УДК 517.949.6

ФУНКЦИОНАЛДЫК-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИН КОЛДОНУУ МЕНЕН ТЕРМЕЛҮҮ РЕЖИМИНДЕГИ ОБЪЕКТИЛЕРДИ ИЗИЛДӨӨ

Амир кызы Бибинур, магистрант, М.Адышев атындагы Ош технологиялык университети, 723503, Кыргыз Республикасы, Ош шаары, Н.Исанов көчөсү 81

Жалалдинов Каныбек Мубаракович, магистрант, М.Адышев атындагы Ош технологиялык университети, 723503, Кыргыз Республикасы, Ош шаары, Н.Исанов көчөсү 81

Аннотация: Бул макалада кыймылдуу жүктөм менен процесстерди изилдөө үчүн мүнөздүү маселе каралат. Татаал касиеттери бар чөйрөдө матрицалык дифференциалдык операторлордун символдору ар кандай үн ылдамдыктары бар толкун операторлорунун символдорунун факторлору катары камтылган, ошондуктан фундаменталдык чечимдер, эреже катары, бирдей ылдамдыктагы толкун теңдемелеринин фундаменталдык

чечимдеринин суперпозициясы болуп саналат. Алардын негизинде интегралдык операторлордун ядросу курулат жана алардын чектик маселелердин чечилишин берет.

Өзөктүү сөздөр: Сейсмикалык толкундун дифракциялары, четки маселелер, үндүн ылдамдыгы, гиперболика жана аралаш тибиндеги дифференциалдык теңдемелердин четки маселелери, функциянын жалпыланган усулу, функционалдык-дифференциалдык теңдемелер, Гриндин функциясы, Гаусстун формуласы, чектелген интегралдык теңдемелер, Хевисайдын функциясы, Лепшицанын шарты, Неймандын маселеси, Фредгольмдун теңдемеси.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ РЕЖИМАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Амир кызы Бибинур, магистрант, Ошский технологический университет им. М. Адышева, 723503, Кыргызская Республика, г.Ош, ул. Н. Исанова, 81.

Жалалдинов Каныбек Мубаракович, магистрант, Ошский технологический университет им. М. Адышева, 723503, Кыргызская Республика, г.Ош, ул. Н. Исанова, 81.

Аннотация. В статье рассматривается задача, типичная для изучения процессов с движущимися нагрузками. В средах с усложненными свойствами символы матричных дифференциальных операторов содержатся в качестве сомножителей символов волновых операторов с разными звуковыми скоростями, поэтому фундаментальные решения, как правило, представляют собой суперпозицию фундаментальных решений равноскоростных волновых уравнений. А на их основе строятся ядра интегральных операторов, дающих решение краевых задач.

Ключевые слова. Дифракция сейсмических волн, краевые задачи, звуковая скорость, краевые задачи гиперболического и смешанного типов, метод обобщенных функций, функционально-дифференциальные уравнения, функция Грина, формула Гаусса, граничные интегральные уравнения (ГИУ), функция Хэвисайда, условия Липшица, задача Неймана, уравнения Фредгольма.

INVESTIGATION OF OBJECTS WITH VIBRATIONAL MODES USING SOLUTIONS OF FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Amir kyzy Bibinur, undergraduate, Osh Technological University named after M. Adyshev, 723503, Kyrgyz Republic, Osh, st. N. Isanova, 81

Zhalaldinov Kanybek Mubarakovich, undergraduate, Osh Technological University named after M. Adyshev, 723503, Kyrgyz Republic, Osh, st. N. Isanova, 81

Annotation. This article deals with the problem of typical learning of the processes with the moving loads. The symbols of matrix differential operators in the area with the complicated properties are contained as the symbols of wave operators with different subsonic velocities, for this reason they represent super position of fundamental solution of equal rate (speed) equation. And on their basis the kernel of integral operators are built in the given of boundary problems.

Keywords. Seismic wave diffraction, boundary value problems, sound velocity, boundary value problems of hyperbolic and mixed types, method of generalized functions, functional differential equations, Green's function, Gauss formula, boundary integral equations (BIE), Heaviside function, Lipschitz conditions, Neumann problem, Fred holm equations.

Введение. Явления с движущимися нагрузками широко распространены на практике. К ним относятся разнообразные процессы, связанные с передвижением транспорта в различных средах, либо перемещением транспортируемых грузов в тоннелях и трубопроводах различного назначения. К данному классу задач можно отнести задачи дифракции сейсмических волн на протяженных подземных сооружениях [8,9].

