

УДК 517.977.5:536.22
DOI: 10.36979/1694-500X-2026-26-8-4-13

УПРАВЛЕНИЕ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ПРИ РЕГУЛИРОВАНИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ ТЕПЛОВОГО ОБЪЕКТА

Ж.А. Алымбаева, Б.Ы. Аширбаев

Аннотация. Рассматривается задача управления с минимальной энергией при регулировании температурных режимов теплового объекта, когда нагревается жидкость. Модель объекта характеризуется интенсивным повышением температуры нагревателя, при этом изменения температуры корпуса считаются незначительными. В этом случае исходная система уравнений преобразуется к линейной системе дифференциальных уравнений с управлением. Алгоритм решений задачи построен с использованием методов операционного исчисления, теории оптимального управления и дифференциальных уравнений. В результате получены оптимальное управление нагреваемой жидкости, оптимальные траектории температур нагревателя и нагреваемой жидкости, которые обеспечивают минимальные затраты энергии. Полученные результаты работы в дальнейших исследованиях используются в случае, когда изменения температуры корпуса имеют определенные значения. Результаты работы также могут быть использованы при определении оптимального управления и оптимальной траектории регулирования температур при воздействиях возмущений и помех.

Ключевые слова: усредненные по объемам плотности; удельные теплоемкости; конвективный теплообмен; коэффициенты теплоотдачи; цифровое оптимальное управление; малый положительный параметр; малый период квантования.

ЖЫЛУУЛУК ОБЪЕКТИСИНИН ТЕМПЕРАТУРАЛЫК РЕЖИМДЕРИН ЖӨНГӨ САЛУУДА МИНИМАЛДУУ ЭНЕРГИЯ МЕНЕН БАШКАРУУ

Ж.А. Алымбаева, Б.Ы. Аширбаев

Аннотация. Макалада суюктукту ысытуу учурунда жылуулук объектисинин температуралык режимдерин жөнгө салууда минималдуу энергия менен башкаруу маселеси каралат. Объектин модели ысыткычтын температурасынын интенсивдүү жогорулашы менен мүнөздөлөт, ал эми корпустун температурасынын өзгөрүшү анчалык маанилүү эмес деп эсептелет. Бул учурда баштапкы теңдемелер системасы башкаруусу бар сызыктуу дифференциалдык теңдемелер системасына өзгөртүлөт. Маселени чечүү алгоритми операциялык эсептөө усулдары, оптималдуу башкаруу теориясы жана дифференциалдык теңдемелер аркылуу түзүлгөн. Натыйжада, энергиянын минималдуу чыгымдарын камсыз кылган ысытылып жаткан суюктукту оптималдуу башкаруу, ысыткычтын жана ысытылып жаткан суюктуктун температураларынын оптималдуу траекториялары алынган. Изилдөөнүн жыйынтыктары кийинки илимий иштерде корпустун температурасынын өзгөрүшү белгилүү бир маанилерге ээ болгон учур үчүн колдонулат. Ошондой эле, бул натыйжалар сырткы таасирлер жана тоскоолдуктар болгон шартта температураларды жөнгө салуунун оптималдуу башкаруусун жана оптималдуу траекториясын аныктоодо пайдаланылышы мүмкүн.

Түйүндүү сөздөр: көлөмдөр боюнча орточолоштурулган тыгыздыктар; салыштырмалуу жылуулук сыйымдуулуктары; конвективдик жылуулук алмашуу; жылуулук берүү коэффициенттери; санариптик оптималдуу башкаруу; кичине оң параметр; квантоонун кичине мезгили.

