ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА. МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 681.5.015.32

СУУ ОБЪЕКТИСИНИН НЕГИЗИНИН АСТЫНДАГЫ ТОПУРАКТЫ ЭРИТҮҮ МАСЕЛЕСИН АНАЛИТИКАЛЫК ЧЕЧҮҮ

Джаманбаев Мураталы Джузумалиевич, ф.-м.и.д., профессор, И.Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университетинин «Колдонмо математика жана информатика» кафедрасынын профессору, Кыргызстан, 720044, Бишкек ш., Ч.Айтматов пр.66, e-mail: jamanbaevm@mail.ru

Зарнаева Алтынай Жыргалбековна, студент, И.Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университетинин «Колдонмо математика жана информатика» кафедрасынын 4-курсунун студенти, Кыргызстан, 720044, Бишкек ш., Ч.Айтматов пр.66, e-mail: zarnaeva.00@mail.ru

Нурбекова Нурайым Нурбековна, студент, И.Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университетинин «Колдонмо математика жана информатика» кафедрасынын кафедрасынын 4-курсунун студенти, Кыргызстан, 720044, Бишкек ш., Ч.Айтматов пр.66, gmail: nurbekovanuraiym2000@gmail.com

Аннотация: Суу сактагычтын астындагы топурактагы жылуулук алмашуу процессинин математикалык моделинин аналитикалык чечиминин курулушу каралат. Суу сактагычты сууга толтурганга чейинки кыртыштын температурасынын баштапкы абалын эске алуу менен көлмөдөгү суунун температурасынын жана L тереңдиктеги туруктуу температуранын таасири астында жылуулук берүү процессинин аналитикалык чечими курулат.

Ключевые слова: жылуулук өткөрүмдүүлүк коэффициенти, стационардык жана стационардык эмес процесстер, кыртыштын эриши, түбөлүк тоң, кыртыштын температурасы.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОТАИВАНИЯ ГРУНТА ПОД ОСНОВАНИЕМ ВОДОЕМА

Джаманбаев Мураталы Джузумалиевич, д.ф.-м.н., профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Ч. Айтматова 66, e-mail: jamanbaevm@mail.ru

***Зарнаева Алтынай Жыргалбековна* -** студент 4 курса кафедры «Прикладная математика и информатика» Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Ч. Айтматова 66, e-mail: zarnaeva.00@mail.ru

***Нурбекова Нурайым Нурбековна* –** студент 4 курса кафедры «Прикладная математика и информатика» Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Ч. Айтматова 66, gmail: nurbekovanuraiym2000@gmail.com

Аннотация: Рассматривается построение аналитического решения математической модели процесса переноса тепла в грунте под основанием водоема. Учитывая начальное состояние температуры грунта до заполнения водой водоема строится аналитическое решение процесса переноса тепла под влиянием температуры воды в пруде и постоянной температуры на глубине L.

Ключевые слова: коэффициент теплопроводности, стационарные и нестационарные процессы, таяние грунта, вечная мерзлота, температура грунта.

ANALYTICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF THAWING SOIL UNDER THE BASE OF A RESERVOIR

Djamanbaev Murataly Dzhuzumalievich **-** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, 66 Aitmatov Ave., e-mail: jamanbaevm@mail.ru

Zarnaeva Altynai Zhyrgalbekovna **-** student of the Department of Applied Mathematics and Informatics of the Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, 66 Aitmatov Ave., e-mail: zarnaeva.00@mail.ru

Nurbekova Nuraiym Nurbekovna **-** student of the Department of Applied Mathematics and Informatics of the Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, 66 Aitmatov Ave., gmail: nurbekovanuraiym2000@gmail.com

Annotation: The construction of an analytical solution of the mathematical model of the heat transfer process in the soil under the base of the reservoir is considered. Taking into account the initial state of the soil temperature before filling the reservoir with water, an analytical solution of the heat transfer process is constructed under the influence of the water temperature in the pond and a constant temperature at a depth L.

Keywords: thermal conductivity coefficient, stationary and non-stationary processes, soil thawing, permafrost, soil temperature.

