

УДК 515.12 (575.2) (04)

АФФИННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

И.И. Тожиев

Показано, что пространство идемпотентных вероятностных мер топологически вкладывается в пространство полуаддитивных функционалов.

Ключевые слова: идемпотентная мера; полуаддитивный функционал.

Пусть \mathbf{R} – поле вещественных чисел. Определим на множестве $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ следующие операции: сложение \oplus по правилу $a \oplus b = \max\{a, b\}$, $a, b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, и умножение \odot по правилу $a \odot b = a + b$, $a, b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$.

Множество $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, снабженное этими двумя операциями, принято обозначать через \mathbf{R}_{\max} . Нулем $\mathbf{0} \in \mathbf{R}_{\max}$ является $-\infty$, а единицей $\mathbf{1} \in \mathbf{R}_{\max}$ является (обычный) ноль: 0. Множество \mathbf{R}_{\max} с операциями \oplus , \odot , нулем $\mathbf{0} = -\infty$ и единицей $\mathbf{1} = 0$ является идемпотентным полуполем. Заметим, что переход от полуполя \mathbf{R}_+ относительно обычных операций к \mathbf{R}_{\max} осуществляется при помощи естественного преобразования, так называемой деквантизацией Маслова [1].

Рассмотрим произвольный компакт X , алгебру $C(X)$ непрерывных функций $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$, где \mathbf{R} можно считать подмножеством полуполя \mathbf{R}_{\max} . На $C(X)$ можно определить сложение \oplus и умножение \odot , соответственно, по правилам:

$$(\varphi \oplus \psi)(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}, \quad x \in X;$$

$$(\varphi \odot \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad x \in X,$$

где $\varphi, \psi \in C(X)$. Для $\lambda \in \mathbf{R}$ через λ_X обозначают постоянную функцию, тождественно равную λ : $\lambda_X(x) = \lambda$, $x \in X$.

Напомним [2], что функционал $\mu: C(X) \rightarrow \mathbf{R} (\subset \mathbf{R}_{\max})$ называется идемпотентной вероятностной мерой на X , если он обладает следующими свойствами:

- (a) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$;
- (b) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$ и $\varphi \in C(X)$;
- (c) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$.

Для компакта X через $I(X)$ обозначается множество всех идемпотентных вероятностных мер на X . Ясно, что $I(X) \subset \mathbf{R}^{C(X)}$. $I(X)$ снабжается топологией поточечной сходимости. Относительно этой топологии $I(X)$ является компактом. Операция I взятия компакта $I(X)$ из заданного компакта X является нормальным функтором в категории компактов. Поэтому можно определить понятие носителя функционала $\mu \in I(X)$:

$$\text{supp } \mu \cap \{A \subset X: \bar{A} = A, \mu \in I(A)\}.$$

Для компакта X введем следующее множество:

$$I_{\omega}(X) = \{\mu \in I(X) : |\text{supp } \mu| < \aleph_0\}.$$

Известно, что $\overline{I_\omega(X)}^{I(X)} = I(X)$. Кроме того, каждая мера $\mu \in I_\omega(X)$ допускает [2] следующее представление

$$\mu = \max \{ \delta_{x_1} + \lambda_1, \dots, \delta_{x_k} + \lambda_k \},$$

где $\text{supp } \mu = \{x_1, \dots, x_k\}$, $\lambda_i \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $i = 1, \dots, k$, $\max \{ \lambda_1, \dots, \lambda_k \} = 0$.