CONTROL WITH MINIMAL ENERGY WHEN REGULATING THE TEMPERATURE CONDITIONS OF A THERMAL OBJECT

Zh.A. Alymbaeva, B.Y. Ashirbaev

Abstract. The article addresses the problem of minimum-energy control in regulating the temperature conditions of a thermal object during liquid heating. The object's model is characterized by an intensive rise in the heater's temperature,

while the temperature changes in the casing are considered negligible. In this case, the original system of equations is transformed into a linear system of differential equations with control. The solution algorithm for the problem is built using methods of operational calculus, optimal control theory, and differential equations. As a result, the optimal control for the heated liquid, as well as the optimal temperature trajectories for the heater and the heated liquid, are obtained; these ensure minimal energy consumption. The results of the study will be used in further research when the temperature changes in the casing have certain values. The results can also be applied to determine the optimal control and optimal trajectory in temperature regulation under the influence of disturbances and noise.

Keywords: volume-averaged densities; specific heat capacities; convective heat transfer; heat transfer coefficients; digital optimal control; small positive parameter; small quantisation period.

Введение. Проблема управления тепловыми объектами (печами, теплообменниками, бытовыми и промышленными нагревательными установками, энергоустановками и др.) с минимальными энергозатратами сегодня является крайне актуальной по ряду причин:

1. Рост стоимости энергоресурсов. Энергия – одна из самых дорогих статей затрат в промышленности. Любое снижение расхода электричества, газа или топлива существенно уменьшает себестоимость продукции и повышает конкурентоспособность предприятия.

2. Переход к энергоэффективным и «зелёным» технологиям. Современные стандарты (ISO 50001 и др.) требуют:

- минимизации энергопотребления;
- сокращения выбросов CO₂;
- внедрения интеллектуальных систем регулирования температуры.

3. Сложность температурных процессов. Тепловые объекты обладают: инерционностью, нелинейностью, задержками во времени, влиянием внешних возмущений (температуры окружающей среды, нагрузок, свойств материалов).

4. Потребность в высокой точности температурного регулирования. В ряде отраслей точность температурного режима критична: металлургия, химическая промышленность, производство керамики и стекла, пищевые технологии, микроэлектроника. Отклонения температуры ухудшают качество продукции или выводят объект из строя. Минимизация энергии при сохранении точности – инженерная задача высокой сложности.

5. Внедрение интеллектуальных систем управления. Современные тренды включают использование: адаптивных регуляторов, предиктивного управления (MPC), нейросетевых и гибридных моделей, цифровых двойников. Все эти подходы позволяют снижать энергопотребление, но требуют тщательного анализа и оптимизации.

6. Развитие автономных и мобильных систем. Бытовые тепловые объекты (тепловые насосы, системы отопления, бойлеры) и промышленные устройства всё чаще работают автономно и под ограничениями по энергии. Минимизация расхода – обязательное условие их эффективного функционирования.

7. Экономическая эффективность. Правильно настроенная система управления может снизить энергозатраты на 15–40 %, что делает задачу особенно важной для предприятий с высокой теплоёмкостью процессов. В настоящее время в классической теории автоматического и оптимального управления заметно возрос интерес к задачам анализа и синтеза динамическими режимами технологических процессов тепловых объектов. Исследования задач энергосберегающего управления динамическими объектами рассмотрены в работах [1–3]. Известно большое число постановок задач оптимального управления с минимизируемыми функционалами, учитывающими затраты энергии, расход топлива и их комбинации с другими составляющими среди них можно выделить работы [4–7], такие постановки задач рассмотрены и в современных исследованиях [8–10]. Исследования теории задач энергосберегающего управления рассмотрены и в наших работах [11–13]. Однако исследования по теории энергосберегающего управления и теории задач анализа и синтеза динамическими режимами технологических процессов тепловых объектов далеки от своего завершения, в них еще много нерешенных проблем.

Постановка задачи. Множество тепловых объектов содержит три основные части: управляемый источник тепла нагреватель, нагреваемое тело и оболочка (корпус), отделившая тело от окружающей среды [2]. Для построения модели принимаются следующие допущения:

1) температуры частей объекта T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура нагреваемого тела, T_3 – температура корпуса, равны их средним по объемам значения;

2) для нагревателя и стенки корпуса используются усредненные по объемам плотности ρ_1, ρ_3 и удельные теплоемкости A_1, A_3 ;

3) температура внутренней поверхности корпуса равна температуре нагреваемого тела;

4) между частями объекта и внешней средой имеет место конвективный теплообмен.