Введение. В данной работе задачи протаивания и промерзания грунта решаются не как задача Стефана [4,5,7], где решение задачи теплопреноса рассматривается отдельно в зоне талого и мерзлого грунта, а подвижная граница таяния или промерзания находится из условия разницы тепловых потоков, идущих со стороны талой и мерзлой зоны грунта как решение дифференциального уравнения первого порядка [1]. В такой постановке требуется знание значения отдельных параметров о содержании количества льда и плавления льда и др., которые определяются экспериментально для конкретных грунтов. В данной работе область рассматривается как единая область и процесс переноса тепла моделируется одним уравнением теплопроводности с соответствующими граничными условиями. Граница раздела между талым и мерзлым грунтом находится как нулевая изотерма [9].

Постановка задачи. В зависимости от сезона года основание водоема до наполнения водой имеет соответствующее начальное состояние [3]. Затем пруд заполняется водой, температура которой считается постоянной и плюсовой. На определенной глубине также постоянно поддерживается минусовая температура грунта, как вечная мерзлота. Требуется построить температурное поле до установления процесса теплопереноса т.е. найти время установления процесса. Математически данная задача моделируется следующим образом: уравнением в частных производных

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \mathrm{a}^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{L}, \ \mathrm{t} > 0 \tag{1}$$

и граничными условиями

$$\mathrm{T}(0,\mathrm{t}) = \mathrm{T}_1, \quad \mathrm{T}(\mathrm{L},\mathrm{t}) = \mathrm{T}_2 \tag{2}$$

Начальное условие температуры грунта под основанием предпологается:

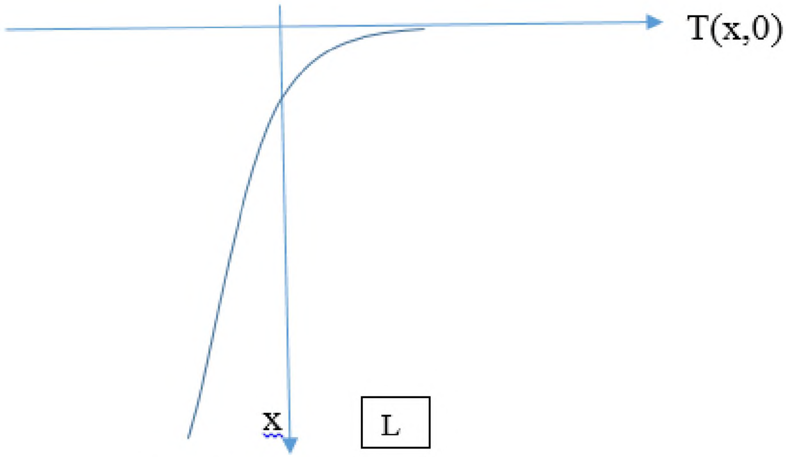

Рис.1. Начальное условие температуры

Для построения аналитического решения начально-краевой задачи, необходимо данную кривую апроксимировать в виде одной ветви параболы или какой либо другой функциональной зависимостью.

$$T(x,0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

Постоянные коэффициенты a, b, c – определяются из данных наблюдений температуры грунта в различных точках. Если данные наблюдения известны во многих точках области, то постоянные коэффициенты можно определить с помощью метода наименьших квадратов. В крайнем случае данные о температуре должны известны в трех точках, а именно: на дневной поверхности; в точке, где начинается нулевая температура; на глубине L , где начинается вечная мерзлота. Точность решения вышеприведенной математической модели зависит от точности аппроксимикации начального условия [9].

Алгоритм построения аналитического решения. Решение данной задачи строится в виде суммы двух слагаемых: стационарное и нестационарное.

$$T(x,t) = T_{стац}(x) + T_{нест}(x,t) \tag{4}$$

Процесс переноса тепла начинается под действием постоянной температуры воды на дне водоема T_1 и постоянной температуры вечной мерзлоты на глубине L равной T_2. После определенного времени теплоперенос переходит в стационарное состояние и примет линейное распределение от T_1 до T_2. Уравнение установившегося переноса тепла примет вид:

$$\frac{\partial^2 T_{стац}(x)}{\partial x^2} = 0 \tag{5}$$

решение которого равно:

$$T_{стац}(x) = Ax + B,$$

где постоянные A, B определяются из граничных условий (2)

$$T_{стац}(x) = \left(\frac{x}{L}\right)(T_2 - T_1) + T_1 \tag{6}$$

Нестационарное решение ищем как решение краевой задачи с нулевыми граничными условиями и начальным условием (3). Ниже приводится переход из начальной краевой задачи (1) – (3) в новую краевую задачу относительно нестационарного решения [8]

$$\frac{\partial T_{нест}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T_{нест}}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le L, \; t > 0 \tag{7}$$

$$T_{нест}(0,t) = 0, \quad T_{нест}(L,t) = 0 \tag{8}$$

$$T_{нест}(x,0) = \varphi(x) - \left(\frac{x}{L}\right)(T_2 - T_1) + T_1, \tag{9}$$

