

ОБЩИЙ ВИД ПОЛУАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА $C_b(X)$

Г.Ф. Джаббаров

Исследуется пространство полуаддитивных функционалов и получен общий вид полуаддитивных функционалов на $C_b(X)$.

Ключевые слова: линейный функционал; полуаддитивный функционал; пространство полуаддитивных функционалов.

Пусть X – тихоновское пространство. Через $C_b(X)$ обозначим пространство всех ограниченных непрерывных функций $f: X \rightarrow R$ с обычными (поточечными) операциями и суп-нормой, т.е. с нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in X\}$. Для каждого $c \in R$ через c_X обозначим постоянную функцию, определяемую по формуле $c_X(x) = c$, $x \in X$. Пусть $\phi, \psi \in C_b(X)$. Неравенство $\phi \leq \psi$ означает, что $\phi(x) \leq \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Следуя работам [1], [2] введем следующее

Определение 1. Функционал $\nu: C_b(X) \rightarrow R$ называется:

- 1) слабо аддитивным, если для всех $c \in R$ и $\phi \in C_b(X)$ выполняется равенство $\nu(\phi + c_X) = \nu(\phi) + c \cdot \nu(1_X)$;
- 2) сохраняющим порядок, если для функций $\phi, \psi \in C_b(X)$ из $\phi \leq \psi$ вытекает $\nu(\phi) \leq \nu(\psi)$;
- 3) нормированным, если $\nu(1_X) = 1$;
- 4) положительно-однородным, если $\nu(\lambda \phi) = \lambda \nu(\phi)$ для всех $\phi \in C_b(X)$, $\lambda \in R_+$, где $R_+ = [0, +\infty)$;
- 5) полуаддитивным, если $\nu(f + g) \leq \nu(f) + \nu(g)$ для всех $f, g \in C_b(X)$.

Для компакта X через $O \circ \beta(X)$ обозначается [2] множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Элементы множества $O \circ \beta(X)$, для краткости, называют слабо аддитивными функционалами. Через $OH \circ \beta(X)$ обозначим множество всех положи-

тельно-однородных функционалов из $O \circ \beta(X)$, а через $OS \circ \beta(X)$ – всех полуаддитивных функционалов из $OH \circ \beta(X)$. Эти множества снабжаются топологией поточечной сходимости. Базу окрестностей функционала $\mu \in O \circ \beta(X)$ образуют множества вида

$$\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_k; \varepsilon \rangle = \{ \nu \in O \circ \beta(X) : |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, k \}.$$

В пространствах $OH \circ \beta(X)$ и $OS \circ \beta(X)$ рассматривается индуцированная топология из $O \circ \beta(X)$.

Далее мы получим общий вид слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, положительно-однородных и полуаддитивных функционалов на $C_b(X)$.

Легко доказывается следующее

Предложение 1. Для любого тихоновского пространства X пространства $OH \circ \beta(X)$ и $OS \circ \beta(X)$ являются выпуклыми компактами.

Пусть A – непустое подмножество пространства $P \circ \beta(X)$ положительных, нормированных линейных функционалов на $C_b(X)$ и $f \in C_b(X)$. Тогда $|\mu(f)| \leq \|f\|$ для любого $\mu \in A$, и поэтому множество $\{\mu(f) : \mu \in A\}$ ограничено сверху. Следовательно, для любого $f \in C_b(X)$ существует число

$$v_A(f) = \sup \{ \mu(f) : \mu \in A \}. \quad (1)$$

Предложение 2. Пусть A – непустое подмножество пространства $P \circ \beta(X)$. Тогда

а) функционал $v_A : C_b(X) \rightarrow R$ принадлежит $OS \circ \beta(X)$;

б) $v_A = v_{co(A)}$, где $co(A)$ – выпуклая оболочка A ;

в) $v_A = v_{cl(A)}$, где $cl(A)$ – замыкание A ;

г) $v_A = v_{cl(co(A))}$.

Доказательство. а) 1. Пусть $f \in C_b(X)$ и $c \in R$. Имеем

$$\begin{aligned} v_A(f + c_X) &= \sup \{ \mu(f + c_X) : \mu \in A \} = \sup \{ \mu(f) + c : \mu \in A \} = \\ &= \sup \{ \mu(f) : \mu \in A \} + c = v_A(f) + c. \end{aligned}$$

2. Возьмем $f, g \in C_b(X)$ такие, что $f \leq g$. Тогда

$$v_A(f) = \sup \{ \mu(f) : \mu \in A \} \leq \sup \{ \mu(g) : \mu \in A \} = v_A(g).$$

3. $v_A(1_X) = \sup \{ \mu(1_X) : \mu \in A \} = \sup \{ 1 : \mu \in A \} = 1$.

