УДК 515.12 (575.2) (04)

РЕШЕТКА РАВНОМЕРНЫХ СТРУКТУР

А.А. Борубаев, Б.Э. Канетов

Исследованы некоторые вопросы теории решеток равномерных структур и доказаны несколько теорем.

Ключевые слова: теория решеток; равномерная структура; Тихоноские пространства.

В данной статье все пространства предполагаются тихоновскими, их отображения – непрерывными.

Через $U(X)$ ($U_p(X)$) обозначим множество всех равномерностей (предкомпактных равномерностей) пространства *X*. $U(X)$ ($U_p(X)$) естественным образом является частично упорядоченным множеством. Через $K(X)$ обозначим множество всех бикомпактных расширений пространства *X*. $K(X)$ частично упорядочено. $b_2X \leq b_1X$ тогда и только тогда, когда существует такое непрерывное отображение $f: b_1X \to b_2X$, что $fx = x$ для любого $x \in X$.

Частично упорядоченное множество $U(X)$ всех равномерностей пространства *X* называется решеткой, если всякое его двухэлементное подмножество $\{U_1, U_2\}$, $U_1, U_2 \in U(X)$ имеет как точную верхнюю, так и точную нижнюю грань, т.е. $\sup\{U_1, U_2\}$ и $\inf\{U_1, U_2\}$. Также множество $K(X)$ всех бикомпактных расширений пространства *X* называется решеткой, если всякое его двухэлементное подмножество $\{b_1X, b_2X\}$, $b_1X, b_2X \in K(X)$ имеет $\sup\{b_1X, b_2X\}$ и $\inf\{b_1X, b_2X\}$. Множество называется полной решеткой, если всякое его подмножество имеет точную верхнюю и точную нижнюю грань.

А.А. Борубаевым (см. [1: 12], или [2]) была поставлена проблема: найти необходимые и достаточные условия, налагаемые на пространства *X*, чтобы $U(X)$ было решеткой. В работе даются частичные решения этой проблемы.

Известно, что между множествами $K(X)$ и $U_p(X)$ существует естественный изоморфизм. Американский математик П. Самюэл [3] показал, что слабейшая равномерность на тихоновском пространстве *X* существует в том и только том случае, если пространство *X* локально компактно. Японский математик Т. Широта [4] доказал, что множество $U_p(X)$ является полной решеткой тогда и только тогда, когда *X* локально бикомпактно. Затем немецкие математики Ю. Вислисени и Ю. Флаксмайер [5] доказали, что для всякого тихоновского пространства *X* с первой аксиомой счетности множество $K(X)$ является решеткой тогда и только тогда, когда *X* локально бикомпактно. Здесь предположение о первой аксиоме счетности существенно. Теорема Ю. Вислисени и Ю. Флаксмайера является усилением нетривиальной половины теоремы Т. Широта на случай пространства с первой аксиомой счетности. Они показали, что свойство локальной бикомпактности не является необходимым. Следует отметить, что в доказательстве теоремы существенную роль играет лемма, утверждающая, что если некоторая последовательность точек множества $\beta X \setminus X$ сходится к некоторой точке из *X*, то у пространства *X* есть бикомпактные расширения b_1X и b_2X, для которых не существует бикомпактное расширение bX, удовлетворяющее неравенствам $bX \le b_1X$ и $bX \le b_2X$.

Напомним, что секвенциально замкнутыми называются множества, которые совпадают со своим секвенциальным замыканием, а секвенциально открытыми множествами являются дополнения секвенциально замкнутого множества.

Пусть βX Стоун-Чеховское расширение пространства *X*, а $\beta X \setminus X$ его нарост. Под наростом будем понимать дополнение данного пространства *X* до его расширения βX.

Теорема 1. Для того чтобы $K(X)$ было решеткой необходимо, чтобы *X* было секвенциально открытым в βX и достаточно, чтобы *X* было секвенциально открытым в βX и $\beta X \setminus X$ было пространством Фреше-Урысона.

Доказательство. Необходимость. Пусть множество $K(X)$ является решеткой. Тогда из леммы 2 работы [2] следует, что каждая последовательность $\{x_n\} \subset \beta X \setminus X$ не сходится ни к какому $x \in X$, т.е. не существует последовательность $\{x_n\} \subset \beta X \setminus X$, сходящаяся к элементу пространства *X*. Следовательно, $\beta X \setminus X$ секвенциально замкнуто в βX, т.е. *X* секвенциально открыто в βX.