Решение уравнения (7) находится методом разделения переменных. Общее решение имеет вид:

$$T_{нест}(x,t) = (C\cos(\lambda x) + D\sin(\lambda x))\, e^{-\lambda^2 a^2 t} \tag{10}$$

Произвольные постоянные C, D, λ определяются из начальной и граничных условий. Из краевых условий следует, что C = 0, $\lambda = \frac{n\pi}{L}$. Коэффициент D определяется из начального условия

$$T_{нест}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-(\frac{\pi n a}{L})^2 t} \sin\frac{\pi n}{L} x = \varphi(x) - [(\frac{x}{L})(T_2 - T_1) + T_1] = \overline{\varphi(x)} \tag{11}$$

как коэффициенты разложения ряда Фурье

$$D_n = \frac{2}{L}\int_0^L \overline{\varphi(x)} \sin\frac{\pi n}{L} x dx \tag{12}$$

Постановка задачи. Согласно изложенному алгоритму, рассмотрен процесс протаивания мерзлого грунта под основанием водоема глубиной L = 30m. До наполнения водоема температура грунта на дневной поверхности равнялась $T_1 = +2\,^0C$ и на глубине L = 30m, $T_2 = -2^0C$.

Схематический чертеж начального состояния температуры грунта приведен на рис. 1. Данная кривая апроксимировалась параболой вида:

$$T(x,0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0.0368x^2 - 1.2391x + 2$$

Водоем наполняется водой, температура которой равна $T_2 = +8^0C$. В качестве примера рассматривался песчаник, со значением коэффициента температуропроводности равной 0.004283м^2/час.

Коэффициенты разложения вычислялись по формуле:

$$D_n = \frac{2}{L}\int_0^L [0.0368x^2 - 1.2391x + 2 - ((\frac{x}{L})(T_2 - T_1) + T_1)] \sin\frac{\pi n}{L} x dx \tag{13}$$

Общий вид:

$$T(x,t) = T_{стац}(x) + T_{нест}(x,t) = ((\frac{x}{L})(T_2 - T_1) + T_1) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-(\frac{\pi n a}{L})^2 t} \sin\frac{\pi n}{L} x \tag{14}$$

Количество членов в разложении обшего решения определялись из условия сходимости ряда с заданной точностью 0.0003. Такая точность достигается при n = 30. Результаты расчета показаны на рис. 2. Как видно из рисунка для грунта песчаника теплоперенос устанавливается после 30240 часов или примерно за 3.5 года. Процесс протаивания доходит до 15 метров за 3.5 года [9].

