УДК: 517.518: 519.6
DOI 10.33514/1694-7851-2025-4/2-48-56

Нарбаева Г.О.
ага окутуучу, изденүүчү
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
narbaevagulbaraO@gmail.com
Асылбекова К.Ж.
ага окутуучу
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
asylbekovakulipa@gmail.com
Талантбек кызы У.
магистрант
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
uulkelsin0994@gmail.com

ПАРАМЕТРИ БАР ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАЛАРЫНЫН АР КАНДАЙ ТАРМАКТАРДА КОЛДОНУЛУШУ

Аннотация. Бул макалада параметрдик тригонометриялык теңдемелер системаларынын теориялык негиздери, математикалык мүнөздөмөлөрү жана алардын ар кандай илимий жана техникалык тармактарда колдонулушу кеңири каралат. Макалада физикадагы маятниктердин термелүүлөрүн, айланма кыймылды, электротехникадагы айланма токторду жана толкун процесстерин параметрдик тригонометриялык теңдемелер системалары аркылуу моделдөөнүн негизги принциптери мисалдар менен көрсөтүлөт. Ошондой эле, бул теңдемелердин чыгарылыштарынын касиеттери — мезгилдүүлүк, амплитуда жана фаза — изилденип, алардын реалдуу системалардагы динамиканы терең жана так сүрөттөөгө шарт түзөрү баса белгиленет. Практикалык бөлүктө параметрдик тригонометриялык теңдемелердин колдонулушу айланма кыймыл, гармоникалык термелүү жана электрдик сигналдарды анализдөө мисалдары менен далилденет. Графиктер жана эсептөөлөр аркылуу теңдемелердин динамикалык процесстерди моделдөөдө натыйжалуу курал экендиги көрсөтүлөт. Макаланын натыйжалары илимий изилдөөлөрдө жана инженердик практикаларда кеңири колдонулууга мүмкүндүк берет.

Негизги сөздөр: параметрдик теңдемелер, тригонометриялык функциялар, гармоникалык термелүү, айланма кыймыл, сандык моделдөө, фазалык байланыш, амплитуда, мезгилдүүлүк.

Нарбаева Г.О.
старший преподаватель, соискатель
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
narbaevagulbaraO@gmail.com
Асылбекова К.Ж.
старший преподаватель

Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
asylbekovakulipa@gmail.com
Талантбек кызы У.
магистрант
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
uulkelsin0994@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

Аннотация. В данной статье подробно рассматриваются теоретические основы и математические характеристики систем параметрических тригонометрических уравнений, а также их применение в различных научных и технических областях. В статье представлены основные принципы моделирования физических явлений, таких как колебания маятников, вращательное движение, переменный ток в электротехнике и волновые процессы с использованием систем параметрических тригонометрических уравнений. Также исследуются свойства решений этих уравнений — периодичность, амплитуда и фаза, подчёркивается их значимость для точного и глубокого описания динамики реальных систем.

В практической части демонстрируется применение параметрических тригонометрических уравнений на примере анализа вращательного движения, гармонических колебаний и электрических сигналов. С помощью графиков и расчётов показана эффективность данных уравнений как инструмента моделирования динамических процессов. Результаты статьи позволяют широко применять изложенные методы в научных исследованиях и инженерной практике.

Ключевые слова: параметрические уравнения, тригонометрические функции, гармоническое колебание, вращательное движение, численное моделирование, фазовая связь, амплитуда, периодичность.

G.O. Narbayeva
Senior Lecturer, PhD Applicant
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
narbaevagulbaraO@gmail.com
K.J. Asylbekova
Senior Lecturer
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
asylbekovakulipa@gmail.com
U. Talantbek kyzy
Master's Student
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
uulkelsin0994@gmail.com

APPLICATION OF SYSTEMS OF PARAMETRIC TRIGONOMETRIC EQUATIONS IN VARIOUS FIELDS

Abstract. This article explores the theoretical foundations and mathematical characteristics of systems of parametric trigonometric equations, as well as their application in various scientific and technical domains.

