УДК 515 (575.2) (04)

ОБРАЗОВАНИЕ КРИВОЙ ЛИНИИ КАК ОГИБАЮЩЕЙ СЕМЕЙСТВА ОКРУЖНОСТЕЙ-ОБРАЗОВ В КРУГОВОМ КОРРЕЛЯТИВНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ

У.Т. Карымсаков

Предлагаемый способ позволяет автоматизировать процесс моделирования различных кривых линий, которые можно использовать в проектировании объектов со сложными криволинейными формами.

Ключевые слова: геометрическое моделирование; автоматическое воспроизведение; уравнения; формулы; применение в проектировании.

В строительстве и архитектуре очень часто применяются различные изделия со сложными криволинейными формами и рельефами. При осуществлении сложных проектов особое значение имеет моделирование кривых линий по наперед заданным геометрическим параметрам как семейство сечений технической формы. Огромные возможности для получения многих кривых линий дают также геометрические преобразования как аффинные, кремоновые, (2-2)-значные, коррелятивные и др. [1–4]. Одним из таких преобразований является круговое коррелятивное преобразование (ККП) [5], которое позволяет получить различные кривые линии для различного использования в науке и технике.

Настоящая статья посвящена геометрическому моделированию и автоматизированному воспроизведению кривых линий посредством круговых коррелятивных преобразований.

В общем случае ККП задается уравнениями вида:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{o} = f(x, y) \\ &\overline{o} = \mathrm{j}\ (x, y) \\ &\overline{R} = \mathrm{y}\ (x, y) \\ &(\overline{X} - \overline{x})^2 + (\overline{Y} - \overline{y})^2 = \overline{R}^{\,2} \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где x, y – координаты точки – прообраза в плоскости; $\overline{o}, \overline{o}$ – координаты центра окружности –

образа в плоскости $\bar{\Pi}$; $\bar{R}$ – радиус окружности – образа в плоскости $\bar{\Pi}$; $\bar{X}$, $\bar{Y}$ – координаты точек окружности – образа в плоскости $\bar{\Pi}$; f, φ, ψ – непрерывные алгебраические функции.

В преобразовании ККП уравнение (1), точка *A* плоскости *П* приводит в соответствие окружность $\bar{a}$ с радиусом $\bar{R}_A$ плоскости $\bar{\Pi}$ (рис. 1). Если точки-прообразы в плоскости *П* изменяются непрерывно по некоторой закономерной линии $\omega(x,y)=0$, то образы-окружности в плоскости $\bar{\Pi}$ образуют семейство окружностей, уравнение которого имеет вид:

$$(\bar{X} - f(x,y))^2 + (\bar{Y} - \varphi(x,y))^2 = \psi(x,y)^2. \qquad (2)$$

Это семейство имеет огибающую кривую линию, которая в каждой своей точке касается окружности-образа семейства и каждого куска которой касается бесчисленное множество различных по радиусу окружностей-образов семейства [6].

Исследование свойств круговых коррелятивных преобразований показало, что при различных видах и способах задания, а также его начальных условий можно получить различные интересные огибающие кривые линии. Некоторые из этих кривых могут быть использованы при решении различных инженерных задач геометрического характера (рис. 1).

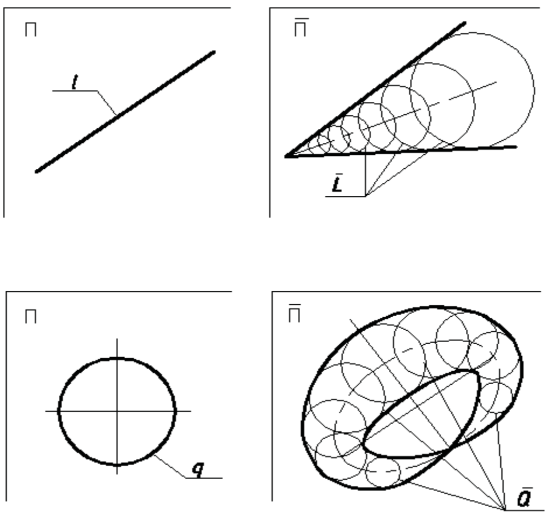

Рис. 1.

Для того чтобы использовать огибающую кривую, полученную посредством кругового коррелятивного преобразования при решении той или иной задачи в прикладной геометрии, важно найти уравнение этой огибающей кривой или разработать способ ее построения.

Пусть будет задано однопараметрическое семейство кривых:

$$F(x,y,\alpha)=0, \qquad (3)$$

где α– переменная (параметр), изменяющаяся в некоторых пределах (в частности от $-\infty$ до $+\infty$) [6].

Если функция $F(x,y,\alpha)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам, то семейство (3) имеет огибающую, уравнение которой получается после исключения параметра α из двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} &F(x,y,\alpha)=0,\\ &\frac{\partial F}{\partial \alpha}(x,y,\alpha)=0 \end{aligned}\right\}, \qquad (4)$$

где $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ – первая производная от уравнения (3) по параметру α.

Таким образом, для определения уравнения огибающей семейства кривых $F(x,y,\alpha)$ достаточно продифференцировать уравнение семейства по α, затем исключить параметр α из уравнения семейства кривых $F(x,y,\alpha)$ и полученного уравнения $\frac{\partial F}{\partial \alpha}(x,y,\alpha)=0.$

Пусть будет задано круговое коррелятивное преобразование уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x} = x,\\ &\bar{y} = y,\\ &\bar{R} = a_1 x + a_2 y + a_3,\\ &(\bar{X}-\bar{x})^2 + (\bar{Y}-\bar{y})^2 = \bar{R}^2 \end{aligned}\right\}, \qquad (5)$$

где a_1, a_2, a_3 – постоянные коэффициенты.