Рассмотрим теперь пространство $P(X)$ положительных, нормированных, линейных функционалов на $C(X)$. Напомним [3], что функционал $\nu: C(X) \rightarrow \mathbf{R}$ называется:

- 1) слабо аддитивным, если для всех $c \in \mathbf{R}$ и $\varphi \in C(X)$ выполняется равенство $\nu(\varphi + c \cdot 1_X) = \nu(\varphi) + c \cdot \nu(1_X)$;
- 2) сохраняющим порядок, если для функций $\varphi, \psi \in C(X)$ из $\varphi \leq \psi$ вытекает $\nu(\varphi) \leq \nu(\psi)$;
- 3) нормированным, если $\nu(1_X) = 1$;
- 4) положительно-однородным, если $\nu(\lambda\varphi) = \lambda\nu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X)$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$, где $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$;
- 5) полуаддитивным, если $\nu(f + g) \leq \nu(f) + \nu(g)$ для всех $f, g \in C(X)$.

Для компакта X через $OS(X)$ обозначается множество всех функционалов, обладающими этими пятью свойствами. Элементы множества $OS(X)$ для краткости будем называть полуаддитивными функционалами. $OS(X)$ снабжается топологией поточечной сходимости. Для любого компакта X пространство $OS(X)$ является выпуклым компактом.

Теперь для компакта X выделим следующее множество

$$P_m(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \max \{ \mu : \mu \in A_i \} : A_i \subset P(X), [A_i]_{P(X)} = A_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, n}, n \in \mathbf{N} \right\},$$

где положено $\max \{ \mu : \mu \in A \}(\varphi) = \max \{ \mu(\varphi) : \mu \in A \}$, $\varphi \in C(X)$.

Предложение 1. Для любого компакта X множество $P_m(X)$ является компактом в $\mathbf{R}^{C(X)}$.

Предложение 2. Для любого компакта X множество $P_m(X)$ является подпространством пространства $OS(X)$.

Пусть $A = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X$ – произвольное k -точечное множество, $A_i = \{x_2, \dots, x_k\}$, $A_2 = \{x_1, x_3, \dots, x_k\}$, ..., $A_k = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ – $(k-1)$ -точечные подмножества A . Для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ положим:

$$B(A_i) = \left\{ \alpha_i \max \{ \delta_x : x \in A \} + \sum_{x_j \in A_i} \alpha_{ij} \delta_{x_j} : \alpha_i \geq 0, \alpha_{ij} \geq 0, \alpha_i + \sum_{x_j \in A_i} \alpha_{ij} = 1 \right\}.$$

Рассмотрим следующее множество

$$B(A) = \bigcup_{i=1}^k B(A_i).$$

Ясно, что $B(A) \subset P_m(X)$.

Теорема 1. Пусть X – компакт, $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ – конечное подмножество компакта X . Тогда подпространства $B(A) (\subset P_m(X))$ и $I(A) (\subset I(X))$ гомеоморфны.

Доказательство. Пусть $A = \{x_1, x_2\} \subset X$ – произвольное двухточечное множество, $A_1 = \{x_2\}$, $A_2 = \{x_1\}$ – одноточечные подмножества A . Тогда

$$B(A) = \{ \alpha \delta_0 + (1 - \alpha) \delta_0 \vee \delta_1 : 0 \leq \alpha \leq 1 \} \cup \{ \beta \delta_1 + (1 - \beta) \delta_0 \vee \delta_1 : 0 \leq \beta \leq 1 \}.$$

Для множества $A = \{x_1, x_2\}$ множество идемпотентных вероятностных мер имеет вид

$$I(A) = \{\lambda_1 \odot \delta_0 \oplus 0 \odot \delta_1 : -\infty \leq \lambda_1 \leq 0\} \cup \{0 \odot \delta_0 \oplus \lambda_2 \odot \delta_1 : -\infty \leq \lambda_2 \leq 0\}.$$

Отображение $f : B(A) \rightarrow I(A)$ определим по правилу:

$$f(\alpha \delta_0 + (1-\alpha)(\delta_0 \vee \delta_1)) = 0 \odot \delta_0 \oplus \ln(1-\alpha) \odot \delta_1, \quad f(\beta \delta_1 + (1-\beta)(\delta_0 \vee \delta_1)) = \ln(1-\beta) \odot \delta_0 \oplus 0 \odot \delta_1.$$

Ясно, что отображение f – гомеоморфизм.