The paper presents the core principles of modeling physical phenomena—such as pendulum oscillations, rotational motion, alternating current in electrical engineering, and wave processes—using systems of parametric trigonometric equations. It also examines the key properties of these solutions, including periodicity, amplitude, and phase, emphasizing their significance for accurately and thoroughly describing the dynamics of real-world systems. In the practical section, the use of parametric trigonometric equations is demonstrated through examples involving rotational motion, harmonic oscillations, and the analysis of electrical signals. Graphs and calculations are used to show that these equations are effective tools for modeling dynamic processes. The findings of the study suggest that the presented approaches can be widely applied in scientific research and engineering practice.

Keywords: parametric equations, trigonometric functions, harmonic oscillation, rotational motion, numerical modeling, phase relationship, amplitude, periodicity.

Учурдагы илимий-техникалык прогресс ар кыл тармактарда колдонулуучу математикалык моделдөөгө болгон талаптарды арттырууда. Айрыкча, табигый жана инженердик процесстерди изилдөөдө мезгилдүү жана циклдүү мүнөздөгү кубулуштарды так сүрөттөө зарыл болуп жатат. Мындай процесстерди моделдөөдө тригонометриялык функциялар жана аларга негизделген параметрдик теңдемелер системалары өзгөчө мааниге ээ.

Параметри бар тригонометриялык теңдемелер — бул белгилүү бир параметрге (көбүнчө убакытка) көз каранды болгон, бир нече тригонометриялык функцияларды камтыган теңдемелердин системасы. Бул ыкма мезгилдүү өзгөрүүлөргө ээ болгон кубулуштарды изилдөөдө ыңгайлуу математикалык аппарат болуп эсептелет. Мындай теңдемелердин негизинде телолордун термелүүсү, толкундардын таралышы, айланма кыймылдар жана башка динамикалык системалар так моделденет.

Тригонометриялык теңдемелер системаларынын практикалык колдонулушу маселеси Абдуахадова Г. ж.б. тарабынан терең изилденип, заманбап ИКТ каражаттарын колдонуу аркылуу бул теманы окутуунун натыйжалуулугу жогорулаарын белгилешет [1]. Геометрия жана математика сабактарында предмет аралык байланыштар окуу процессинин эффективдүүлүгүн арттырууда маанилүү роль ойнойт, бул принцип тригонометриялык темаларга да тиешелүү [2]. Мындан тышкары, термелүү теориясынын татаал техникалык объектилердин динамикасын түшүндүрүүдөгү ролу Елисеев С.В. жана А.В. тарабынан кеңири изилденип, структуралык моделдөөнүн принциптери баяндалган [3], ал эми Фальнес Й. жана Курниаван А. толкун жана термелүү процесстерин тригонометриялык моделдер аркылуу сүрөттөө ыкмаларын практикалык негизде сунушташат [4]. Бул системалардын практикалык мааниси өтө чоң. Физикада алар механикалык термелүүлөрдү, үн жана электромагниттик толкундарды, оптикалык интерференция жана дифракция кубулуштарын анализдөөдө колдонулат. Электротехникада айланма токтун мүнөздөмөлөрүн, фаза аралык жылышууларды жана резонанстык процесстерди сүрөттөөдө колдонулса, астрономияда планеталардын орбиталарын жана мезгилдүү астрономиялык көрүнүштөрдү эсептөөдө колдонулат. Ошондой

эле геодезия, компьютердик графика, акустика, робототехника жана курулуш механикасы сыяктуу тармактарда да кеңири колдонулуп келет.

Параметрдик тригонометриялык теңдемелер системаларын колдонуу аркылуу изилденүүчү процесстердин натыйжалуулугу жогорулайт, эсептөөлөр так жүргүзүлөт жана кубулуштардын жүрүшү алдын ала моделденет. Ошондуктан бул теңдемелердин теориялык негиздерин, практикалык колдонмолорун жана аналитикалык мүмкүнчүлүктөрүн тереңдетип изилдөө учурдагы математикалык жана колдонмо илимдердин актуалдуу багыттарынын бири болуп саналат.