При этих предположениях, если нагревается жидкость состояние объекта относительно температур может быть записано следующими балансно-кинетическими системами уравнений [2]:

$$\begin{aligned}\rho_1 c_1 V_1 \frac{dT_1}{dt} &= U(t) I(t) - \alpha_1 F_1 (T_1(t) - T_2(t)), \\ \rho_2 c_2 V_2 \frac{dT_2}{dt} &= \alpha_1 F_1 (T_1(t) - T_2(t)) - \alpha_3 F_3 (T_2(t) - T_3(t)), \\ \rho_3 c_3 V_3 \frac{dT_3}{dt} &= \alpha_3 F_3 (T_2(t) - T_3(t)) - \alpha_3' F_3' (T_3(t) - T_4(t)),\end{aligned}\quad (1)$$

где V_1, V_2, V_3 – объемы нагревателя, жидкости и корпуса;

F_1 – наружная поверхность нагревателя,

F_3, F_3' – внутренняя и наружные поверхности корпуса;

$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_3'$ – коэффициенты теплоотдачи нагревателя и стенок корпуса (изнутри и снаружи);

I, U – электрический ток и напряжение нагревателя;

T_4 – температура среды.

В данной работе рассмотрим состояния функционирования температур объекта, который характеризуется интенсивным повышением температуры нагревателя, при этом изменения температуры корпуса незначительны, $T_3(t) \approx 0$. В этом состоянии модель (1) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} &= \frac{1}{\rho_1 c_1 V_1} U(t) I(t) - \frac{\alpha_1 F_1}{\rho_2 c_2 V_2} T_1(t) + \frac{\alpha_1 F_1}{\rho_2 c_2 V_2} T_2(t), \\ \frac{dT_2}{dt} &= \frac{\alpha_1 F_1}{\rho_2 c_2 V_2} T_1(t) - \frac{\alpha_1 F_1 + \alpha_3 F_3}{\rho_2 c_2 V_2} T_2(t).\end{aligned}\quad (2)$$

Введем обозначения: $U(t) I(t) = u(t)$, тогда систему (2) перепишем в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dT_2}{dt} &= \frac{\alpha_1 F_1 + \alpha_3 F_3}{\rho_2 c_2 V_2} T_2(t) + \frac{\alpha_1 F_1}{\rho_2 c_2 V_2} T_1(t), \\ \frac{dT_1}{dt} &= \frac{\alpha_1 F_1}{\rho_1 c_1 V_1} T_2(t) + \frac{\alpha_1 F_1}{\rho_1 c_1 V_1} T_1(t) + \frac{1}{\rho_1 c_1 V_1} u(t).\end{aligned}\quad (3)$$

Выберем вектор состояния $y = (T_2 \ T_1)'$, где штрих обозначает транспонирование. Система (3) в этом случае имеет нормальный вид

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad (4)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, a_1 = -\frac{\alpha_1 F_1 + \alpha_3 F_3}{\rho_2 c_2 V_2}, a_2 = \frac{\alpha_1 F_1}{\rho_2 c_2 V_2},$$

$$a_3 = \frac{\alpha_1 F_1}{\rho_1 c_1 V_1}, a_4 = -\frac{\alpha_1 F_1}{\rho_1 c_1 V_1}, b_2 = \frac{1}{\rho_1 c_1 V_1}.$$

Для полной управляемости динамической системы (4) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости

$$Q = (B \ AB) \quad (5)$$

был равен порядку системы (4) [9], т. е., $\text{rang} Q = 2$.

Пусть качество процесса объекта (4) оценивается функционалом

$$J_- = \int_{t_0}^{t_1} u'(t) u(t), \quad (6)$$

где J_- – затраты энергии.