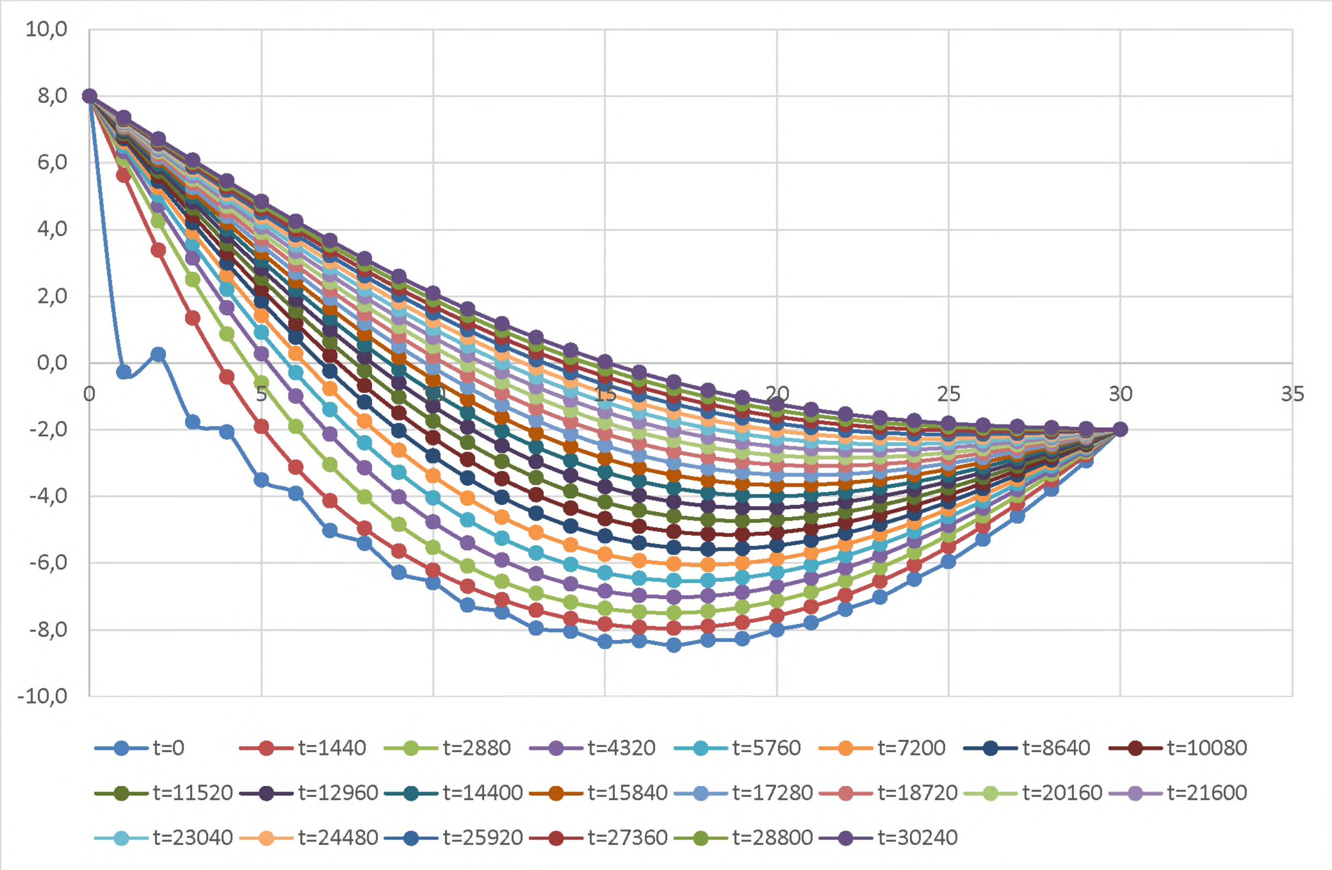

Рис. 2. Значения температуры в разные моменты времени по глубине

Как видно из графика нестационарное решение стягивается к стационарному решению примерно за 3.5 года и дальше не изменяется, что соответствует физике процесса.

Список использованных источников

1. Анискин Н.А. Температурно-фильтрационный режим основания и плотины Курейской ГЭС во втором правобережном понижении. – Москва: Вестник МГСУ 2/2006. С.43-52.

2. Горелик Я.Б., Колунин В.С., Удивительная мерзлота. Криосфера земли 2000. т.4.№2. С. 41-51.

3. Джаманбаев М.Дж. Влияние влажности на температурный режим грунта. - Бишкек: Наука, новые технологии и инновации №1, 2014. С. 10-12.

4. Джаманбаев, М. Д. Процесс загрязнения в зоне талого грунта / М. Д. Джаманбаев, М. К. Чиныбаев // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. – 2015. – № 1(34). – С. 234-238. – EDN WGYBGP.

5. Томирдиадо С.В. Тепловые расчеты оснований в районах вечной мерзлоты. –Магадан, 1963. – 104 с.

6. Цытович Н.А. Механика мерзлых грунтов (общая и прикладная). -Москва: Высшая школа,1973. -446 с.

7. Цытович Н.А., И.Я Баранов, и др. Основы геокриологии (мерзлотоведение). Инженерная геокриология часть II. АН СССР. -Москва, 1959.- 365с.

8. Шарма Дж.Н., Сингх К., Уравнения в частных производных для инженеров. –Москва, 2002. -320с.

9. Джаманбаев, М. Д. Оценка степени влияния природных факторов на промерзание грунта / М. Д. Джаманбаев, К. Шекеев, У. Д. Душенова // Известия Кыргызского

государственного технического университета им. И. Раззакова. – 2019. – № 2-1(50). – С. 163-168. – EDN HJNEFP.