УДК 514.75 (575.2) (04)

ЦИКЛИЧЕСКАЯ СЕТЬ ФРЕНЕ В N-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_N

Т.М. Папиева

Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная сеть Френе являлась циклической сетью Френе.

Ключевые слова: сеть Френе; циклическая сеть Френе.

В области Ω n-мерного евклидова пространства E_n задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = (X, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = 1, 2, ..., n)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i\,,\ d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k\,. \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i,\ D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k,\ \omega_i^j + \omega_j^i = 0\,. \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_n для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_n Френе, формы ω_i^k становятся главными [2], т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j\,. \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i\,.$$

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$$
$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,$$
$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$d_1\vec{e}_{n-1} = \Lambda_{n-1,1}^{n-2} \vec{e}_{n-2} + \Lambda_{n-1,1}^{n} \vec{e}_n,$$
$$d_1\vec{e}_n = \Lambda_{n1}^{n-1} \vec{e}_{n-1}.$$

Так как $\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i$ формулы Френе примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
&d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,\\
&d_1\vec{e}_2 = -\Lambda_{11}^2 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,\\
&d_1\vec{e}_3 = -\Lambda_{21}^3 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d_1\vec{e}_{n-1} = -\Lambda_{n-2,1}^{n-1} \vec{e}_{n-2} + \Lambda_{n-1,1}^{n} \vec{e}_n,\\
&d_1\vec{e}_n = -\Lambda_{n-1,1}^{n} \vec{e}_{n-1},
\end{aligned} \tag{4}$$

где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1, $k_i^{(1)} = \Lambda_{i1}^{i+1}$ – i -ая кривизна линии ω^1 заданного семейства:

$$\Lambda_{i1}^j = 0\ \left(i < j,\ i = 1, 2, ...n-2;\ j = 3, 4, ..., \widehat{i+1}, ..., n\right), \tag{5}$$

$$\Lambda_{i1}^{i+1} \neq 0\ \ (i = 1, 2, ...n-2) \tag{6}$$

(здесь знаком $\wedge$ сверху отмечены не принимаемые индексом *j* значения).

Псевдофокус [3] F_i^j $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_n Френе определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \left(1/\Lambda_{ij}^j\right)\vec{e}_i = \vec{X} + \left(1/\Lambda_{jj}^i\right)\vec{e}_i\,. \tag{7}$$

В общем случае на каждой касательной $(X, \vec{e}_i)$ существуют псевдофокусы в количестве $n-1$. Но в силу (5), (6), (7) на каждой из касательных $(X, \vec{e}_3)$, $(X, \vec{e}_4)$, …, $(X, \vec{e}_n)$ имеем псевдофокусов в количестве $n-2$, а точки $F_3^1 \in (X,\vec{e}_3)$, $F_4^1 \in (X,\vec{e}_4)$, …, $F_n^1 \in (X,\vec{e}_n)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_n$.

Пусть сеть Σ_n является циклической сетью Френе [4]. Тогда репер $\Re_2 = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,...,\vec{e}_n,\vec{e}_1)$ является репером Френе для линии ω^2 сети Σ_n, репер $\Re_3 = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,...,\vec{e}_n,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ является репером Френе для линии ω^3 сети Σ_n, и т.д., репер $\Re_n = (X,\vec{e}_n,\vec{e}_1,...,\vec{e}_{n-1})$ является репером Френе для линии ω^n сети Σ_n. Формулы Френе для линии ω^2 имеют вид:

$$d_2\vec{e}_2 = \Lambda_{22}^3\vec{e}_3,$$
$$d_2\vec{e}_3 = -\Lambda_{22}^3\vec{e}_2 + \Lambda_{32}^4\vec{e}_4,$$
$$d_2\vec{e}_4 = -\Lambda_{32}^4\vec{e}_3 + \Lambda_{42}^5\vec{e}_5,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$d_2\vec{e}_n = -\Lambda_{n-1,2}^n\vec{e}_{n-1} + \Lambda_{n2}^1\vec{e}_1,$$
$$d_2\vec{e}_1 = -\Lambda_{n2}^1\vec{e}_n,$$

где d_2 – символ дифференцирования вдоль линии ω^2, $K_{\bar{i}}^{(2)} = \Lambda_{\bar{i}2}^{\bar{i}+1}$ – $\bar{i}$-тая кривизна этой линии ($\bar{i} = 2,3,...,n-1,\ n$; когда $\bar{i} = n$, индекс $\bar{i}+1$ условно обозначим через 1),

$$\Lambda_{\bar{i}2}^{\bar{i}+1} \neq 0, \tag{8}$$

$$\Lambda_{\bar{i}2}^{j} = 0 \ \left(\bar{i} < j,\ \bar{i} = 2,3,...,n-1,n;\ \ j = 4,...,\widehat{i+1},...,n\right). \tag{9}$$

Из (8), (9), (7) следует, что псевдофокусы $F_1^2 \in (X,\vec{e}_1)$, $F_4^2 \in (X,\vec{e}_4)$, ...,$F_n^2 \in (X,\vec{e}_n)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_n$.

