оптимального управления тепловыми и диффузионными процессами, описываемыми полулинейным параболическим уравнением. Установлено, что оптимальное управление определяется как решение нелинейного интегрального уравнения сложной структуры с дополнительным условием в виде дифференциального неравенства.

Ключевые слова: полулинейные параболические уравнения; слабо обобщенное решение; условия оптимальности; дифференциальное неравенство нелинейное интегральное уравнение оптимального управления.

I. Краевая задача управляемого процесса и ее решение

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый скалярной функцией *V(t,x)*, которая в области $Q_T = Q\times(0,T)$ удовлетворяет полулинейному параболическому уравнению [1]

$$V_t - AV = \varphi\left[t,x,V(t,x)\right] + g(x)f\left[t,u(t)\right], \tag{1}$$

а на границе Q_T начальным

$$V(0,X) = \psi(x),\ x\in Q \tag{2}$$

и граничному

$$\Gamma V(t,x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)\cos(\nu,x_i) + a(x)V(t,x) = 0,\ x\in\gamma,\ 0<t<T \tag{3}$$

условиям. Здесь $\varphi\left[t,x,V(t,x)\right]$ – заданная функция, нелинейно зависящая от состояния управляемого процесса $V(t,x)\in H(Q_T)$; $f\left[t,u(t)\right]\in H(0,T)$ – заданная функция внешнего воздействия, нелинейно зависящая от функции управления $u(t)\in H(0,T)$; Q – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей γ; ν – внешняя нормаль в точке $x\in\gamma$; $g(x)\in H(Q)$, $\psi(x)\in H(Q)$ заданные функции; оператор А, действующий по формуле

$$AV(t,x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)\right)_{x_j} - c(x)V(t,x), \tag{4}$$

является эллиптическим в замкнутой области $\bar{Q} = Q\cup\gamma$; $a(x)\geq 0$; $c(x)\geq 0$ – ограниченные измеримые функции; H – гильбертово пространство; T – фиксировано.

Пусть ψ_n и g_n – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi(x)$ и g(x); $\{z_n(x)\}$ – полная в $H(Q)$ ортонормированная система собственных функций краевой задачи [2]

$$Az(x) = -\lambda z(x),\ x\in Q,$$

$$\Gamma z(x) = 0,\ x\in\gamma, \tag{5}$$

а $\{\lambda_n\}$ – соответствующая последовательность собственных значений, причем $\lambda_n \le \lambda_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$.

Определение 1.1. Любая функция $V(t,x)\in H(Q_T)$, которая при каждом фиксированном управлении $u(t)\in H(Q_T)$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\psi_n e^{-\lambda_n t}+\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\int_Q \varphi\left[\tau,\xi,V(\tau,\xi)\right]z_n(\xi)d\xi d\tau+ \\ +\int_0^t g_n e^{-\lambda_n(t-\tau)}f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\Big]z_n(x), \tag{6}$$

называется слабо обобщенным решением краевой задачи (1)–(4). Исследуем вопросы существования единственного обобщенного решения нелинейного интегрального уравнения (6).

Лемма 1.1. Функция

$$h(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n e^{-\lambda_n t}\right]z_n(x) \tag{7}$$

является элементом пространства $H(Q_T)$.

Лемма 1.2. Пусть $\varphi(\bullet,V)$ такая функция, что при любом $V(t,x)\in H(Q_T)$ она является элементом пространства $H(Q_T)$. Тогда оператор $K_0[V]$, действующий по формуле

$$K_0\left[V(t,x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\int_Q\varphi\left[\tau,\xi,V(\tau,\xi)\right]z_n(\xi)d\xi d\tau z_n(x) \tag{8}$$

отображает пространство $H(Q_T)$ в себя.

Лемма 1.3. Пусть $f(t,u(t))$ такая функция, что при любом управлении $u(t)\in H(0,T)$ она является элементом пространства $H(0,T)$. Тогда оператор $F\left[t,x,u(t)\right]$, действующий по формуле:

$$F\left[t,x,u(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}g_n f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\, z_n(x). \tag{9}$$

отображает пространство $H(0,T)$ в пространство $H(Q_T)$.