Достаточность. Предположим, что *X* является секвенциально открытым в βX и Стоун-Чеховский нарост $\beta X \setminus X$ является пространством Фреше-Урысона. Пусть $b_1X, b_2X \in K(X)$ два бикомпактных расширения пространства *X*. Существование точной верхней грани бикомпактных расширений b_1X и b_2X легко следует из теоремы 3.5.9. (см. [8: 260]). Покажем, что b_1X и b_2X имеют точную нижнюю грань. Пусть $f_1 : \beta X \to b_1X$ и $f_2 : \beta X \to b_2X$ естественные отображения. Положим $D_1 = \left\{f_1^{-1}(x) : x \in b_1X \setminus X\right\}$, $D_2 = \left\{f_2^{-1}(x) : x \in b_2X \setminus X\right\}$. Через A_1 (соответственно A_2) обозначим объединения тех элементов D_1 (соответственно D_2), которые состоят из более одного элемента, т.е. $A_1 = \cup\left\{f_1^{-1}(x) \in D_1 : \left|f_1^{-1}(x)\right| > 1\right\}$, $A_2 = \cup\left\{f_2^{-1}(x) \in D_2 : \left|f_2^{-1}(x)\right| > 1\right\}$. Заметим, что $\left[A_1\right]_{\beta X} \subset \beta X \setminus X$ и $\left[A_2\right]_{\beta X} \subset \beta X \setminus X$, иначе в силу того, что пространство *X* секвенциально открыто в βX и пространство $\beta X \setminus X$ является пространством Фреше-Урысона нашлась бы последовательность $\{x_n\}$ элементов множества $A_1 \subset \beta X \setminus X$ или $A_2 \subset \beta X \setminus X$, сходящаяся к некоторой точке $x \in X$. Рассмотрим разбиение *D* пространства βX, единственным неодноточечным элементом которого является множество $\left[A_1\right]_{\beta X} \cup \left[A_2\right]_{\beta X}$. Пространство этого разбиения можно рассматривать как бикомпактное расширение bX пространства *X*. Ясно, что оба семейства D_1 и D_2 вписаны в семейство *D*. Тогда (см. [2: 467]) $bX \le b_1X$ и $bX \le b_2X$. Следовательно, bX точная нижняя грань произвольно выбранных бикомпактных расширений b_1X и b_2X. Значит, $K(X)$ – решетка.

В силу естественного изоморфизма между множествами $U_p(X)$ и $K(X)$, в этой теореме $K(X)$ можно заменить на $U_p(X)$.

Теперь укажем одно достаточное условие, при котором $U(X)$ является решеткой.

Пусть *U* и *V* произвольные равномерности из $U(X)$. Пусть для любых $N \in U$, $M \in V$ существуют $N_1 \in U$ и $M_1 \in V$ такие, что

$$N_1 \circ M_1 \subset N \cup M \text{ и } M_1 \circ N_1 \subset N \cup M \qquad (1)$$

Теорема 2. Если для любых $U, V \in U(X)$ выполнено условие (1), то $U(X)$ является решеткой.