Напишем формулы Френе для линии ω^3 сети Σ_n:

$$d_3\vec{e}_3 = \Lambda_{33}^4\vec{e}_4,$$
$$d_3\vec{e}_4 = -\Lambda_{33}^4\vec{e}_3 + \Lambda_{43}^5\vec{e}_5,$$
$$d_3\vec{e}_5 = -\Lambda_{43}^5\vec{e}_4 + \Lambda_{53}^6\vec{e}_6,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$d_3\vec{e}_{n-1} = -\Lambda_{n-2,3}^{n-1}\vec{e}_{n-2} + \Lambda_{n-1,3}^n\vec{e}_n,$$
$$d_3\vec{e}_n = -\Lambda_{n-1,3}^n\vec{e}_{n-1} + \Lambda_{n3}^1\vec{e}_1,$$
$$d_3\vec{e}_1 = -\Lambda_{n3}^1\vec{e}_n + \Lambda_{13}^2\vec{e}_2,$$
$$d_3\vec{e}_2 = -\Lambda_{13}^2\vec{e}_1,$$

где d_3 – символ дифференцирования вдоль линии ω^3, $K_{\tilde{i}}^{(3)} = \Lambda_{\tilde{i}3}^{\tilde{i}+1}$ – $\tilde{i}$-тая кривизна этой линии ($\tilde{i} = 3,4,...,\ n,\ n+1$; когда $\tilde{i} = n$, индекс $\tilde{i}+1$ условно обозначим через 1, когда $\tilde{i} = n+1$, индекс $\tilde{i} = n+2$ условно обозначим через 2)

$$\Lambda_{\tilde{i}3}^{\tilde{i}+1} \neq 0, \tag{10}$$

$$\Lambda_{\tilde{i}2}^{j} = 0 \ \left(j = 1,2,3,...,n;\right). \tag{11}$$

Из (7), (10), (11) следует, что псевдофокусы $F_1^3 \in (X, \vec{e}_1)$, $F_2^3 \in (X, \vec{e}_2)$, $F_5^3 \in (X, \vec{e}_5)$, ... , $F_n^3 \in (X, \vec{e}_n)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_n$.

Формулы Френе для линии ω^n сети Σ_n имеют вид:

$$d_n\vec{e}_n = \Lambda_{nn}^1 \vec{e}_1,$$
$$d_n\vec{e}_1 = -\Lambda_{nn}^1 \vec{e}_n + \Lambda_{1n}^2 \vec{e}_2,$$
$$d_n\vec{e}_2 = -\Lambda_{1n}^2 \vec{e}_1 + \Lambda_{2n}^3 \vec{e}_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$d_n\vec{e}_{n-2} = -\Lambda_{n-3,n}^{n-2} \vec{e}_{n-3} + \Lambda_{n-2,n}^{n-1} \vec{e}_{n-1},$$
$$d_n\vec{e}_{n-1} = -\Lambda_{n-2,n}^{n-1} \vec{e}_{n-2},$$

где $\Lambda_{nn}^1 = -\Lambda_{1n}^n$ – первая кривизна линии ω^n сети Σ_n, $K_p^{(n)} = \Lambda_{p-1,n}^p$ – p-тая кривизна этой линии $(p = 2, 3, ..., n-2)$,

$$\Lambda_{p-1,n}^p \neq 0, \tag{12}$$

$$\Lambda_{p-1,n}^j = 0 \ \ (p < j;\ p = 2, ..., n-2; \quad j = 3, ..., n). \tag{13}$$

Из (7), (12), (13) следует, что псевдофокусы $F_2^n \in (X, \vec{e}_2)$, $F_3^n \in (X, \vec{e}_3)$, $F_4^n \in (X, \vec{e}_3)$, ... , $F_{n-1}^n \in (X, \vec{e}_{n-1})$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_n$.

Из вышеизложенного следует

Теорема. Сеть Σ_n Френе для линии ω^1 заданного семейства является циклической сетью Френе тогда и только тогда, когда выполнены условия: (5), (6), (8), (9), …, (12), (13).

Литература

1. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.
2. *Базылев В.Т.* Сети на многообразиях // Труды геометрического семинара. – М.: АН СССР, ВИНИТИ. – 1974. – №6. – С. 189–205.
3. *Базылев В.Т.* О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский математический сборник. – 1966. – Вып. VI. – №4. – С. 475–491.
4. *Матиева Г.* Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства. – Ош: ОшГУ; Изд. центр “Билим”, 2003. – 151 с.