

УДК: 517

DOI 10.33514/1694-7851-2025-4/1-66-73

Кутанов А.

физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.

Нурланбек кызы Т.

магистрант
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.

Именова Р.Т.

магистрант
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.

КАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫНЫН ТУРМУШТАГЫ КОЛДОНУЛУШУ

Аннотация. Катарлар теориясы математикалык анализдин маанилүү бөлүгү болуп эсептелет жана илимдин, техниканын ар кандай тармактарында кеңири колдонулат. Бул макалада чексиз сандык жана функциялык катарлардын негизги түшүнүктөрү жана алардын жыйналуу шарттары каралат. Айрыкча, катарлар теориясынын турмуштагы практикалык колдонулуштарына басым жасалат: инженердик эсептөөлөрдө, сигналдарды иштетүүдө, физикалык процесстерди моделдөөгө, экономикалык эсептерге жана сандык ыкмаларга. Мисал катары, Тейлор катарлары аркылуу татаал функцияларды жакындатуу, Фурье катарлары менен үн жана сүрөт сигналдарын анализдөө, ошондой эле математикалык турактуу чоңдуктарды (мисалы, π же e) эсептөө келтирилет. Макаланын максаты – математиканын теориялык негиздери күнүмдүк турмушта жана илимий-техникалык процесстерде кандай колдонулуп жатканын көрсөтүү. Бул материалдар математика илимин прикладдык багытта колдонууга кызыккан студенттер, окутуучулар жана адистер үчүн пайдалуу болот. Жыйынтыгында, теория менен практиканын байланышы өзгөчө белгиленет.

Негизги сөздөр: Катарлар теориясы, катарлардын жыйналуусу, функциялык катарлар, Тейлор катарлары, Фурье катарлары, функцияларды жакындатуу.

Кутанов А.

кандидат физико-математических наук, и.о. профессора
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек

Нурланбек кызы Т.

магистрант
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек

Именова Р.Т.

магистрант
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РЯДОВ В РЕАЛЬНОЙ ЖИЗНИ

Аннотация. Теория рядов является важной частью математического анализа и широко применяется в различных областях науки и техники. В данной статье рассматриваются основные понятия бесконечных числовых и функциональных рядов, а также условия их сходимости. Особое внимание уделяется практическому применению теории рядов в повседневной жизни: в инженерных расчётах, обработке сигналов, моделировании физических процессов, экономических вычислениях и численных методах. В качестве примеров приводится аппроксимация сложных функций с помощью рядов Тейлора, анализ звуковых и изображённых сигналов через разложение в ряды Фурье, а также вычисление приближённых значений математических констант, таких как π и e . Цель статьи – показать, как теоретические основы математики находят применение в реальных и научно-технических задачах. Представленные материалы могут быть полезны студентам, преподавателям и специалистам, интересующимся прикладным применением математических знаний. В заключение подчёркивается важность связи между теорией и практикой в процессе изучения анализа и его прикладных направлений.

Ключевые слова: Теория рядов, сходимость рядов, функциональные ряды, ряды Тейлора, ряды Фурье, прикладное применение, аппроксимация функций.

A. Kutanov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Acting Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.

T. Nurlanbek kyzy

master's student
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.

R.T. Imenova

master's student
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.

APPLICATIONS OF SERIES THEORY IN REAL LIFE

Abstract. The theory of series is an essential part of mathematical analysis and is widely used in various fields of science and engineering. This article explores the fundamental concepts of infinite numerical and functional series, as well as the conditions for their convergence. Special attention is given to the practical applications of series theory in everyday life: in engineering calculations, signal processing, physical process modeling, economic computations, and numerical methods. Examples include the approximation of complex functions using Taylor series, the analysis of audio and visual signals through Fourier series decomposition, and the calculation of approximate values of mathematical constants such as π and e . The goal of the article is to demonstrate how the theoretical foundations of mathematics are applied in real-world and scientific-technical problems. The materials presented may be useful for students, educators, and professionals interested in the practical application of mathematical knowledge. In conclusion, the importance of the connection between theory and practice in the study of analysis and its applied branches is emphasized.