Решение задачи. Так как системы управления с цифровыми управляющими устройствами являются дискретными, в дальнейшем от непрерывной модели переходим к дискретной. Пусть в момент времени $t_k = kT$, где $k = 0, 1, \dots, M-1$, $M = \frac{1}{T}$, $T > 0$ – малый период квантования, вектор состояния равен $y(k)$. Тогда решение уравнение (4) при $kT \leq t \leq (k+1)T$ имеет вид

$$y(t) = e^{A(t-kT)} y(kT) + \int_{kT}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где $\Phi = e^{A(t-kT)}$ – переходная матрица однородного уравнения $\dot{y}(t) = Ay(t)$.

$$\text{Введем замены: } t = (k+1)T, \quad \tau = \sigma + kT. \quad (8)$$

С учетом замены (8) функционал (6) и уравнение (7) имеют вид

$$J(v) = \int_{k=0}^{M-1} v'(kT) v(kT), \quad (9)$$

$$y[(k+1)T] = e^{AT} y(kT) + \int_0^T e^{A(T-\sigma)} B d(kT + \sigma). \quad (10)$$

Будем считать, что на входе объекта используется фиксатор нулевого порядка, т. е. $u(t) = v(kT)$ при $kT \leq t \leq (k+1)T$. Тогда

$$y[(k+1)T] = \Phi y(kT) + \Psi v(kT), \quad (11)$$

где $\Phi = \Phi(T) = e^{AT}$, $\Psi = \int_0^T e^{A(T-\sigma)} B d\sigma$.

Переходную матрицу $\Phi = e^{AT}$ можно определить, используя формулу

$$\Phi = L^{-1} \left[(pE - A)^{-1} \right]_{t=kT},$$

где L – преобразование Лапласа [14]. Согласно этой формулы находим обратную матрицу:

$$\begin{aligned} (pE - A)^{-1} &= \begin{pmatrix} p - a_1 & -a_2 \\ -a_3 & p - a_4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \det(pE - A) = p^2 - (a_4 + a_1)p + a_1a_4 - a_2a_3 = \\ &= p^2 - 2 \cdot \frac{a_4 + a_1}{2} p + \left(\frac{a_4 + a_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_4 + a_1}{2} \right)^2 + a_1a_4 - a_2a_3 = \\ &= \left(p - \frac{a_4 + a_1}{2} \right)^2 - \frac{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}{4}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p - a_1 & -a_2 \\ -a_3 & p - a_4 \end{pmatrix}^{-1} &= \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p - a_4}{\left(p - \frac{a_4 + a_1}{2} \right)^2 - \frac{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}{4}} & \frac{a_2}{\left(p - \frac{a_4 + a_1}{2} \right)^2 - \frac{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}{4}} \\ \frac{a_3}{\left(p - \frac{a_4 + a_1}{2} \right)^2 - \frac{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}{4}} & \frac{p - a_1}{\left(p - \frac{a_4 + a_1}{2} \right)^2 - \frac{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}{4}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p - a_4}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} & \frac{a_2}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} \\ \frac{a_3}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} & \frac{p - a_1}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\lambda = \frac{a_4 + a_1}{2}$, $\omega = \frac{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}}{2}$.

Из последней матрицы находим обратное преобразование Лапласа [10]

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1} \left[(pE - A)^{-1} \right].$$