При математическом моделировании таких процессов приходится строить решения краевых задач в классе бегущих функций, параметрических и автомодельных по ряду переменных. Параметр задачи – скорость движения источника возмущений в среде – существенно влияет на тип уравнений движения, который зависит от скоростей распространения волн в средах, так называемых звуковых скоростей. Их может быть несколько в зависимости от вида волн. В идеальной акустической среде одна звуковая скорость (c), с которой распространяется волна движения, а в изотропной упругой среде их уже две (c_1, c_2): одна определяет скорость распространения волн объемной деформации, а второй – сдвиговой. В многокомпонентных средах звуковых скоростей становится больше. Тип дифференциальных уравнений, описывающих движения среды, меняется в зависимости от отношения скорости источника возмущений к звуковым скоростям. При этом приходится решать краевые задачи гиперболического и смешанного типов. Для их решения был разработан метод обобщенных функций (МОФ), который позволяет использовать универсальный подход к решению краевых задач во всем диапазоне скоростей бегущих решений [7].

Основные идеи метода обобщенных функций были изложены в [4] для решения начально – краевых задач для волнового уравнения в N – мерных пространствах, однако его можно использовать с успехом для решения уравнений любого типа.

Здесь этот метод используется для построения бегущих решений волнового уравнения при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях движения источника возмущений. Он включает в себя следующие этапы:

– постановка краевой задачи в пространстве обобщенных функций;
– построение динамических аналогов Грина в пространстве ОФ и их регулярных интегральных представлений;
– построение функции Грина и других фундаментальных решений волнового уравнения в классе бегущих функций;
– построение динамических аналогов формулы Гаусса для фундаментальных решений;
– построение граничных интегральных уравнений (ГИУ), определяющих решение задачи.

Постановка задачи. Интегрально – функциональные уравнения при N=1.

В этом случае точка пространства имеет координаты (x_1, z), и мы имеем плоскую задачу. Фундаментальное решение уравнения (1.2.4) [3] U_0 – это функция Римана:

$$U_0 = \frac{1}{2m}\theta(z - m|x|), \quad U_1 = \frac{1}{2m}(z - m|x|)_+, \tag{1}$$

$$T_1 = \frac{1}{2m}(n_z - mn_1 \operatorname{sgn} x)\theta(z - m|x|).$$

Возможны два случая: область определения либо полоса $S = \{(x,z) : |x| < a\}$, либо полуплоскость $S = \{(x,z) \in R_z : x_2 > 0\}$. Обозначим

$$a_1 = a, a_2 = -a, u_i(z) = u(a_i, z),$$

$$u_i \frac{\partial u}{\partial x_j}(z) = \frac{\partial u}{\partial x_j}, (j = x, z) \text{ при } y = a_i.$$

В этом случае на S нормаль $n = (\operatorname{sgn} x, 0), \delta_S(x)\theta(z) = \theta(z)(\delta(x+a) - \delta(x-a)),$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}, \qquad \theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 1/2, & z = 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. При $M > 1$ решение краевой задачи в полосе $|x| < a, \forall z$, при условиях: $u(x,0) = 0, \dfrac{\partial u}{\partial z}(x,0) = 0, \dfrac{\partial u}{\partial x_y}(z)$ интегрируемы на $(0,\infty)$, имеет вид [2]

$$\begin{aligned} 2m\hat{u}(x,z) = F_+(x,z) + \sum_{i=1}^{2}(-1)^i \theta(z - m|x - a_i|\int_0^{z-m|x-a_i|} \frac{\partial u}{\partial x}(z)dz - \\ - m\operatorname{sgn}(x-a)\theta(z - m|x-a)|u_1(z - m|x-a)| + \\ + m\operatorname{sgn}(x+a)\theta(z - m|x+a)|u_2(z - m|x+a)|, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$F_+(x,z) = \theta(z)\theta(a - |x|)\int_0^z d\xi \int_{k_1}^{k_2} g(y,\xi)dy, \quad k_1 = \max(-a, x - (x-\xi)/m),$$
$$k_2 = \min(a, x + (x-\xi)/m),$$