Keywords: Series theory, series convergence, functional series, Taylor series, Fourier series, applied use, function approximation.

Киришүү. Математика илиминде катарлар теориясы – сандык жана функциялык катарлардын жыйналуу шарттарын, алардын жүрүм-турумун иликтеген илимий бөлүк. Чексиз катарлар аркылуу көптөгөн татаал функцияларды жакындаштыруу, алардын мүнөздөмөлөрүн түшүнүү жана алардын колдонулуш чөйрөсүн кеңейтүү мүмкүнчүлүгү ачылган. Бул илимий багыт өзгөчө функцияларды анализдөө, сандык методдорду түзүү жана ар кандай тармактарда – инженерияда, физикада, экономикада, сигнал иштетүүдө – кеңири колдонулат.

Учурда катарлар теориясы турмуштук жана илимий көйгөйлөрдү чечүүдө маанилүү инструментке айланды. Мисалы, Фурье катарлары аркылуу үн сигналдарын талдоо жана санариптик технологияларда үн жана сүрөттүн сапатын жакшыртуу иштери аткарылат. Ошондой эле Тейлор катарларынын жардамы менен татаал функциялардын аппроксимациясы жүргүзүлүп, сандык эсептөөлөр так жана эффективдүү болуп калат. Экономикада жана финансылык моделдерде эсептөөлөрдү жөнөкөйлөтүү үчүн да катарлар теориясы колдонулат.

Бул макалада катарлар теориясынын негизги түшүнүктөрү, алардын жыйналуу шарттары кыскача каралып, андан кийин теориянын турмуштагы жана илимий практикалык колдонулуштары боюнча мисалдар берилет. Макаланын максаты – абстракттуу математикалык түшүнүктөрдүн күнүмдүк турмушта кандай мааниге ээ экенин жана техникада кандай ролду ойной турганын көрсөтүү. Ошондой эле бул илимий багытты үйрөнүүчүлөргө практикалык колдонуу мүмкүнчүлүктөрүн ачуу.

Катарлар теориясы – математикалык анализдин маанилүү бөлүгү болуп, чексиз сандар же функциялардын жыйындысын изилдейт. Власов жана Синчуков катарлар теориясынын негизги түшүнүктөрүн жана жыйналуу шарттарын терең изилдешкен [3].

Катар – бул белгилүү ырааттуулуктагы сандардын же функциялардын чексиз суммасы:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Эгер бул сумма белгилүү бир мааниге жакындап, чектелген санга барабар болуп калса, мындай катарды жыйналуучу катар деп атайт. Эгер жыйынтык чексиз же аныкталбаган болсо, ал **жыйналбайт** деп эсептелет.

Функциялык катарлар – бул функциялардын чексиз жыйындысы, алар аркылуу татаал функцияларды жакындаштырууга мүмкүнчүлүк бар.

Тейлор катары – функцияны анын бир чекиттеги туундуларынын жардамы менен көпмүчөлүү түрүндө жакындаштыруу ыкмасы:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

Бул катар аналитикалык функцияларды изилдөөдө жана аларды жакындатууда колдонулат.

Дагы бир маанилүү түрү – **Фурье катарлары** – бул мезгилдүү функцияларды синус жана косинус сыяктуу жөнөкөй тригонометриялык функциялардын суммасы түрүндө көрсөтүүгө мүмкүндүк берген маанилүү математикалык ыкма. Алар сигналдарды, толкундарды жана ар түрдүү физикалык процесстерди талдоодо кеңири колдонулат. Катарлар теориясы сандык анализде, функцияларды жакындаштырууда жана физикалык процесстерди математикалык

моделдөөгө негиз түзөт. Ошентип, теориялык негиздерди билүү практикалык маселелерди чыгарууда маанилүү инструмент болуп саналат.