$$\begin{aligned}
\frac{p - a_4}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} &= \frac{p - \frac{a_4 + a_1}{2} + \frac{a_4 + a_1}{2} - a_4}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} = \frac{p - \lambda + \frac{a_1 - a_4}{2}}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} = \\
&= \frac{p - \lambda + \frac{a_1 - a_4}{2} \cdot \frac{2\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3} \cdot 2}}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} = \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} - \\
&- \frac{a_4 - a_1}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}} \cdot \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} = e^{\lambda t} ch\omega t - \frac{a_4 - a_1}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}} = e^{\lambda t} sh\omega t. \\
\frac{a_2}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} &= \frac{a_2 \cdot \frac{2\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3} \cdot 2}}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} = \frac{2a_2}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}} \cdot \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} = \\
&= \frac{2a_2}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}} e^{\lambda t} sh\omega t. \\
\frac{a_3}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} &= \frac{a_3 \cdot \frac{2\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3} \cdot 2}}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} = \frac{2a_3}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}} \cdot \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} = \\
&= \frac{2a_3}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}} e^{\lambda t} sh\omega t. \\
\frac{p - a_1}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} &= \frac{p - \frac{a_4 + a_1}{2} + \frac{a_4 + a_1}{2} - a_1}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} = \frac{p - \lambda + \frac{a_4 - a_1}{2}}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} = \\
&= \frac{p - \lambda + \frac{a_4 - a_1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3} \cdot 2}}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} = \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} + \\
&+ \frac{a_4 - a_1}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}} \cdot \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} = e^{\lambda t} ch\omega t + \frac{a_4 - a_1}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}} = e^{\lambda t} sh\omega t. \\
\Phi(t) = e^{At} &= L^{-1} \left[(pE - A)^{-1} \right] = \\
&= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} ch\omega t - \frac{a_4 - a_1}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}} e^{\lambda t} sh\omega t & \frac{2a_2}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}} e^{\lambda t} sh\omega t \\ \frac{2a_3}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}} e^{\lambda t} sh\omega t & e^{\lambda t} ch\omega t + \frac{a_4 - a_1}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}} e^{\lambda t} sh\omega t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где $e^{\lambda t} ch\omega t = \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$, $e^{\lambda t} sh\omega t = \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$.

Из последней матрицы при $t = kT$ и $ch\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$, $sh\omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$ получим переходную матрицу $\Phi(kT) = e^{AkT}$.

$$\Phi(kT) = \begin{pmatrix} \varphi_1(kT) & \varphi_2(kT) \\ \varphi_3(kT) & \varphi_4(kT) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $\varphi_1(kT) = \frac{1}{2}(e^{(\lambda+\omega)kT} + e^{(\lambda-\omega)kT}) - \frac{a_4 - a_1}{2\gamma}(e^{(\omega+\lambda)kT} - e^{(\omega-\lambda)kT})$,

$$\varphi_2(kT) = \frac{a_2}{\gamma}(e^{(\omega+\lambda)kT} - e^{(\omega-\lambda)kT}), \quad \varphi_3(kT) = \frac{a_3}{\gamma}(e^{(\omega+\lambda)kT} - e^{(\omega-\lambda)kT}),$$

$$\varphi_4(kT) = \frac{1}{2}(e^{(\lambda+\omega)kT} + e^{(\lambda-\omega)kT}) + \frac{a_4 - a_1}{2\gamma}(e^{(\omega+\lambda)kT} - e^{(\omega-\lambda)kT}),$$

$$\gamma = \sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4a_2a_3}.$$

Из (12) имеем матрицу состояния:

$$\Phi = \Phi(T) = e^{AT} = \begin{pmatrix} \varphi_1(T) & \varphi_2(T) \\ \varphi_3(T) & \varphi_4(T) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $\varphi_1(T) = \frac{1}{2}(e^{(\lambda+\omega)T} + e^{(\lambda-\omega)T}) - \frac{a_4 - a_1}{2\gamma}(e^{(\omega+\lambda)T} - e^{(\omega-\lambda)T})$, $\varphi_2(T) = \frac{a_2}{\gamma}(e^{(\omega+\lambda)T} - e^{(\omega-\lambda)T})$,

$$\varphi_3(T) = \frac{a_3}{\gamma}(e^{(\omega+\lambda)T} - e^{(\omega-\lambda)T}), \quad \varphi_4(T) = \frac{1}{2}(e^{(\lambda+\omega)T} + e^{(\lambda-\omega)T}) + \frac{a_4 - a_1}{2\gamma}(e^{(\omega+\lambda)T} - e^{(\omega-\lambda)T}).$$