Теперь интегральное уравнение (1.6) согласно представлениям (7), (8) и (9) перепишем в операторной форме

$$V = K[V], \tag{10}$$

где оператор

$$K[V]=h+K_0[V]+F$$

в силу лемм 1.1–1.3 при любом фиксированном $u(t)\in H(0,T)$ отображает пространство $H(Q_T)$ в себя.

Теорема 1.1. Пусть функция $\varphi\left[t,x,V(t,x)\right]$ при любом $V(t,x)\in H(Q_T)$ является элементом пространства $H(Q_T)$ и удовлетворяет условию

$$\varphi_0=\sup_{(t,x)\in H(Q_t)}\left|\frac{\partial\varphi[t,x,V]}{\partial V}\right|\neq 0\,. \tag{11}$$

Тогда при выполнении условия

$$\lambda_0 T\varphi_0<1 \tag{12}$$

операторное уравнение (1.10) имеет единственное решение в пространстве ***H(Q)***.

Решение может быть найдено методом последовательных приближений [4]

$$V_n(t,x)=K\left[V_{n-1}(t,x)\right],\quad n=1,2,3,\ldots,$$

где нулевое приближение V_o *(t, x)* является произвольным элементом пространства $H(Q_T)$. При этом приближенное решение V_n *(t, x)* удовлетворяет оценке

$$\left\|V(t,x)-V_n(t,x)\right\|_{H(Q_T)} \le \frac{(T\lambda_0\varphi_0)^n}{1-T\lambda_0\varphi_0}\left\|K[V_0]-V_0\right\|_{H(Q_T)}. \tag{13}$$

Заметим, что между элементами пространства управлений $H(0,T)$ и пространства состояний $H(Q_T)$ взаимно однозначное соответствие имеет место лишь в случае, когда

$$\frac{\partial f[t,u]}{\partial u} \ne 0,\ t\in[0,T]. \tag{14}$$

Поэтому отображение $u(t)\to V(t,x)$ является однозначным лишь при выполнении условий (11) и (14).

II. Задача оптимального управления и условия оптимальности

Пусть управляемый процесс *V(t,x)* описывается краевой задачей (1)–(4).

Задача нелинейной оптимизации. Рассмотрим нелинейную задачу оптимального управления. Пусть функции $S[t,x,V], P[t,u], \Phi[V(T,x)]$ заданы и обладают следующими свойствами:

(i) функция $S[t,x,V]$ – непрерывна и имеет производную $\frac{\partial S}{\partial V}\in H(Q_T)$;

(ii) функция $P[t,u(t)]$ интегрируема на $[0,T]$ и имеет производную $\frac{\partial P}{\partial u}\in H(0,T)$;

(iii) функция $\Phi[V]$ интегрируема по области Q и имеет производные $y_n, \frac{\partial \Phi}{\partial V}\in H(Q)$.

Требуется найти допустимую пару $\left(u^0(t),V^0(t,x)\in H(0,T)\times H(Q_T)\right)$, на которой функционал

$$J[u(t)]=\int_0^T\int_Q S[t,x,V(t,x)]dxdt+\int_0^T P[t,u(t)]dt+\int_Q \Phi[V(T,x)]dx \tag{15}$$

принимает наименьшее возможное значение.

Теорема 2.1. Пусть функции $P[t,u]$ и $f[t,u]$ имеют производные $\frac{\partial P(t,u)}{\partial u}\ne 0$, $\frac{\partial^2 P(t,u)}{\partial u^2}\in H(0,T)$ и $\frac{\partial f(t,x)}{\partial u}\ne 0$, $\frac{\partial^2 f(t,u)}{\partial u^2}\in H(0,T)$.

Для того чтобы допустимая пара $(u(t),V(t,x))\in H(0,T)\times H(Q_T)$ была оптимальной необходимо, чтобы функция

$$\prod[t,x,V(t,x),\omega(t,x),u(t)]=\int_Q g(x)\omega(t,x)dxf[t,u(t)]-P[t,u(t)], \tag{16}$$

где $\omega(t,x)$ обобщенное решение краевой задачи

$$\omega_t+A\omega+\frac{\partial\varphi}{\partial V}\omega=\frac{\partial S}{\partial V}, x\in Q, 0\le t\le T, \tag{17}$$

$$\omega(T,x)-\frac{\partial\Phi[V]}{\partial V}=0, x\in Q, \tag{18}$$

$$\Gamma\omega(t,x)=0, x\in\gamma, 0\le t\le T, \tag{19}$$

почти всюду на [0,T] удовлетворяла соотношению

$$\Pi[t,x,V^0(t,x),\omega(t,x),u^0(t)]=\sup_{U\in D}[t,x,V^0(t,x),\omega(t,x),u], \tag{20}$$

где D – открытое множество допустимых значений u.