4. Пусть $f \in C_b(X)$ и $t \in R_+$. Тогда

$$v_A(tf) = \sup \{ \mu(tf) : \mu \in A \} = \sup \{ t\mu(f) : \mu \in A \} = t \sup \{ \mu(f) : \mu \in A \} = tv_A(f)$$

5. Пусть $f, g \in C_b(X)$. Тогда

$$\begin{aligned} v_A(f + g) &= \sup \{ \mu(f + g) : \mu \in A \} = \sup \{ \mu(f) + \mu(g) : \mu \in A \} \leq \\ &\leq \sup \{ \mu(f) : \mu \in A \} + \sup \{ \mu(g) : \mu \in A \} = v_A(f) + v_A(g). \end{aligned}$$

Таким образом, $v_A \in OS \circ \beta(X)$.

б) Поскольку $A \subset co(A)$, то $v_A(f) \leq v_{co(A)}(f)$ для любого $f \in C_b(X)$. Покажем, что $v_A(f) \geq v_{co(A)}(f)$ для любого $f \in C_b(X)$.

Пусть $f \in C_b(X)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\mu_\varepsilon \in co(A)$ такое, что $\mu_\varepsilon(f) \geq v_{co(A)}(f) - \varepsilon$. Так как $\mu_\varepsilon \in co(A)$, то μ_ε имеет вид $\sum_{k=1}^n t_k \mu_k$, где $\mu_k \in A$, $t_k \geq 0$, $k = \overline{1, n}$, $\sum_{k=1}^n t_k = 1$. Поскольку $\mu_k(f) \leq v_A(f)$, то

$$\mu_{co(A)}(f) - \varepsilon \leq \mu_\varepsilon(f) = \sum_{k=1}^n t_k \mu_k \leq \sum_{k=1}^n t_k v_A(f) = v_A(f),$$

т.е. $v_{co(A)}(f) - \varepsilon \leq v_A(f)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим, что $v_{co(A)}(f) \leq v_A(f)$, т.е. $v_A(f) = v_{co(A)}(f)$.

в) Так как $A \subset cl(A)$, то $v_A(f) \leq v_{cl(A)}(f)$ для любого $f \in C_b(X)$. Покажем, что $v_A(f) \geq v_{cl(A)}(f)$ для любого $f \in C_b(X)$.

Возьмём $f \in C_b(X)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\mu_\varepsilon \in cl(A)$ такое, что $\mu_\varepsilon(f) \geq v_{cl(A)}(f) - \varepsilon$. Так как $\mu_\varepsilon \in cl(A)$, то существует $\mu_0 \in A$ такое, что $|\mu_\varepsilon(f) - \mu_0(f)| < \varepsilon$. Следовательно,

$$v_{cl(A)}(f) - \varepsilon \leq \mu_\varepsilon(f) < \mu_0(f) + \varepsilon \leq v_A(f) + \varepsilon,$$

т.е. $v_{cl(A)}(f) - 2\varepsilon < v_A(f)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем, что $v_{cl(A)}(f) \leq v_A(f)$, т.е. $v_A(f) = v_{cl(A)}(f)$.

г) Непосредственно следует из б) и в). Предложение 2 доказано.

Следующий результат показывает, что формула (1) дает общий вид функционалов из $OS \circ \beta(X)$.

Теорема 1. Для всякого $\nu \in OS \circ \beta(X)$ существует непустой выпуклый компакт A в $P \circ \beta(X)$ такой, что $\nu = \nu_A$, где ν_A функционал вида (1), при этом для каждого $f \in C_b(X)$ существует $\mu \in A$ такое, что $\nu(f) = \mu(f)$.

Следующий результат показывает, что соответствие $A \leftrightarrow \nu_A$, где A – непустой выпуклый компакт в $P \circ \beta(X)$ задает взаимно однозначное отображение между множеством $OS \circ \beta(X)$ и выпуклыми компактными подмножествами $P \circ \beta(X)$.

Теорема 2. Если A и B – непустые выпуклые компакты в $P \circ \beta(X)$, то $\nu_A = \nu_B$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

Литература

1. Davletov D. E., Djabbarov G. F. Functor of semiadditive functionals //Methods of Functional Analysis and Topology. – 2008. – V. 14. – №4. – P. 314–322.
2. Zaitov A. A. On categorical properties of order-preserving functionals //Methods of Functional Analysis and Topology. – 2003. – V. 9. – №4. – P. 357–364.
3. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.