а на границе $(|x| = a, \forall z)$ решение удовлетворяет системе интегрально-функциональных уравнений с запаздыванием:

$$\begin{aligned} mu_1(z)\theta(z) = F_1(z) - \theta(z)\int_0^z \frac{\partial u_1}{\partial x}(\xi)d\xi + \theta(z - 2ma) \times \\ \times \int_0^{z-2ma} \frac{\partial u_2}{\partial x}(\xi)d\xi + mu_2(z - 2ma)\theta(z - 2ma), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} mu_2(z)\theta(z) = F_2(z) - \theta(z - 2ma)\int_0^{z-2ma} \frac{\partial u_1}{\partial z}(\xi)d\xi + \theta(z) \times \\ \times \int_0^z \frac{\partial u_2}{\partial x}(\xi)d\xi + mu_1(z - 2ma)\theta(z - 2ma), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$F_1(z) = \theta(z)\int_0^z d\xi \int_{k_1}^a g(y,\xi)dy, \quad F_2(z) = \theta(z)\int_0^z d\xi \int_{-a}^{k_2} g(y,\xi)dy.$$

Доказательство. Соотношения (2) позволяют записать формулы (2.2.3) [4] леммы 3.2 в следующем интегральном виде:

$$2m\hat{u} = F_+(x,z) + \sum_1^2 (-i)^i \theta(z - m|x - a_1|) \int_0^{z-m|x-a_1|} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi) - m\operatorname{sgn}(x - a_1)\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi) \right) d\xi$$

(здесь учтены условия при $z = 0$). Интегрируя второе слагаемое справа по ξ получим (3). В силу леммы 1 формулы (3) справедливы для $x \neq a_i$. С учетом до определения функции Хевисайда в нуле, они справедливы и при $x = a_i$ и приводятся к виду (4), (5). Покажем это.

Для этого запишем равенство (3) для точки $x = (a - \varepsilon, z), 0 < \varepsilon < mz$. Так как $x \in S^-$,

$$\begin{aligned} 2mu(a - \varepsilon, z) = \\ = F_+(a - \varepsilon, z) - \theta(z - m\varepsilon)\int_0^{z-m\varepsilon} \frac{\partial u_1}{\partial x}(\xi)d\xi - mu_1(z - m\varepsilon)\theta(z - m\varepsilon)\operatorname{sgn}(-\varepsilon) + \\ + m\operatorname{sgn}(2a - \varepsilon)u_2(z - |m(2a - \varepsilon)|)\theta(z - |m(2a - \varepsilon)|) + \end{aligned}$$

$$+\theta\big(z-\left|m(2a-\varepsilon)\right|\big)\int_0^{z-\left|m(2a-\varepsilon)\right|}\frac{\partial u_2}{\partial x}(\xi)d\xi.$$

Переходя в этом равенстве к пределу по $\varepsilon\to 0$, получим

$$2mu_1(z)=F_1(z)-\theta(z)\int_0^{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x}(\xi)d\xi+mu_1(z)\theta(z)+$$

$$+mu_2(z-2ma)\theta(z-2ma)+\theta(z-2ma)\int_0^{z-2ma}\frac{\partial u_2}{\partial x}(\xi)d\xi.$$

Откуда следует (4). Аналогично доказывается второе уравнение (5). Эти уравнения при заданных $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ на прямых $x=\pm a$ являются функциональными с запаздыванием по z, так как связывают последующие по z граничные значения с предыдущими. Пошаговым интегрированием по z от 0 они позволяют определить u_1 и u_2 на каждом последующем шаге и, далее по формулам (3), внутри полосы.

Решение краевой задачи для полуплоскости. Из теоремы 1 следует, что

$$2mu=F_+(x,z)+\theta(x)\theta(z-mx)\left\{mu(0,z-mx)+\int_0^{z-mx}\frac{\partial u}{\partial x}(0,\xi)d\xi\right\},$$

где $F_+(x,z)=\theta(x)\theta(z)\int_0^z d\xi\int_{k_1}^{x+(z-\xi)/m}g(y,\xi)dy.$

Решение задачи для полуплоскости $x>0$ дает одно интегральное уравнение

$$mu(0,z)=F_0(z)+\theta(z)\int_0^z\frac{\partial u}{\partial x}(0,\xi)d\xi,$$

где $F_0(z)=\theta(z)\int_0^z d\xi,\int_0^{(z-\xi)/m}g(y,\xi)dy.$ В результате решение краевой задачи для полуплоскости имеет вид [5]:

$$2mu=F_+(x,z)-\theta(x)\theta(z-mx)\{2mu_D(z-mx)-F_0(z-mx)\},$$

а решение второй краевой задачи:

$$2mu=F_+(x,z)-\theta(x)\theta(z-mx)\left\{F_0(z-mx)+2\int_0^{z-mx}p_D(\xi)d\xi\right\}.$$

На этом закончим построение решений для сверхзвуковых скоростей, хотя формула (2) позволяет получать интегральные представления для $\hat{u}$ при разных N. Заметим, что, в отличие от дозвукового случая, уже при $N=3$ функция Грина соответствующего уравнения является сингулярной обобщенной функцией простой слой на конусе $z>m\|x\|$.