Доказательство теоремы приводить не будем, так как оно следует из известных теорем о принципе максимума для систем с распределенными параметрами [3, 4].

Согласно (16) и (20), как следствие получаем следующие соотношения:

$$\int_Q g(x)\omega(t,x)dx\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}-\frac{\partial P(t,u)}{\partial u}=0, \tag{21}$$

$$\int_Q g(x)\omega(t,x)dx\frac{\partial^2 f(t,u)}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 P(t,u)}{\partial u^2}<0, \tag{22}$$

которые выполняются только на оптимальном управлении $u^0(t)$. С учетом условия (14) равенство (21) перепишем в виде:

$$\frac{\partial P[t,u]}{\partial u}\left(\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}\right)^{-1}=\int_Q g(x)\omega(t,x)dx. \tag{23}$$

На основе этого равенства условие (22) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial f[t,u]}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial P(t,u)}{\partial u}\left(\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}\right)^{-1}\right)>0. \tag{24}$$

Таким образом, оптимальное управление *$u°(t)$* следует находить из системы соотношений (23) и (24), которые называются условиями оптимальности.

III. Сопряженная краевая задача и ее решение

Рассмотрим краевую задачу (17)–(19), сопряженную с краевой задачей (1)–(4).

Определение 3.1. Любая функция $\omega(t,x)\in H(Q_T)$, которая при каждой допустимой паре $(u(t),V(t,x))\in H(0,T)\times H(Q_T)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$\begin{aligned}\omega(t,x)=&-\sum_{n=1}^{\infty}\int_t^T e^{-\lambda_n(\tau-t)}\int_Q\frac{\partial\varphi[\tau,\xi,V(\tau,\xi)]}{\partial V}\omega(\tau,\xi)z_n(\xi)d\xi d\tau z_n(x)+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\int_t^T e^{-\lambda_n(\tau-t)}\int_Q\frac{\partial S[\tau,\xi,V(\tau,\xi)]}{\partial V}z_n(\xi)d\xi d\tau z_n(x)-\\&-\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda_n(T-t)}\int_Q\frac{\partial\Phi[V]}{\partial V}z_n(\xi)d\xi\right)z_n(x),\end{aligned} \tag{25}$$

называется обобщенным решением сопряженной краевой задачи (17)–(19).

Исследуем вопросы однозначной разрешимости линейного интегрального уравнения (25).

Лемма 3.1. Функция

$$y_1(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda_n(T-t)}\int_Q\frac{\partial\Phi[V]}{\partial V}z_n(\xi)d\xi\right)z_n(x) \tag{26}$$

является элементом пространства $H(Q_T)$.

Лемма 3.2. Функция

$$y_2(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_t^T e^{-\lambda_n(\tau-t)}\int_Q\frac{\partial S[\tau,\xi,V(\tau,\xi)]}{\partial V}z_n(\xi)d\xi d\tau z_n(x) \tag{27}$$

является элементом пространства $H(Q_T)$.

Лемма 3.3. Для любой функции $\omega(t,x)\in H(Q_T)$ оператор $G_0[t,x,\omega(t,x)]$ действующий по формуле

$$G_0[t,x,\omega(t,x)]=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T e^{-\lambda_n(\tau-T)}\int_Q\frac{\partial\varphi[\tau,\xi,V]}{\partial V}\omega(\tau,\xi)z_n(\xi)d\xi d\tau z_n(x) \tag{28}$$

отображает пространство $H(Q_T)$ в себя.

Теперь интегральное уравнение (25), согласно представлениям (26), (27) и (28), перепишем в операторной форме:

$$\omega = G[\omega], \tag{29}$$

где оператор

$$G[\omega] = G_0[\omega] - y_2 - y_1 \tag{30}$$

в силу лемм (25)–(27), отображает пространство $H(Q_T)$ в себя.