Бул макалада параметри бар тригонометриялык теңдемелер системаларынын негизги өзгөчөлүктөрү, алардын ар кыл тармактардагы колдонулушу жана практикалык мааниси каралат. Ошондой эле алардын негизинде түзүлгөн математикалык моделдердин жардамы менен реалдуу процесстердин жүрүшүн анализдөө маселелерине да көңүл бурулат.

Бул макаланын максаты — параметри бар тригонометриялык теңдемелер системаларынын теориялык негиздерин изилдеп, алардын ар кыл илимий жана техникалык тармактардагы колдонуу мүмкүнчүлүктөрүн системалуу түрдө карап чыгуу. Ошондой эле, моделдөө жана анализдөө процессинде бул теңдемелердин натыйжалуу инструмент катары колдонулушунун өзгөчөлүктөрүн аныктоо болуп саналат.

Максатка жетүү үчүн төмөнкү милдеттер коюлган:

- параметрдик тригонометриялык теңдемелер системаларынын математикалык формаларын жана негизги мүнөздөмөлөрүн карап чыгуу;
- Физика, электротехника, астрономия, геодезия, компьютердик графика жана башка тармактардагы практикалык колдонулушун талдоо;
- Бул теңдемелерди колдонуу аркылуу реалдуу процесс жана кубулуштарды моделдөө ыкмаларын жана алардын натыйжалуулугун баалоо;
- Параметрдик тригонометриялык моделдерди изилдөөдө кездешкен негизги көйгөйлөрдү жана келечектеги изилдөө багыттарын аныктоо.

Параметрдик тригонометриялык теңдемелер системасы — бул убакыт же
башка бир өзгөрмө аркылуу башкарылуучу, тригонометриялык функцияларды камтыган бир нече теңдемеден турган система. Мындай системаларда өзгөрмөлөр (мисалы, x(t),y(t),z(t)) белгилүү бир параметр t боюнча (көбүнчө убакыт) төмөнкүдөй түрдө берилет:

$$\begin{cases} x(t) = f_1(\sin(\alpha t), \cos(\beta t), \ldots), \\ y(t) = f_2(\sin(\gamma t), \cos(\delta t), \ldots), \\ \vdots \end{cases}$$

мында α,β,γ,δ — жыштык параметрлери. Мындай системалар мезгилдүү, гармониялык мүнөздөгү процесстерди моделдөөдө өзгөчө мааниге ээ болуп, алар фазалык өзгөрүүлөрдү, амплитудалык термелүүлөрдү жана башка динамикалык кубулуштарды так сүрөттөөгө мүмкүндүк берет.

Параметрдик тригонометриялык теңдемелердин чыгарылыштары, негизинен, мезгилдүү же квази-мезгилдүү функциялар болуп саналат. Алардын негизги математикалык касиеттери төмөнөдөгүдөй.

Ар бир функция белгилүү бир убакыт аралыгында кайталанып турат. Мисалы, sin(x) жана cos(x) функцияларынын негизги мезгили 2πге барабар. Чыгарылыштар көбүнчө бир нече

синус жана косинус функцияларынын суммасынан турат, башкача айтканда, гармоникалык термелүүлөрдүн жыйындысы болуп эсептелет:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k),$$

мында A_k — амплитудалар, ω_k — жыштыктар, φ_k — фазалар, t-убакыт

Ар бир функциянын фазасы жана амплитудасы кубулуштун баштапкы абалын жана интенсивдүүлүгүн чагылдырат. Жыштык, амплитуда жана фаза параметрлери чыгарылыштардын динамикасын түздөн-түз аныктайт. Параметрлердин өзгөрүшү менен системанын жүрүшү да өзгөрөт.

Мисал 1. Маятниктин кыймылы (гармоникалык термелүү)

Жөнөкөй гармоникалык термелүүнү төмөнкүдөй теңдеме сүрөттөйт:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

мында:

A — термелүүнүн амплитудасы,

ω — жыштык $\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$,

φ — баштапкы фаза.