Вычисляя интеграл $\Psi = \int_0^T e^{A(T-\sigma)} B d\sigma$ из (11) находим матрицу управляющей функции:

$$\Psi(T) = \begin{pmatrix} \psi_1(T) \\ \psi_2(T) \end{pmatrix} = \int_0^T e^{A(T-\sigma)} B d\sigma = e^{AT} \cdot \int_0^T e^{-A\sigma} B d\sigma = \begin{pmatrix} \varphi_1(T) & \varphi_2(T) \\ \varphi_3(T) & \varphi_4(T) \end{pmatrix} \cdot \int_0^T e^{-A\sigma} B d\sigma. \quad (14)$$

$$\int_0^T e^{-A\sigma} B d\sigma = \int_0^T \begin{pmatrix} \varphi_1(-\sigma) & \varphi_2(-\sigma) \\ \varphi_3(-\sigma) & \varphi_4(-\sigma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} d\sigma = \int_0^T \begin{pmatrix} b_2\varphi_2(-\sigma) \\ b_2\varphi_4(-\sigma) \end{pmatrix} d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \int_0^T b_2\varphi_2(-\sigma) d\sigma &= \frac{b_2a_2}{\gamma} \int_0^T (e^{-(\omega+\lambda)\sigma} - e^{(\omega-\lambda)\sigma}) d\sigma = \frac{b_2a_2}{\gamma} \left[\frac{1}{\omega + \lambda} (1 - e^{-(\omega+\lambda)T}) - \frac{1}{\omega - \lambda} (1 - e^{-(\omega-\lambda)T}) \right] = \\ &= \frac{b_2a_2}{\gamma} \left(\frac{-2\lambda}{\omega^2 - \lambda^2} - \frac{1}{\omega + \lambda} e^{-(\omega+\lambda)T} + \frac{1}{\omega - \lambda} e^{-(\omega-\lambda)T} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T b_2 \varphi_4(-\sigma) d\sigma &= \frac{b_2}{\gamma} \int_0^T \left(e^{-(\omega+\lambda)\sigma} - e^{(\omega-\lambda)\sigma} \right) d\sigma + \frac{(a_4 - a_1) b_2}{2\gamma} \int_0^T \left(e^{-(\omega+\lambda)\sigma} - e^{(\omega-\lambda)\sigma} \right) d\sigma = \\
&= \frac{b_2}{\gamma} \left(\frac{2\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} - \frac{1}{\lambda + \omega} e^{-(\lambda+\omega)T} + \frac{1}{\lambda - \omega} e^{-(\lambda-\omega)T} \right) + \\
&+ \frac{(a_4 - a_1) b_2}{2\gamma} \left(\frac{2\omega}{\omega^2 - \lambda^2} - \frac{1}{\omega + \lambda} e^{-(\omega+\lambda)T} - \frac{1}{\omega - \lambda} e^{(\omega-\lambda)T} \right). \\
\psi_1(T) &= \varphi_1(T) \frac{a_2 b_2}{\gamma} \left[-\frac{2\lambda}{\omega^2 - \lambda^2} - \frac{1}{\omega + \lambda} e^{-(\omega+\lambda)T} + \frac{1}{\omega - \lambda} e^{(\omega-\lambda)T} \right] + \\
&+ \varphi_2(T) \left[\frac{b_2}{2} \left(\frac{2\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} - \frac{1}{\lambda + \omega} e^{-(\lambda+\omega)T} + \frac{1}{\lambda - \omega} e^{-(\lambda-\omega)T} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{(a_4 - a_1) b_2}{2\gamma} \left(\frac{2\omega}{\omega^2 - \lambda^2} - \frac{1}{\omega + \lambda} e^{-(\omega+\lambda)T} - \frac{1}{\omega - \lambda} e^{(\omega-\lambda)T} \right) \right], \\
\psi_2(T) &= \varphi_3(T) \frac{a_2 b_2}{\gamma} \left[-\frac{2\lambda}{\omega^2 - \lambda^2} - \frac{1}{\omega + \lambda} e^{-(\omega+\lambda)T} + \frac{1}{\omega - \lambda} e^{(\omega-\lambda)T} \right] + \\
&+ \varphi_4(T) \left[\frac{b_2}{2} \left(\frac{2\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} - \frac{1}{\lambda + \omega} e^{-(\lambda+\omega)T} + \frac{1}{\lambda - \omega} e^{-(\lambda-\omega)T} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{(a_4 - a_1) b_2}{2\gamma} \left(\frac{2\omega}{\omega^2 - \lambda^2} - \frac{1}{\omega + \lambda} e^{-(\omega+\lambda)T} - \frac{1}{\omega - \lambda} e^{(\omega-\lambda)T} \right) \right].
\end{aligned}$$