Теорема 3.1. Операторное уравнение (29) при выполнении условий (13) и (14) имеет единственное решение в пространстве $H(Q_T)$.

Решение может быть найдено методом последовательных приближений [3].

$$\omega_n(t,x) = G[\omega_{n-1}(t,x)],\ n = 1,2,3,...,$$

где $\omega_0(t,x)$ является произвольным элементом пространства $H(Q_T)$. Приближенное решение $\omega_n(t,x)$ удовлетворяет оценке

$$\|\omega(t,x) - \omega_n(t,x)\|_{H(Q_T)} \le \frac{(T\lambda_0\varphi_0)^n}{1 - T\lambda_0\varphi_0}\|G[\omega_0] - \omega_0\|_{H(Q_T)}.$$

IV. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления

Оптимальное управление $u^0(t)$ находим согласно условиям оптимальности (23) и (24). Учитывая представление (25), равенство (23) перепишем в виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial P[t,u]}{\partial u}\left(\frac{\partial f[t,u]}{\partial u}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \int_t^T e^{-\lambda_n(\tau - t)} \int_Q \frac{\partial S[\tau,\xi,V]}{\partial V} z_n(\xi) d\xi d\tau - \\ -\sum_{n=1}^{\infty} g_n \int_t^T e^{-\lambda_n(\tau - t)} \int_Q \frac{\partial \varphi[\tau,\xi,V]}{\partial V}\omega(\tau,\xi) z_n(\xi) d\xi d\tau - \\ -\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(T-t)} g_n \int_Q \frac{\partial \Phi[V(T,\xi)]}{\partial V} z_n(\xi) d\xi\end{gathered}, \tag{31}$$

где

$$V(t,x) = R(t,x,f[t,u(t)]) \tag{32}$$

– решение нелинейного интегрального уравнения (6). В (31) заменяя $V(t,x)$ на $R(t,x,f[t,u(t)])$, получим нелинейное интегральное уравнение

$$\frac{\partial P[t,u]}{\partial u}\left(\frac{\partial f[t,u]}{\partial u}\right)^{-1} = B(t,f[t,(u(t))]), \tag{33}$$

где оператор $B[.]$ имеет сложную структуру. Оптимальным управлением $u^0(t)$ может быть решение уравнения (33), удовлетворяющее дополнительному условию (24). Таким образом, в процессе исследования нелинейных задач оптимального управления колебательными процессами, описываемыми полулинейными параболическими уравнениями, возникает своеобразная новая задача (33), (24) теории нелинейных интегральных уравнений. Эта задача почти не исследована.

Согласно методике [4], для исследования уравнения (33), сначала его преобразуем. Положим

$$\frac{\partial P[t,u(t)]}{\partial u}\left(\frac{\partial f[t,u(t)]}{\partial u}\right)^{-1} = \theta(t). \tag{34}$$

В силу условия (24) это равенство однозначно разрешается относительно управления $u(t)$ и существует функция $\mu(\bullet)$ такая, что

$$u(t)=\mu\left[t,\theta(t)\right]. \tag{35}$$

Согласно (34) и (35) уравнение (33) перепишем в виде

$$\theta(t)=B\left(t,f\left[t,\mu\left[t,\theta(t)\right]\right]\right). \tag{36}$$

Это уравнение может быть исследовано методами нелинейного анализа [5].

Пусть $\theta(t)$ решение уравнения (36). Это решение подставим в (35) и находим управление, которое является решением уравнения (33). Сложность, возникающая при определении оптимального управления $u^0(t)$, заключается еще и в том, что на этом решении должно выполняется дополнительное условие (24).

Если найдено оптимальное управление, то оптимальный процесс $V^0(t,x)$ находим по формуле (32). Далее $u^0(t)$ и $V^0(t,x)$ поставим в (15) и вычислим минимальное значение функционала $J\left[u^0\right]$. Таким образом, найденная тройка ($u^0(t)$, $V^0(t,x)$, $J\left[u^0\right]$) является решением задачи оптимизации.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Серия мат. – 1968. – Т. 32. – №4. – С. 743–755.
3. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
4. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление колебаниями в линиях передач. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2008. – 132 с.
5. *Люстерник Л.Н., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.