Бул теңдеме механикалык термелүүчү системаларда (маятник, пружиналуу система ж.б.) кеңири колдонулат.

Айлануу кыймылы. Айлануучу телонун кыймылы төмөнкү параметрдик системанын жардамы менен сүрөттөлөт:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t), \\ y(t) = R\sin(\omega t), \end{cases}$$

мында:

- R — айлануу радиусу,
- ω — бурчтук жыштык.

Бул модел объекттин тегерек боюнча туруктуу ылдамдык менен кыймылын чагылдырат.

Толкун функциясы. Толкун сыяктуу кубулуштар төмөнкүдөй гармоникалык функция менен сүрөттөлөт:

$$u(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi),$$

мында:

A — амплитуда,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — толкун саны,

λ — толкун узундугу,

ω — жыштык.

Бул теңдеме механикалык жана электромагниттик толкундарды моделдөөдө колдонулат.

Параметрдик тригонометриялык теңдемелер системаларынын теориясын терең изилдөө — ар кыл илимий жана инженердик тармактардагы практикалык маселелерди чечүүдө өтө маанилүү. Алар төмөнкүдөй тармактарда колдонулат:

Бул кубулуштар физикада (термелүү, толкун, резонанс, фазалык айырма), электротехникада (айланма ток, сигналдарды модуляциялоо/демодуляциялоо, резонанстык кубулуштар), астрономияда (планеталардын кыймыл траекториясы), робототехникада (манипуляторлордун кыймыл траекториясы) жана компьютердик графикада (3D анимациядагы толкун эффекттери жана мезгилдүү кыймылдар) моделдөө жана эсептөөлөрдү жүргүзүүдө колдонулат. Параметрдик тригонометриялык теңдемелердин колдонулушун тереңирээк түшүнүү жана алар менен иштөө көндүмдөрүн өнүктүрүү максатында төмөнкүдөй практикалык эсептер каралат. Бул эсептер физика, механика, электротехника жана толкун теориясы сыяктуу тармактарда кеңири кездешүүчү реалдуу кубулуштарды чагылдырат.

Мисал: Маятник төмөнкүдөй параметрдик теңдеме менен берилет [4]:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

мында A=5 см — амплитуда, ω=2 рад/сек — жыштык, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ — баштапкы фаза, t- убакыт.

Максат: Термелүүнүн негизги мүнөздөмөлөрүн жана t=2 сек учурда координатасын табуу.
Чыгаруу:

Мезгили:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ сек.}$$

t=2 сек үчүн:

$$x(2) = 5\cos\left(4 + \frac{\pi}{4}\right) = 5\cos(4.785) \approx 0.255 \text{ см.}$$

Жыйынтык: Маятник π секундда толук бир термелүү жасайт. t=2 сек учурда анын абалы x≈0.255 см.

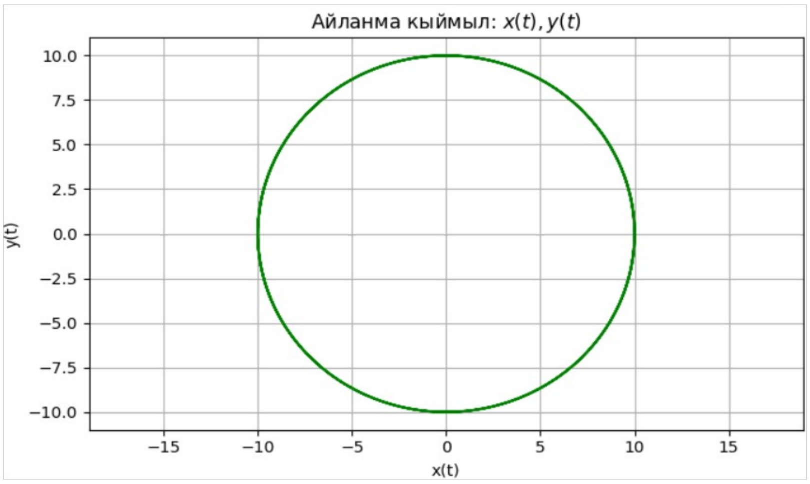
Айланма кыймылдын траекториясы.
Мисал: Радиусу R=10 см болгон айланма кыймыл төмөнкүдөй теңдемелер менен берилет:

$$\begin{cases} x(t) = 10\cos(3t), \\ y(t) = 10\sin(3t), \end{cases}$$

Максат: $t = \frac{\pi}{6}$ сек үчүн объекттин координаталарын табуу.

