УДК 512.15 (575.2) (04)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ КОВАРИАНТНЫХ ФУНКТОРОВ

Т.Ф. Жураев

Рассматриваются некоторые геометрические и топологические свойства конечно-открытых и проективно факторных ковариантных функторов.

Ключевые слова: конечно-открытый; конечно-замкнутый и проективно-факторный функтор.

Конечно-открытые и проективно-факторные функторы рассматриваются в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений.

Напомним определение некоторых свойств нормальных функторов $F : Comp \to Comp$ действующего в категории бикомпактов. Через $C(X,Y)$ обозначается пространство непрерывных отображений из *X* в *Y* в бикомпактно-открытой топологии. В частности, $C(\{k\},Y)$ естественно гомеоморфно **k**-ой степени Y^k пространства *Y*. Отображению $\zeta : \{k\} \to Y$ ставится в соответствие точка $(\zeta(0), \zeta(1), ..., \zeta(k-1)) \in Y^k$.

Для функтора *F*, бикомпакта *X* и натурального числа *k* определим отображения

$$\pi_{F,X,k} : C(\{k\},X) \times F(\{k\}) \to F(X)$$

равенством

$$\pi_{F,X,k}(\zeta,a) = F(\zeta,a); \text{ где } \zeta \in C(\{k\},X);\ a \in F(\{k\}).$$

По теореме Е.В. Щепина [1] отображение $F : C(Z,Y) \to C(F(Z),F(Y))$ непрерывно для всякого непрерывного функтора *F* и бикомпактов *Z* и *Y*. Поэтому имеет место

Предложение 1 [2]. Для непрерывного функтора *F*, бикомпакта *X* и натурального *k* отображение $\pi_{F,X,k}$ непрерывно.

Определим подфунктор F_k функтора *F* следующем образом: для бикомпакта *X* пространство $F_k(X)$ есть образ отображения $\pi_{F,X,k}$, а для отображения $f : X \to Y$ отображение $F_k(f)$ есть сужение отображения $F(f)$ на $F_k(X)$. Из следующей легко проверяемой коммутативности диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} C(\{k\},X) \times F(\{k\}) & \xrightarrow{\bar{f} \times id} & C(\{k\},Y) \times F(\{k\}) \\ \pi_{F,X,k} \downarrow & & \downarrow \pi_{F,Y,k} \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \end{array},$$

где $\bar{f}(\zeta) = f \circ \zeta$, вытекает вложение $F(f)(F_k(X)) \subset F_k(Y)$ и, следовательно функториальность конструкции F_k. Функтор *F* называется функтором степени *n* обозначается через $\deg F = n$, если $F_n(X) = F(X)$ для всякого бикомпакта *X*, но $F_{n-1}(X) \neq F(X)$ для некоторого *X*. Для функтора *F* определен носитель элемента $a \in F(X)$, обозначаемый через $\mathrm{supp}_F(a)$, т.е. пересечение всех замкнутых множеств $A \subset X$, таких, что $a \in F(A)$.

Имеет место следующее

Предложение 2 [3]. Для функтора F и бикомпакта X имеем

$F_k(X)=\{a\in F(X):|\operatorname{supp}_F(a)|\le k\}$.

А.Ч. Чигогидзе [4] продолжил всякий мономорфный сохраняющий пересечения функтор $F:Comp\to Comp$ на категорию $Tych$ тихоновских пространств следующим образом: для тихоновского пространства X он положил

$F_\beta(X)=\{a\in F(\beta X):\operatorname{supp}_F(a)\subset X\}$.

Если $f:X\to Y$ непрерывное отображение тихоновских пространств и $\beta f:\beta X\to\beta Y$ – его (единственное) продолжение на их Стоун-Чеховские компактификации, то из $f(\operatorname{supp}_F(a))\supset\operatorname{supp}_F(F(f)(a))$ вытекает, что $F(\beta f)(F_\beta(X))\subset F_\beta(Y)$ и, следовательно, полагая $F_\beta(f)=F(\beta f)|_X$, получаем функториальность конструкции F_β.