Теперь сформулируем задачу управления температурными режимами теплового объекта следующим образом: среди всех допустимых управлений требуется найти управление $v^* = v^*(kT)$, переводящее систему (10) из заданного начального состояния

$$y(0) = y_0 \quad (15)$$

в конечное состояние

$$y(MT) = y_1, \quad (16)$$

чтобы при этом функционал (9) принимал наименьшее возможное значение.

Решение задачи (10), (15) можно представить в виде

$$y(kT) = \Phi^k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1} \Psi(T) v(iT). \quad (17)$$

При $k = M$ с учетом (16) из (17) будем иметь

$$\sum_{i=0}^{M-1} \Phi^{M-i-1} \Psi(T) v(iT) = \infty_1, \quad \infty_1 = y_1 - \Phi^M y_0. \quad (18)$$

Равенство (19) выражает необходимое и достаточное условие, которым должна удовлетворять функция $v(t) = v(kT)$, чтобы система (10) перешла из заданного начального состояния (15) в заданное конечное состояние (16). Кроме того, она должна доставлять минимум функционалу (9) [14–16]. Такое решение может быть представлено в виде [14–16]

$$v^*(kT) = \Psi'(\Phi')^{M-k-1} C. \quad (19)$$

Здесь вектор C является решением уравнения

$$W \cdot C = \alpha_1, \quad W = \sum_{i=0}^{M-1} \Phi^{M-i-1} \Psi \Psi' (\Phi')^{M-i-1}, \quad (20)$$

где W – невырожденная, положительно определенная матрица.

Из уравнения (20) будем иметь $C = W^{-1} \alpha_1$. Тогда искомое управление записывается в виде

$$v^*(kT) = \Psi'(\Phi')^{M-k-1} W^{-1} \alpha_1. \quad (21)$$

С учетом (21) формула (17) для состояния $y(kT)$ примет вид

$$y(kT) = \Phi^k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1} \Psi \Psi' (\Phi')^{k-i-1} W^{-1} \alpha_1. \quad (22)$$

Алгоритм решений задачи. Теперь сформулируем алгоритм решений задачи построения цифрового оптимального управления для регулирования температурными режимами теплового объекта следующим образом:

1. Вводятся значения данных:

V_1, V_2 – объемы нагревателя и жидкости;

F_1 – наружная поверхность нагревателя;

F_3 – внутренняя поверхность корпуса;

α_3 – коэффициенты теплоотдачи нагревателя и стенок корпуса (изнутри); ρ_1, ρ_3 – усредненные по объемам плотности нагревателя и стенки корпуса; c_1, c_3 – удельные теплоемкости нагревателя и стенки корпуса;

$T_1(t_0), T_2(t_1)$ – начальное и конечное состояние температуры нагревателя; $T_2(t_0), T_2(t_1)$ – начальное и конечное состояние температуры нагреваемой жидкости,

T – малый период квантования.

2. Проверяется свойства управляемости системы (4) вычислением ранга матрицы управляемости Q из (5). При выполнении условий (5), переход осуществляется к пункту (3), иначе к пункту 1.

3. Формируется матрица управляемости Φ (формулы (12) – (13)).

4. Формируется матрица управляющей функции: $\Psi(T)$ (формулы (11), (14)).