Чыгаруу:

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = 10\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 10\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10.$$



Жыйынтык: $t = \frac{\pi}{6}$ учурда объект (x,y)=(0,10) абалында жайгашкан.

Айланма токтун фазалык айырмасын табуу.

Мисал: Электр чынжырында чыңалуу жана ток төмөнкүдөй функциялар менен берилет:

$$u(t) = 220\sin(100\pi t),$$

$$i(t) = 5\sin(100\pi t + \frac{\pi}{6}).$$

Максат: Жыштыкты, фазалык айырманы жана сигналдардын ортосундагы байланыш мүнөзүн аныктоо.

Чыгаруу: Электр чынжырында:

Чыңалуу:

$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t)$$

Ток:

$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Мында:

ω — бурчтук жыштык

φ — фазалык айырма

U_m, I_m— амплитудалар.

Жыштык:

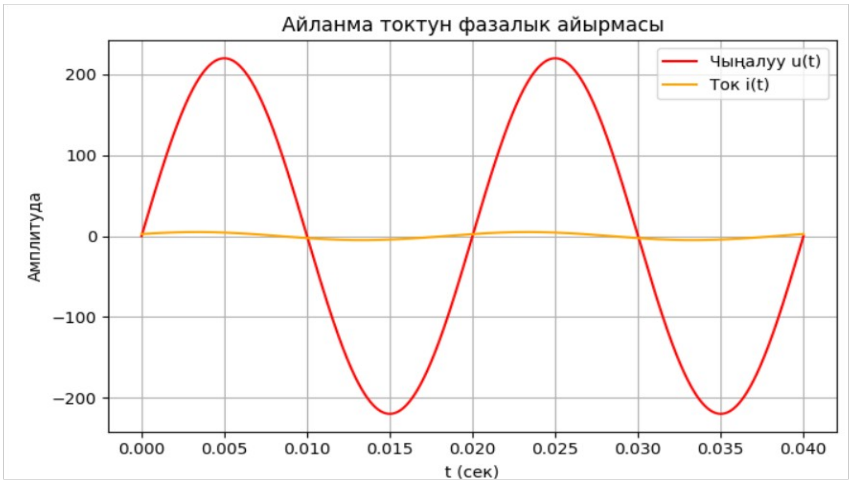
$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \frac{100\pi}{2\pi} = 50 \text{ Гц}.$$

Фазалык айырма:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{6} \approx 30°.$$

Байланыш: Ток чыңалууга караганда **30° бурчка алдыда** келет.



Жыйынтык: Мындай фазалык жылышуу реактивдүү жүктөмдөр бар чынжырларда кездешет.
Толкун теңдемеси аркылуу эсептөө.

Мисал: Толкун төмөнкүдөй функция менен сүрөттөлөт [3]:

$$u(x,t) = 3\sin(4x - 8t),$$

Максат: Амплитуданы, толкун узундугун, жыштыкты жана белгилүү бир учурда толкундун маанисин табуу.