Требуется построить огибающие кривые семейства окружностей, уравнением которого является последнее уравнение системы (5). Для этого уравнение (5) нужно привести к однопараметрическому виду.

Известно, что каждая точка огибающей семейства кривых $F(x,y,\alpha)=0$, где α – переменный параметр, при некотором значении α должна удовлетворять системе уравнений (4).

В нашем случае система уравнений (5) может иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &(\bar{X}-\bar{x})^2 + (\bar{Y}-\bar{y})^2 = \bar{R}^2,\\ &\frac{\partial F}{\partial a}(X,Y,x)=0 \end{aligned}\right\}, \qquad (6)$$

где x – переменный параметр; $\bar{X}, \bar{Y}$ – координаты точек искомой огибающей кривой $\bar{l}$.

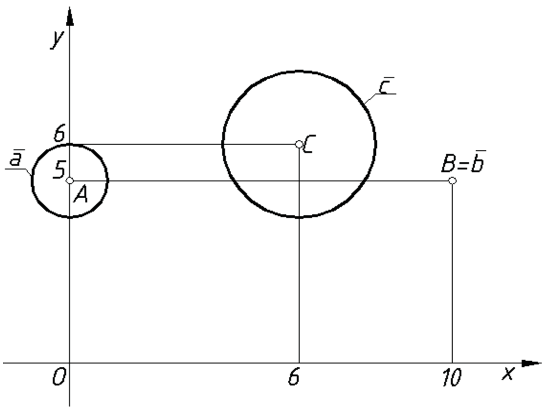

Рис. 2

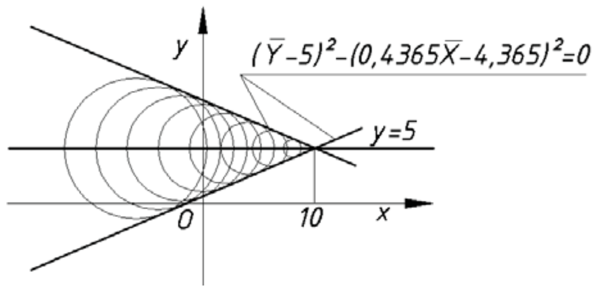

Рис. 3

С учетом того, что y=ω(x) и $\overline{R} = a_1 x + a_2 x + a_3$ уравнение (6) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &(\overline{X}-\overline{x})^2 + (\overline{Y} - \mathrm{w}(x)\ ^2 - (a_1 x + a_2 \mathrm{w}(x) + a_3)^2 = 0, \\ &\overline{X} - x - (\overline{Y} - \mathrm{w}(x))(\mathrm{w}'(x) + (a_1 x + a_2 \mathrm{w}(x) + a_3)(a_1 + a_2 \mathrm{w}'(x)\ = 0 \end{aligned}\right\}, \quad (7)$$

где $\overline{X}, \overline{Y}$ – координаты точек огибающей кривой, x – переменный параметр, $a_1 \ldots\ a_3$ – постоянные коэффициенты.

Если из системы уравнений (7) исключить параметр x, то получим уравнение искомой огибающей кривой.

Пусть будут заданы три точки-прообразы A(0,5), B(10,5), C(6,6) и соответственные им окружности-образы $\overline{a} : \overline{X}^2 + (\overline{Y} - 5)^2 = 16$, $\overline{b} : (\overline{X} - 10)^2 + (\overline{Y} - 5)^2 = 0$, $\overline{c} : (\overline{X} - 6)^2 + (\overline{Y} - 6)^2 = 4$ (рис. 2).

Поскольку координаты точек-прообразов и центров окружностей-образов совпадают, то подставив заданные параметры в уравнение (5) и определим следующее преобразование:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{o} = \tilde{o} \\ &\overline{o} = \acute{o} \\ &\overline{R} = -0{,}4x + 0{,}4y + 2 \end{aligned}\right\}. \quad (8)$$

Зададим прямую y=5 и найдем уравнение огибающей семейства окружностей-образов, соответствующей заданной прямой.

Уравнение семейства окружностей-образов будет иметь вид:

$$F = (\overline{X} - x)^2 + (\overline{Y} - 5)^2 - (4 - 0{,}4x)^2 = 0\,. \quad (9)$$

Найдем первую производную от этого уравнения по x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\overline{X} + 0{,}84x + 0{,}16y + 0{,}8 = 0. \quad (10)$$

Исключив x из уравнений (9) и (10) получим уравнение огибающей данного семейства окружностей-образов:

$$-0{,}1905\overline{X}^2 + 3{,}81\overline{X} + (\overline{Y} - 5)^2 = 19{,}05. \quad (11)$$

Огибающая этого семейства распадается на две касательные прямые (рис. 3).

Предлагаемый способ позволяет автоматизировать процесс моделирования различных кривых линий, которые можно использовать в проектировании объектов со сложными криволинейными формами, отвечающих наперед заданным геометрическим параметрам.

Литература

1. *Четверухин Н.В.* Проективная геометрия. – М.: Просвещение, 1969 – 368 с.
2. *Федоров А.К.* Конструирование поверхностей с использованием коррелятивных соответствий высших порядков // Прикладная геометрия и инженерная графика: Сб. – Вып. 12. – Киев, 1971.
3. *Иванов Г.С.* Конструирование технических поверхностей. – М.,1987. – 192 с.
4. *Михайленко В.Е., Обухова В.С., Подгорный А.Л.* Формообразование оболочек в архитектуре. – Киев, 1972. – 205 с.
5. Геометрическое моделирование кривых линий посредством кругового коррелятивного преобразования // Поиск. – Алматы, 2001. – №2. – С. 212–216.
6. *Бермант А.Ф., Араманович И.Г.* Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1973.