Катарлар теориясы – абстракттуу математикалык түшүнүк болгону менен, күнүмдүк турмушта жана техникада кеңири колдонулат. Анын практикалык мааниси ар кандай тармактарда, анын ичинде инженердик эсептөөлөрдө, сигналдарды иштетүүдө, физикалык моделдөөлөрдө жана экономикада байкалаары сөзсүз. Ал эми электротехникада Фурье катарларынын колдонулушу Пасько изилдеген материалдарда кеңири көрсөтүлгөн [5].

Мисалы, Фурье катарлары сигналдарды талдоодо жана иштетүүдө маанилүү роль ойнойт. Анферов, Шевелева жана Загибалов белгилешкендей, Фурье катарлары аркылуу мезгилдүү функциялар синус жана косинус толкунчаларынын суммасы түрүндө ачылып, көптөгөн техникалык жана илимий маселелерди чечүүгө мүмкүнчүлүк түзүлөт [1]. Алар аркылуу үн, сүрөт жана башка мезгилдүү сигналдар синус жана косинус толкунчаларынын суммасы түрүндө ачылып, анализделет. Бул процесс аудио жана видео технологияларында, радиотолкундар менен иштөөлөрдө жана санариптик байланыш системаларында колдонулат. Ошондой эле Фурье анализи медицинада, мисалы электрокардиограмма (ЭКГ) сыяктуу биомедициналык сигналдарды талдоодо колдонулат. Медициналык сигналдарды, мисалы, электрокардиограммаларды талдоодо Фурье анализинин практикалык мааниси Ранггайн тарабынан баяндалган [4].

Мисал 1. Жүрөктүн ЭКГ сигналы $f(t)$ деп алалы. Бул сигналды Фурье катары түрүндө жазсак:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right)$$

мында:

T – сигналдын мезгили (мисалы, жүрөктүн бир толкун цикли),

a_n, b_n – Фурье коэффициенттери, аларды төмөнкү формулалар менен эсептейбиз:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt$$



Сүрөт 1. ЭКГ сигналынын толкун формасы

Бул коэффициенттер ЭКГ сигналындагы ар түрдүү жыштыктарды аныктоого мүмкүнчүлүк берет. Мисалы, нормалдуу жүрөк ритминен тышкары белгилүү бир патологиялык жыштыктар пайда болушу мүмкүн.

Компьютердик программа Фурье анализи аркылуу сигналды бөлүп, кыска жана узак мөөнөттүү жүрөк ооруларын аныктайт. Мындай анализ кардиологго диагноз коюуда, жүрөк ритминин бузулушун эрте этапта аныктоодо жардам берет. Фурье катарынын жардамы менен ЭКГ сигналдарынын мүнөзүн санариптик форматта карап чыгып, анализдөө мүмкүнчүлүгү жогорулайт. Бул – медицинада сигналдарды иштетүүдө жана ооруларды диагностикалоодо маанилүү метод.

Тейлор катарлары математикада жана инженерияда татаал функцияларды жөнөкөйлөтүп, жакындатуу үчүн колдонулат. Бул ыкма сандык эсептөөлөрдө, жогорку тактыктагы эсептерде жана компьютердик программалоодо функцияларды ыңгайлуу формага келтирүүгө мүмкүнчүлүк берет. Ошондой эле, физикада – айрыкча динамикалык системалардын жүрүм-турумун моделдөөнү жана анализдөөнү жеңилдетет [5].