Чыгаруу:

Амплитуда: A=3;

Толкун узундугу:

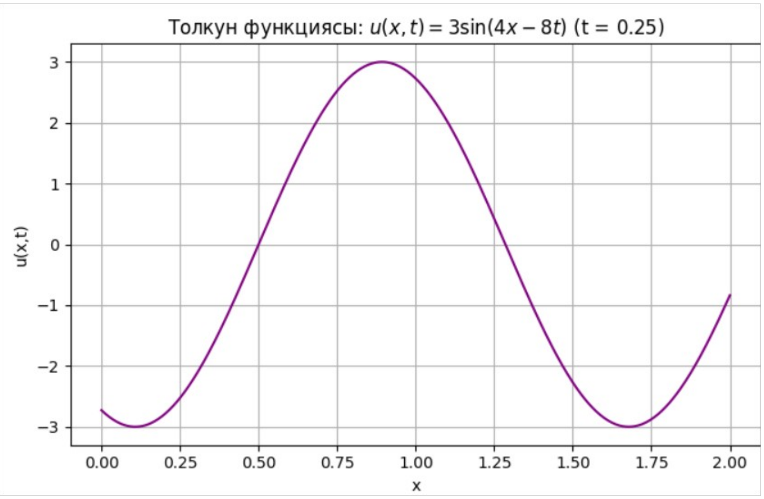
$$k = 4 = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Жыштык:

$$\omega = 8 = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi} \approx 1.27 \text{ Гц.}$$

x=1, t=0.25:

$$u(1, 0.25) = 3\sin(4 - 2) = 3\sin(2) \approx 2.727.$$



Толкун белгилүү бир учурда u≈2.727 бирдикке жетет, бул толкун күчүнүн моменттеги маанисин көрсөтөт.

Бул практикалык мисалдар параметрдик тригонометриялык теңдемелердин реалдуу дүйнө кубулуштарын моделдөөгө мүмкүнчүлүк берерин көрсөтөт. Алар аркылуу мезгилдүүлүк, фаза, жыштык, амплитуда сыяктуу чоңдуктарды так эсептөө мүмкүн. Ошондой эле, бул теңдемелерди колдонуу менен физикалык жана техникалык системалардын жүрүшүн натыйжалуу изилдөөгө шарт түзүлөт.

Жыйынтык: Бул макалада параметрдик тригонометриялык теңдемелер системаларынын теориялык негиздери, алардын негизги мүнөздөмөлөрү жана практикалык колдонулушу каралды. Изилдөөнүн жүрүшүндө мындай теңдемелердин мезгилдүүлүк, фазалык жылышуу, гармониялык түзүлүш сыяктуу касиеттери ар түрдүү табигый жана техникалык процесстерди моделдөөгө кеңири мүмкүнчүлүк бере турганы далилденди.

Гармоникалык термелүү, айланма кыймыл жана толкун процессин сүрөттөөдө бул теңдемелердин жөнөкөй жана эффективдүү математикалык аппараты катары колдонулушу көрсөтүлдү. Айланма токтун фазалык өзгөчөлүктөрүн анализдөө, электр чынжырындагы чыңалуу жана токтун өз ара байланышын түшүнүү үчүн параметрдик формалардын ролу көрсөтүлдү.

Практикалык бөлүмдө келтирилген графиктер жана мисалдар теңдемелердин реалдуу шарттарда колдонулушун так чагылдырды.

Адабияттар:

1. Абдуахадова Г., Саидазимова М., Жалилова Д., Раджабова Р., Кузиева М. Интеграция системы тригонометрических уравнений и неравенств с использованием современных ИКТ // *Экономика и социум*. – 2024. – №2(113). – С. 158–162. – [Электронный ресурс].
2. Асанова Ж.К., Жайлообекова Ж. Геометрияны окутууда предмет аралык байланыштар аркылуу окуу процессинин эффективдүүлүгүн жогорулатуу//И.Арабаев атындагы КМУнун Жарчысы. – Б. 2017. – С.38-45.
3. Елисеев С. В., Елисеев А. В. Теория колебаний: структурное математическое моделирование в задачах динамики технических объектов / Springer Nature Switzerland AG. — Cham : Studies in Systems, Decision and Control, Vol. 252, 2020. — 521 с.
4. **Фальнес Й., Курниаван А.** Математическое описание колебаний // *Ocean Waves and Oscillating Systems*. Cambridge University Press, 2020. – С. 6–45.

Рецензент: физика-математика илимдеринин кандидаты, профессордун м.а. Асанова Ж.К.