Это требует для каждого N отдельного построения ГИУ (граничных интегральных уравнений), при этом возникают довольно трудные задачи определения сверток сингулярных функций, каковыми являются, например, слои на конусе и цилиндре. Подобные задачи возникают при решении начально-краевых задач для волнового уравнения.

При сверхзвуковых скоростях имеем сингулярные ГИУ неклассического типа, поскольку область интегрирования по x существенно зависит от z, ядра уравнений имеют особенности на фронтах фундаментальных решений и сильные особенности при $r=0$, граничные функции, помимо производных по нормали, содержат и касательные производные по z. Изучение таких типов сингулярных ГИУ представляет самостоятельную математическую задачу [1,9].

Однако численная реализация этих ГИУ на основе метода граничных элементов вполне выполнима. Отметим, что использование разностных методов при решения краевых задач для гиперболических уравнений сталкивается с большими трудностями на фронтах ударных волн, где нет дифференцируемости решений, что делает невозможной запись этих уравнений на фронтах, положение которых в пространстве-времени также подлежит определению. Здесь эта проблема снимается, так как искомая функция $u(x,z)$ определяется через ее производные на границе области, часть из которых известна, а другая вычисляется при решении полученных здесь граничных интегральных уравнений. Для решения ГИУ удобно использовать метод конечных элементов [8].

Здесь мы воспользовались непрерывностью третьего интеграла в первом равенстве, что позволяет записать его на границе в виде интеграла со слабой особенностью в силу условия Липшица для $u(y,t)$, а далее свойством интеграла в смысле главного значения, который для интегрируемых функций совпадает со значением Лобановского интеграла. Перенося $0{,}5u(x^*,z^*)$ в левую часть, получим формулу теоремы для граничных точек.

Легко видеть, что при $(x,z)\in D$ формула является сингулярным граничным интегральным уравнением для решения задачи Неймана [6]. Для задачи Дирихле эта же формула является интегральным уравнением Фредгольма первого рода с полярным ядром. Интегральная запись формулы для конкретных N здесь не вызывает затруднений. Достаточно подставить в формулу фундаментальные решения (1)-(2). Вопросы разрешимости такого типа уравнений достаточно изучены [8,9].

Вывод. Рассмотренные здесь задачи типичны для изучения процессов с движущимися нагрузками. В средах с усложненными свойствами символы матричных дифференциальных операторов содержат в качестве сомножителей символы волновых операторов с разными звуковыми скоростями, поэтому фундаментальные решения, как правило, представляют собой суперпозицию фундаментальных решений равноскоростных волновых уравнений. А на их основе строятся ядра интегральных операторов, дающих решение краевых задач.

Список литературы

1. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. – Свердловск:Уралский гос.университет, 2010г. – 273с.
2. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 2011г.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 2000г. – 463с.
4. Агафанов С.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения –М.: Academia, 2018, -352 с.
5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнение, -М.: –МЦНМО, 2012, -344с.
6. Босс В. Лекции по математике Т.2. Дифференциальные уравнения, -М.: КД Либроком, 2012, -208с.
7. Кутунаев Ж.Н. Смешанная задача о колебаниях полуограниченной прямой, Республика Казахстан, Математический журнал 2005, №4(18) – С.86-96.
8. Математическое моделирование термообесцвечивания электронных f-центров окраски в кристаллах kclc различными концентрациями са / М. Ч. Осконбаев, З. К. Абдимуталипова, Мамаразак Кызы Жылдыз, А. Б. Осмоналиев // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. – 2016. – № 3-1(39). – С. 169-171. – EDN WWYSSZ.
9. Дуйшеналиев, Т. Б. Математическое описание конфигурации упругой пластины при изменении ее напряженно-деформированного состояния / Т. Б. Дуйшеналиев, Р. Н. Аскарбеков, К. Искендер // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. – 2015. – № 1(34). – С. 188-192. – EDN WGYBCJ.