Мисал 2. Мисалы, $\sin(x)$ функциясын 0 чекитинде жакындатуу:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$x=0.5$ үчүн $\sin(0.5)$ маанисин Тейлор катары менен эсептеп көрөлү.

$$\sin(0.5) \approx 0.5 - \frac{(0.5)^3}{6} + \frac{(0.5)^5}{120}$$

Эсептеп алалы:

$$0.5=0.5$$

$$(0.5)^3 = 0.125, \frac{0.125}{6} \approx 0.0208333$$

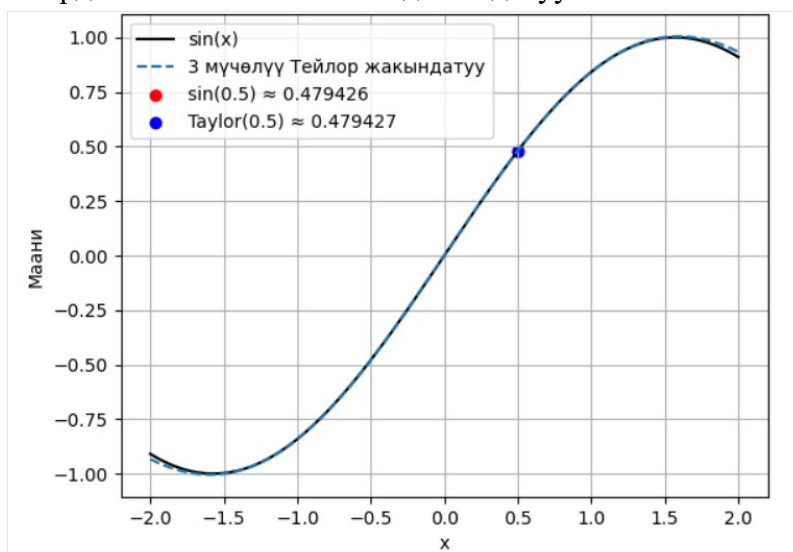
$$(0.5)^5 = 0.03125, \frac{0.03125}{120} \approx 0.0002604$$

Ошентип:

$$\sin(0.5) \approx 0.5 - 0.0208333 + 0.0002604 = 0.4794271$$

Чыныгы мааниси $\sin(0.5) \approx 0.4794255$ болуп, айырма өтө аз.

Мындай жакындатуу компьютердик программаларда жана инженердик эсептөөлөрдө функцияларды тез жана так эсептөөдө пайдалуу.



Сүрөт 2. $\sin(x)$ жана Тейлор жакындатуунун салыштырмалуу графиги

Мисал 3. Маятниктин кыймылы жана $\sin(\theta)$ функциясын Тейлор катары менен жакындатуу.

Маятниктин кыймылы төмөнкү теңдеме менен сүрөттөлөт:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$

мында:

θ – бурч (радианда),

g — жердин тартылуу күчү,

L – маятниктин узундугу.

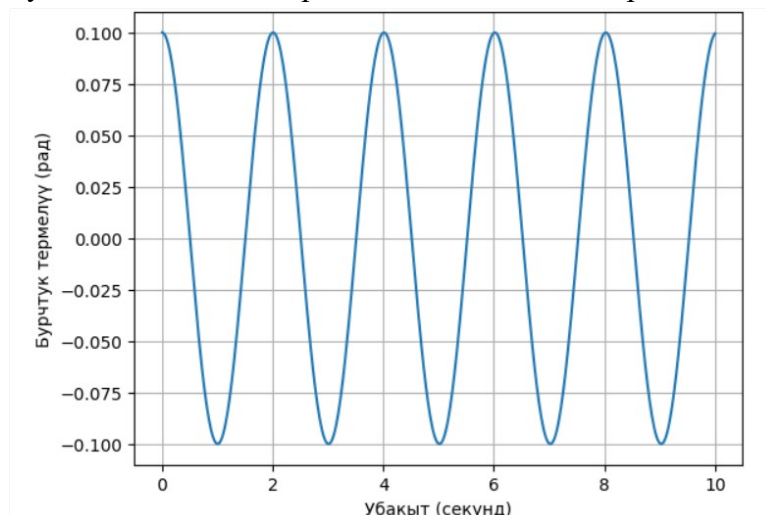
$\sin(\theta)$ функциясын төмөнкүдөй жакындата алабыз:

$$\sin(\theta) \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

Эгер θ өтө кичине болсо, анда $\sin(\theta) \approx \theta$ болуп, теңдеме жөнөкөйлөтүлөт:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

Бул теңдеменин чыгарылышы маятниктин гармоникалык термелүүсүн сүрөттөйт.