Если $f:X\to Y$ непрерывное отображение, то из коммутативности диаграммы (1) для отображения βf, вытекает что $F(\beta f)(F_k(X))\subset F_k(Y)$. Следовательно, полагая $F_k(f)=F(\beta f)|_{F(X)}$, получаем отображение $F_k(f):F_k(X)\to F_k(Y)$. Таким образом, для любого $k\in N$ определен ковариантный функтор $F_k:Tych\to Tych$, который является продолжением функтора $F_k:Comp\to Comp$. Из предложения 2 вытекает

Предложение 3. Для функтора $F_k:Comp\to Comp$ функтор $F_k:Tych\to Tych$ является подфунктором функтора F_β. При этом,

$F_k(X)=F_\beta(X)\cap F_k(\beta X)$

для всякого тихоновского пространства X.

Функтор F нозовем конечно-открытым (соответственно конечно-замкнутым), если для натурального числа k множество $F_k(\{k+1\})$ было открыто (соответственно, замкнуто) в $F_k(\{k+1\})$. Очевидно, что примером конечно-открытых (соответственно конечно замкнутых) функторов являются финитные функторы, т.е. функторы F, для которых множество $F(\{k\})$ конечно для всякого натурального числа k.

Функтор F назовем проективно факторным, если для всякого тихоновского пространства X и всякого натурального числа k отображение

$\pi_{F,X,k}:C(\{k\},X)\times F(\{k\})\to F_k(X)$

факторно.

Обозначим через $\pi:Q\times Q\to Q$ отображение проектирования призведения двух гильбертовых кубов на один из сомножителей. В.В. Федорчук [5] показал, что если G-симметрическая степень SP_G^n сохраняет мягкость проектирования π, то функтор SP_G^n изоморфен Id^n.

Г. Савченко [6] доказал, что если F нормальный функтор конечной степени n, то F изоморфен функтору Id^n тогда и только тогда, когда отображение $F(\pi):F(Q\times Q)\to F(Q)$ 1-мягко. В случае конечно-открытых (конечно-замкнутых) функторов также имеет место

Теорема 1. Если F нормальный конечно открытый (конечно-замкнутый) функтор, то F изоморфен функтору Id^n тогда и только тогда, когда отображение $F(\pi):F(Q\times Q)\to F(Q)$ 1-мягко.

Используя технику доказательств этих результатов и применяя методы спектрального анализа можно показать, что

Теорема 2. Если конечно-открытый (конечно-замкнутый) нормальный функтор F конечной степени является мультипликатывным, то $F(I^{\aleph_1})$ не является абсолютным ретрактом.

Следствие. Для нормального конечно-открытого (конечно-замкнутого) функтора конечной степени равносильны следующие условия:

а) $F\left(I^{\aleph_1}\right)$ гомеоморфно $I^{\aleph_1}$;

б) функтор F мультипликативен.

Если рассмотреть проективно факторные функторы, будут ли верны приведенные результаты?

Например, пусть $f: X \to Y$ мягкое отображение, то отображение $F(f): F(X) \to F(Y)$ будет ли мягким?

Если $f: X \to Y$ открытое отображение между тихоновским пространствами, тогда будет ли отображение $F_k(f): F_k(X) \to F_k(Y)$ открытым?

Когда рассматриваем конечно-открытые (конечно-замкнутые) функторы, определение множества $F_k(\{k+1\})$ должно быть открытым (замкнутым) множеством в топологии пространства $F(\{k+1\})$. В некоторых случаях множество бывает $F_k(\{k+1\})$ связным или локально связным множеством. Иногда множество $F_k(\{k+1\})$ есть $A(N)R$ пространство. Поэтому возникает естественный интерес к изучению топологических и геометрических свойств конечно-открытых (конечно-замкнутых), проективно факторных функторов в тех или иных категориях. Интересно было бы изучить и размерностные и шейповые свойства пространств при воздействии этих конечно-открытых (конечно-замкнутых), проективно факторных функторов.

Литература

1. *Щепин Е.В.* Функторы и несчетные степени компактов // УМН. – 1981. – Вып. 3 (36). – С. 3–62.
2. *Басманов В.Н.* Ковариантные функторы, ретракты и размерность// ДАН СССР. –1983. – V.271. – №5. – С. 1033–1036.
3. *Zhuraev T.F.* On projectively quolient functors // Comment. Math. Univ. Carolinal. – 2001. – V.42. – №3. – P. 561–573.
4. *Чигогидзе А.Ч.* О продолжении нормальных функторов // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. – 1984. – № 6. – P. 23–26.
5. *Федорчук В.В.* Некоторые функторы, ретракты и многообразия // IV Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. – Кишинев, 1979. – С. 148–150.
6. *Савченко А.Г.* Критерий изолярности функтора конечной степени степенному функтору // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. – 1989. – № 3. – P. 18–21.