Доказательство. Известно, что (см. [1: 23]) любое подмножество $U(X)$ имеет точную верхнюю грань. Пусть для любых $N \in U$, $M \in V$ существуют $N_1 \in U$ и $M_1 \in V$ такие, что выполнено условие (1). Положим $\Sigma = \{N \cup M : N \in U, M \in V\}$ и докажем, что система образует базу некоторой равномерности *W* на *X*. Ясно, что Σ не пуста. Пусть $R \in \Sigma$, $R = N \cup M$, $N \in U$, $M \in V$. Тогда $N \supset \Delta$ и $M \supset \Delta$, т.е. $N \cup M \supset \Delta$. Следовательно, $R \supset \Delta$. Пусть $R_1, R_2 \in \Sigma$, $R_1 = N_1 \cup M_1$, $R_2 = N_2 \cup M_2$, $N_1, N_2 \in U$, $M_1, M_2 \in V$. Тогда $R_1 \cap R_2 = (N_1 \cup M_1) \cap (N_2 \cup M_2) = (N_1 \cap N_2) \cup (M_1 \cap M_2) = N \cup M = R$. Так как $N_1 \cap N_2 = N \in U$, $M_1 \cap M_2 = M \in V$, то из определения системы Σ следует, что $R_1 \cap R_2 = R \in \Sigma$. Пусть $R \in \Sigma$, $R = N \cup M$, $N \in U$, $M \in V$. Тогда существуют $N_1 \in U$, $M_1 \in V$ такие, что $N_1 \circ M_1 \subset N \cup M$ и $M_1 \circ N_1 \subset N \cup M$, откуда следует, что $M_1^{-1} \cup N_1^{-1} \subset M_1^{-1} \circ N_1^{-1} = (N_1 \circ M_1)^{-1} \subset (N \cup M)^{-1}$ и $M_1^{-1} \cup N_1^{-1} \in \Sigma$. Теперь, пусть $R \in \Sigma$, $R = N \cup M$, $N \in U$, $M \in V$. Тогда существуют $N_1, N_2 \in U$ и $M_1, M_2 \in V$ такие, что $N_1 \subset N_2$, $M_1 \subset M_2$, $N_2 \circ N_2 \subset N$, $M_2 \circ M_2 \subset M$ и $N_1 \circ M_1 \subset N_2 \cup M_2$, $M_1 \circ N_1 \subset N_2 \cup M_2$. Покажем, что $(N_1 \cup M_1) \circ (N_1 \cup M_1) \subset (N_2 \circ N_2) \cup (M_2 \circ M_2) \subset R$. Пусть $(x, y) \in (N_1 \cup M_1) \circ (N_1 \cup M_1)$. Тогда для некоторого $z \in X$ $(x, z) \in N_1 \cup M_1$ и $(z, y) \in N_1 \cup M_1$. Следовательно, $(x, z) \in N_1$ или $(x, z) \in M_1$, также $(z, y) \in N_1$ или $(z, y) \in M_1$. Пусть $(x, z) \in N_1$ и $(z, y) \in N_1$. Тогда $(x, y) \in N_1 \circ N_1$. Так как $N_1 \subset N_2$, то $(x, y) \in N_2 \circ N_2$, т.е. $(x, y) \in (N_2 \circ N_2) \cup (M_2 \circ M_2)$. Пусть $(x, z) \in M_1$ и $(z, y) \in N_1$. Тогда $(x, y) \in N_1 \circ M_1$ или $(x, y) \in N_2 \circ M_2$, т.е. $(x, y) \in (N_2 \circ N_2) \cup (M_2 \circ M_2)$. Если предположим, что $(x, z) \in N_1$ и $(z, y) \in M_1$, то $(x, y) \in M_1 \circ N_1$. Таким образом $(x, y) \in (N_2 \circ N_2) \cup (M_2 \circ M_2)$. Можно легко показать, что если $(x, z) \in M_1$ и $(z, y) \in M_1$, то $(x, y) \in (N_2 \circ N_2) \cup (M_2 \circ M_2)$. Тем самым доказана справедливость $(N_1 \cup M_1) \circ (N_1 \cup M_1) \subset (N_2 \circ N_2) \cup (M_2 \circ M_2) \subset N \cup M$. Значит, Σ образует базу некоторой равномерности *W*.

Пусть τ_1, τ_2 и τ_3 топологии, порожденные равномерностями *U*, *V* и *W*, соответственно [8]. Докажем, что топология τ_3 совпадает с топологией τ пространства *X*. По условию $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Пусть $A \in \tau_3$ и x произвольный элемент множества *A*. Найдется $R \in W$ такое, что $W[x] \subset A$. Тогда $N[x] \subset A$ и $M[x] \subset A$. Отсюда следует, что $A \in \tau$. Обратно, пусть $B \in \tau$ и $x \in B$. Тогда существуют $N \in U$, $M \in V$ такие, что $N[x] \subset B$ и $M[x] \subset B$. Ясно, что $(N \cup M)[x] \subset B$ и $R \in U$, $R = N \cup M$. Следовательно, $B \in \tau_3$.

Литература

1. *Борубаев А.А., Панков П.С.* Итоги и перспективы развития топологических исследований в Кыргызстане // Проблемы математики и информатики в XXI веке: Тр. междунар. научн. конф. // Вестн. КГНУ. Сер. 3. Естеств.-техн. науки. – Вып. 4. Матем. науки. Информатика и информационные технологии. – 2000. – С. 11–14.
2. *Борубаев А.А., Чекеев А.А.* Нерешенные вопросы общей топологии и топологической алгебры. – Фрунзе: Кирг. гос. ун-т., 1989. – 12 с.
3. *Samuel P.* Ultrafilters and compactifications of uniform spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – V. 64. – P. 100–132.
4. *Shirota T.* On systems of structures of a completely regular space // Osaka Math. J. – 1950. – V. 2. – P. 131–143.
5. *Вислисени Ю., Флаксмайер Ю.* Мощность и строение структуры всех бикомпактных расширений вполне регулярного пространства // ДАН СССР. – 1965. – Т. 165. – №2. – С. 258–260.
6. *Борубаев А.А.* К теории бикомпактных расширений // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1989. – Т. 133. – №2. – С. 465–468.
7. *Борубаев А.А.* Равномерные пространства. – Фрунзе: КГУ, 1987. – 76 с.
8. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 751 с.