Пусть теперь $A = \{x_1, x_2, x_3\} \subset X$ – произвольное трехточечное множество, $A_1 = \{x_2, x_3\}$, $A_2 = \{x_1, x_3\}$, $A_3 = \{x_1, x_2\}$ – двухточечные подмножества A . Тогда $B(A) = B(A_1) \cup B(A_2) \cup B(A_3)$. С другой стороны, для множества $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ множество $I(A)$ идемпотентных вероятностных мер можно записать в виде объединения $D(A_1) \cup D(A_2) \cup D(A_3)$, где

$$D(A_1) = \{0 \odot \delta_0 \oplus \lambda_2 \odot \delta_1 \oplus \lambda_3 \odot \delta_2 : -\infty \leq \lambda_2 \leq 0, -\infty \leq \lambda_3 \leq 0\},$$

$$D(A_2) = \{\lambda_1 \odot \delta_0 \oplus 0 \odot \delta_1 \oplus \lambda_3 \odot \delta_2 : -\infty \leq \lambda_1 \leq 0, -\infty \leq \lambda_3 \leq 0\},$$

$$D(A_3) = \{\lambda_1 \odot \delta_0 \oplus \lambda_2 \odot \delta_1 \oplus 0 \odot \delta_2 : -\infty \leq \lambda_1 \leq 0, -\infty \leq \lambda_2 \leq 0\}.$$

Каждому функционалу

$$v = \lambda_1 \mu + \lambda_2 (\delta_0 \vee \delta_1 \vee \delta_2),$$

где $\mu = \alpha_1 \delta_0 + \alpha_2 \delta_1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2$, ставим в соответствие идемпотентную вероятностную меру

$$\ln(1-\lambda_2) \odot \delta_0 \oplus \ln\left(1 - \frac{\lambda_2 \alpha_2}{\alpha_1}\right) \odot \delta_1 \oplus 0 \odot \delta_2, \text{ если } \alpha_1 \geq \frac{1}{2},$$

$$\ln\left(1 - \frac{\lambda_2 \alpha_1}{\alpha_2}\right) \odot \delta_0 \oplus \ln(1-\lambda_2) \odot \delta_1 \oplus 0 \odot \delta_2, \text{ если } \alpha_2 \geq \frac{1}{2}.$$

Это соответствие устанавливает гомеоморфизм между подпространствами $B(A_3)$ и $D(A_3)$. Таким же способом можно установить гомеоморфизм между подпространствами $B(A_1)$ и $D(A_1)$, и $B(A_2)$ и $D(A_2)$. Таким образом, утверждение теоремы 1 доказано для двух- и трехточечного множеств. Заключение теоремы аналогично доказывается для произвольного n -точечного множества. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Для любого компакта X пространство $OS(X)$ полуаддитивных функционалов содержит подпространство, гомеоморфное пространству $I(X)$.

Доказательство. Возьмем произвольную $\mu \in I_\omega(X)$. Тогда $\mu \in I(\text{supp } \mu)$. Поскольку $|\text{supp } \mu| < \aleph_0$, то в силу теоремы 1 существует единственный функционал $\mu \in B(\text{supp } \mu)$. Следовательно, $I_\omega(X)$ можно вложить в $P_m(X)$. Так как имеет место предложение 1, то $I(X)$ вкладывается в $P_m(X)$. Теперь предложение 2 завершает доказательство следствия 1.

Литература

1. Маслов В.П. Методы операторов. – М.: Мир, 1987.
2. Zarichnyi M. Idempotent probability measures, I. //arXiv: math.GN/0608754v1.
3. Давлетов Д.Э. Некоторые свойства функтора полуаддитивных функционалов // Узбекский матем. журнал. – 2009. – № 4. – С. 50–60.