Сүрөт 2. Жөнөкөй маятниктин бурчтук термелүүсү

Инженердик эсептөөлөрдө жана симуляцияларда $\sin(\theta)$ татаал функциясынын ордуна анын жакындатылышы колдонулат.

Мындай жөнөкөйлөтүлгөн теңдеме аркылуу термелүүнүн мезгилин жана өзгөчөлүктөрүн тез эсептөөгө болот.

Экономикада жана финансылык моделдерде катарлар аналитикалык функцияларды жакындатууга, ошондой эле сандык эсептөөлөрдү тездетүүгө мүмкүндүк берет. Бул каражаттар экономикалык көрсөткүчтөрдү прогноздоодо, инвестициялык анализдерде колдонулат [2].

Фурье катарлары аркылуу сезондук моделдөө. Мезгилдүү өзгөргөн экономикалык көрсөткүчтөрдү (мисалы, ИДП, сатуу көлөмү, инфляция, валютанын курсу) **сезондук компонентке бөлүп талдоо.**

Мисал 4. Бир компаниянын 4 квартал ичиндеги сатуусу мезгил-мезгили менен өзгөрөт. Анализ жүргүзүү үчүн сатуунун убакыт боюнча функциясын Фурье катарларына ажыратабыз:

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) \right)$$

Сатуунун жогорулап же төмөндөөрү аныкталып, бул маалыматтар жеткиликтүүлүктү, кампа запастарын жана салыктарды пландаштырууну жеңилдетип, сезондук таасирлерди бөлүп чыгуу аркылуу негизги өсүү тенденциясын аныктоого мүмкүнчүлүк берет.

Тейлор катарлары менен инвестициялык функцияларды жакындатуу.

Мисал 5. Инвестициянын келечектеги наркын эсептөөдө

$$A = P \cdot e^{rt}$$

формуласын жакындатуу үчүн Тейлор катарын колдонуу.

$$e^{rt} \approx 1 + rt + \frac{(rt)^2}{2!} + \frac{(rt)^3}{3!} + \dots$$

Мисал 6. Бир инвестор 100 000 сомду 5 жылга банкка салды. Банк жылына 7% татаал пайыз төлөп берет. 5 жылдан кийин инвестор канча акча алат?

Так формула

$$A = P \cdot (1 + r)^t$$

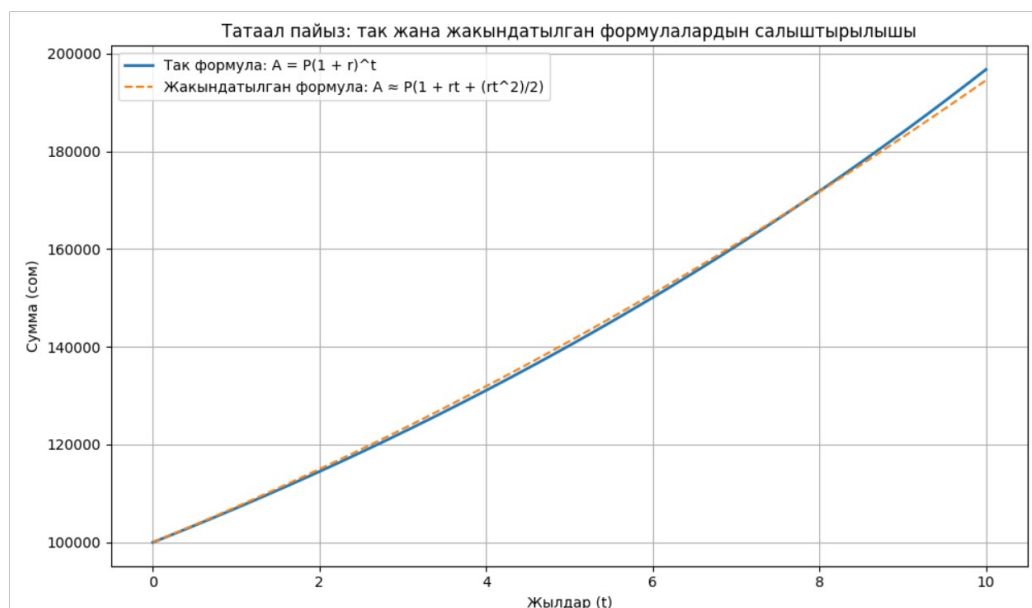
Жакындатылган формула:

$$A \approx P \cdot \left(1 + rt + \frac{(rt)^2}{2} \right)$$

Формулага коюп төмөнкүгө ээ болобуз

$$A = 100,000 \times (1 + 0.07)^5 = 100,000 \times (1.07)^5$$

$$A = 100,000 \times 1.402552 = 140,255.20 \text{ сом}$$



Демек, 5 жылдан кийин инвестордун эсебинде 140,255.20 сом болот. Бул акчанын ичинде баштапкы 100 000 сом жана пайыздан түшкөн 40 255.20 сом бар.

Бул ыкма эсептөөлөрдү тездетип, ката пайызын азайтып, сандык моделдерде оптималдаштырылган алгоритм катары колдонулат.

Жыйынтык катары, катарлар теориясы – математиканын абстракттуу жана татаал түшүнүктөрүн күнүмдүк турмушта жана илимий-техникалык тармактарда ийгиликтүү колдонууга мүмкүндүк берген маанилүү курал экенин баса белгилөөгө болот. Фурье жана Тейлор катарлары сыяктуу негизги инструменттер ар кандай сигналдарды талдоодо, функцияларды жакындатууда, экономикалык жана финансылык эсептөөлөрдү оптималдаштырууда өзгөчө ролду ойнойт. Катарлар теориясынын турмуштук колдонулушу – инженердик эсептөөлөрдөн баштап медицина, санариптик технологиялар, экономика жана финансылык моделдерге чейин кеңири таралган. Ошентип, теория менен практиканын байланышына көңүл буруу, математикалык илимди чыныгы дүйнөдөгү көйгөйлөрдү чечүүгө интеграциялоо – заманбап илимдин жана технологиянын өнүгүүсү үчүн зарыл шарт болуп саналат. Бул макалада сунушталган материалдар жана мисалдар катарлар теориясын үйрөнүүчүлөргө жана адистерге анын практикалык маанисин түшүнүүгө жардам берет.

Адабияттар:

1. Анферов, П. И., Шевелева, И. В., Загибалов, В. И. Ряды Фурье и интеграл Фурье: учебное пособие / П. И. Анферов, И. В. Шевелева, В. И. Загибалов. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2015. – 124 с.
2. Асанова Ж.К. Предмет аралык байланыштар аркылуу окуу процессинин эффективдүүлүгүн жогорулатуу. - И.Арабаев атындагы КМУ нун Жарчысы, – Б., 2020. – 121 б.
3. Власов, Д. А., Синчуков, А. В. Теория рядов / Д. А. Власов, А. В. Синчуков. – М.: Наука, 1979. – 408 с.
4. Ранггаян, Р. М. Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход / Р. М. Ранггаян; пер. с англ. – М.: Техносфера, 2007. – 720 с.
5. Пасько, А. С. Применение рядов Фурье в электротехнике / А. С. Пасько // Материалы студенческой научной конференции БНТУ. – Минск: БНТУ, 2022. – С. 43–45.

**Рецензент: физика-математика илимдеринин кандидаты,
профессордун м.а. Асанова Ж.К.**