5. Определяются матрицы W (20) и W^{-1} .

6. Определяется оптимальное управление $v^*(kT)$ (22), при $k = 0, 1, \dots, M-1$.

7. Определяется оптимальные траектории $y(kT)$ (23), при $k = 0, 1, \dots, M-1$.

В **заключение** отметим, что в данной работе рассмотрены состояния функционирования температур теплового объекта, который характеризуется интенсивным повышением температуры нагревателя в случае, когда изменения температуры корпуса были незначительными. Полученные результаты работы в дальнейших исследованиях используются в случае, когда изменения температуры корпуса имеет определенные значения. Результаты работы также могут быть использованы при определении оптимального управления и оптимальной траектории при воздействиях возмущений и помех.

Поступила: 09.04.2026; рецензирована: 23.04.2026; принята: 24.04.2026.

Литература

1. Орлова Л.П. Программное обеспечение энергосберегающего оптимального управления пуском электродвигателей / Л.П. Орлова, Э.В. Сысоев, С.Б. Ушанев // Компьютерная хроника. 1997. № 12. С. 19–29.
2. Матвейкин В.Г. Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно-технического назначения: монография / В.Г. Матвейкин, Д.Ю. Муромцев. М.: Машиностроение, 2007. № 1. С. 128.
3. Грошев В.Н. Энергосберегающее управление нагревом жидкости / В.Н. Грошев, С.В. Артемова, Д.Ю. Муромцев, Л.П. Орлова // Техника в сельском хозяйстве. 1996. № 2. С. 27–28.
4. Муромцев Ю.Л. Моделирование и оптимизация технических систем при изменении состояний функционирования / Ю.Л. Муромцев, Л.Н. Ляпин, О.В. Попова. Воронеж: ВГУ, 1992. 164 с.
5. Ляпин Л.Н. Оптимальный по минимуму затрат энергии регулятор объекта двойного интегрирования / Л.Н. Ляпин, Ю.Л. Муромцев, О.В. Попова // Техническая кибернетика. Изв. РАН. 1992. № 2. С. 39–46.
6. Герасимяк Р.П. Динамика асинхронных электроприводов крановых механизмов / Р.П. Герасимяк. М.: Энергоатомиздат, 1986. 168 с.
7. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 464 с.
8. Kurina G.A., Dmitriev M.G. and Naidu D.S. Discrete singularly perturbed control problems (a survey) // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms 24. 2017. P. 335–370.
9. Ковалева М.А. Сингулярно возмущенные системы оптимального управления: монография / М.А. Ковалева, А.Л. Рутковский. М.: Мир науки, 2020. 95 с.
10. Zerizer T. Solving BVPs of singularly perturbed discrete systems / Communications in Applied Analysis, 23. No. 3 (2019). P. 483–495.
11. Аширбаев Б.Б. Optimal energy-saving digital system control / Современные цифровые технологии: проблемы, решения, перспективы / Б.Б. Аширбаев, Ж.А. Алымбаева // Сб. нац. научно-практической конференции. Казань, 2022. С. 104–107.
12. Yuldashev T.K., Ashirbaev B.Y. Optimal Feedback Control Problem for a Singularly Perturbed Discrete System // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44. No. 2. P. 661–668. Pleiades Publishing, Ltd.
13. Ashirbaev B.Y., Yuldashev T.K. Derivation of a Controllability Criteria for a Linear Singularly Perturbed Discrete System with Small Step // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024. Vol. 45. No. 3. P. 938–948. Pleiades Publishing, Ltd.
14. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. М.: Наука, 1976. 424 с.
15. Voropaeva N.V. Decomposition of control problems for multi-tempo systems with discrete-time // XII Vserossiiskoe Soveshchanie po problemam upravleniya. VSPU-2014 (XII Russian Meeting on Control Problems), Moscow, Russia, June 16–19, 2014, pp. 842–848 (in Russian).
16. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. М.: Наука, 1965. 474 с.