УДК 539.3.01 (575.2) (04)

ОБРАТНЫЕ СПЕКТРЫ $AR(\mathscr{M})$-ПРОСТРАНСТВ

М. Мадиримов, А.А. Заитов

В работе устанавливается, что предел обратной последовательности с некоторыми условиями является $AR(\mathscr{M})$-пространством тогда и только тогда, когда обратная последовательность состоит лишь из $AR(\mathscr{M})$-пространств.

Ключевые слова: топологическая группа; абсолютный ретракт.

Понятие топологической группы возникло в математике в результате исследований групп непрерывных преобразований. Позже выяснилось, что для решения возникающих проблем при изучении топологических групп нет необходимости ограничиваться лишь непрерывными преобразованиями. Аксиоматике и изучению топологических групп посвящено огромное количество работ, в частности, обстоятельная работа [1] в достаточной мере освещает свойства этого объекта. В работе [2] значительно продвинута теория топологических групп в направлении размерности и ретракции топологических групп преобразований. Работа [3] стала новым толчком в исследовании теории топологических групп и привела к появлению теории равномерных групп. Приведем некоторые результаты, касающиеся топологических групп.

Пусть Y – подпространство пространства X. Y называется ретрактом X, если существует непрерывное отображение $f : X \to Y$ такое, что $f(x) = x$ для всякой $x \in Y$. Пространство X называется абсолютным ретрактом для метризуемых пространств или $AR(\mathscr{M})$-пространством, если X метризуемо и для всякого гомеоморфизма h, отображающего X на замкнутое подмножество $h(X)$ метризуемого пространства Y, множество $h(X)$ является ретрактом Y.

Пусть G – компактная группа. Класс всех G-пространств, и класс всех их эквивариантных отображений составляют категорию, которая обозначается через $KatG$. Пусть $K(G)$ – какой-нибудь класс объектов категории $KatG$. Напомним, что объект $Y \in K(G)$ называется [2: 33] ретрактом класса $K(G)$, если для всякого эквивариантного вложения $i : Y \to X$ во всякий объект $X \in K(G)$ существует эквивариантная ретракция $r_X : X \to i(Y)$. Пространство X называется абсолютным ретрактом для метризуемых G-пространств или $AR(\mathcal{M}G)$-пространством, если X одновременно является $AR(\mathcal{M})$-пространством и ретрактом класса $KatG$.

Пусть G – компактная группа, $S = \{X_n, p_n^m; \omega\}$ – обратная последовательность G-пространств. В пределе $\lim S$ группа G действует покоординатно, т.е. $g\left(\left(x_n\right)_{n\in\omega}\right) = \left(g\left(x_n\right)\right)_{n\in\omega}$ для всех нитей $\left(x_n\right)_{n\in\omega} \in \lim S$ и элементов $g \in G$. Если все пространства X_n, $n \in \omega$, – метризуемые пространства, то предел $\lim S$ также является метризуемым пространством, и при этом, если действие группы G в каждом X_n изометрично, то группа G действует в пределе $\lim S$ изометрично.

Напомним, что непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется [5, стр. 9] r-отображением, если существует непрерывное отображение $g : Y \to X$, являющееся правым обратным для f, т. е. $fg : Y \to Y$ – тождественное отображение.

Пусть G – топологическая группа, $f : X \to Y$ – отображение G-пространств. Если для каждого действия $g \in G$ и для всех $x \in X$ выполняется равенство $f\left(g(x)\right) = g\left(f(x)\right)$, то f называется [2: 12] эквивариантным отображением.

В [4] и [5]можно найти следующие определения.

Пусть $S = \{X_n, p_n^m; \omega\}$ – обратная последовательность метризуемых G-пространств, обладающая свойствами:

1) каждое проектирование $p_m : \lim S \to X_m$ является r-отображением;

2) $\lim S$ является r-образом произведения $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

При выполнении этих двух условий справедлива следующая

Теорема 1. Предел $\lim S$ обратной последовательности $S = \{X_n, p_n^m; \omega\}$ является $AR(\mathcal{M}G)$-пространством тогда и только тогда, когда каждый X_n есть $AR(\mathcal{M}G)$-пространство.

Отметим, что условие 1) существенно.

Пример 1. Рассмотрим последовательность множеств $N_1 = \{1, 2, 3, ...\}$, $N_2 = \{2, 3, 4, ...\}$, …, $N_n = \{n, n+1, ...\}$, …, с проекциями $p_i^j : X_j \to X_i$, $p_i^j(n) = n$, $j \geq i$. Ясно, что $\lim S = \varnothing$.

Замечание 1. Из примера 1 вытекает, что теорема Куроша [4, стр. 70], согласно которой предел обратного спектра из непустых компактов непуст и улучшать его нельзя, т.е. его нельзя обобщить даже для класса локально компактных метризуемых пространств.

Покажем, что условие 2) также существенно.

Пример 2. Рассмотрим обратную последовательность $S = \{X_n, p_n^m; \omega\}$, где $X_n = [0, 1]$ для всех n. А проекции определены следующим образом: $p_1^1 = id_{[0,1]}$, и $p_1^n\left(\sqrt{t}\right) = p_1^n\left(t^2\right) = t$, $p_n^m = id_{[0,1]}$ для всех $m \geq n > 1$. Тогда $\lim S$ не является r-образом произведения $[0, 1]^{\omega}$.

Теперь доказательство теоремы 1 вытекает из теоремы 1 [2: 114] и следствия 1 [2: 111].

Литература

1. *Понтрягин Л. С*. Непрерывные группы. – М.: Наука, 1973. – 520 с.
2. *Мадиримов М. М*. Размерность и ретракции в теории топологических групп преобразований. – Ташкент: Фан, 1986. – 144 с.
3. *Borubaev A.A., Pankov P.S., Chekeev A.A*. Spaces uniformed by coverings. – Budapest. Korrekt Nyomdaipari Kft., 2003. – 170 p.
4. *Федорчук В.В., Филиппов В.В*. Общая топология. Основные конструкции. – М.: МГУ, 1988. – 288 с.
5. *Борсук К.* Теория ретрактов. – М.: Мир, 1971. – 292 с.