УДК 517.928

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕЛЕР ТЕОРИЯСЫНДА ПРЕДЕЛГЕ ӨТҮҮ ШАРТТАРЫН АНАЛИЗДӨӨ (ЧЫНЫГЫ ӨЗГӨРМӨ УЧУРУ)

Тойгонбаева Айзат, ф.-м.и.к., доц.
ОшМУ, Ош шаары, Кыргыз Республикасы
atoigonbaeva@mail.ru

Аннотация. *Бул макалада сингулярдык козголгон биринчи тартиптеги теңдеме каралды. Кубулган теңдеменин тартуу интервалынын аныктамасы киргизилди. Сингулярдык козголгон теңдемелер теориясында тартуу интервалдарынын жашашын далилдөө негизги маселелердин бири болуп саналат. Бул маселе жалпы учурда А.Н.Тихонов тарабынан чечилген. А.Н.Тихонов келтирген шарттар кээ бир теңдемелердин классынын мисалында анализденди. Айрым теңдемелердин оң жагындагы айрым функциялар үзгүлтүксүз болбогон, бириктирилген системанын тынч абал чекитинин туруктуулугу бузулган учурлар каралды. Тартуу интервалынын жашашы далилденди.*

Түйүн сөздөр. *Сингулярдык козголуу, кубулган теңдеме, тартуу интервалы, туруктуулук, тынч абал чекит,удаалаш жакындаштыруу, жыйналуучулук, үзүлүү.*

АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ПЕРЕДЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛУЧАЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО)

Тойгонбаева Айзат, к.ф.-м.н., доц.
ОшГУ, город Ош, Кыргызская Республика
atoigonbaeva@mail.ru

Аннотация. *В данной работе рассматривается сингулярно возмущенное уравнение первого порядка. Вводится определение интервала притяжения вырожденного уравнения. В теории сингулярно возмущенных уравнений доказательство существования интервалов притяжений является одной из основных проблем. Эта проблема в наиболее общем виде решена А.Н.Тихоновым. На примере некоторых классов уравнений проведен анализ условий сформулированных А.Н.Тихоновым. В частности рассмотрены случаи когда нарушается условие устойчивости точки покоя присоединенной системы, отдельные функции в правой части уравнения не являются непрерывными. Доказано существование интервалов притяжений.*

Ключевые слова. *Сингулярное возмущение, вырожденное уравнение, интервал притяжения, устойчивость, точка покоя, последовательные приближения, сходимость, разрывы.*

ANALYSIS OF LIMIT TRANSITION CONDITIONS IN THE THEORY OF SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS (THE CASE OF A VALID VARIABLE)

Toigonbaeva Aizat, c.ph.-m.s., Associate Professor.
Osh State University, Osh city, Kyrgyz Republic
atoigonbaeva@mail.ru

Abstract**:** *In this paper, we consider a singularly perturbed equation of the first order. The definition of the interval of attraction of the degenerate equation is introduced. In the theory of singularly perturbed equations, proving the existence of attraction intervals is one of the main problems. This problem is solved in the most general form by A. N. Tikhonov. On the example of some classes of equations, the analysis of the conditions formulated by A. N. Tikhonov is carried* *out. In particular, we consider cases when the stability condition of the rest point of the attached system is violated, and the individual functions on the right side of the equation are not continuous. The existence of attraction intervals is proved.*

Keywords. *Singular perturbation, degenerate equation, attraction interval, stability, rest point, successive approximations, convergence, discontinuities.*

В теории сингулярно возмущенных уравнений одним из основных проблем является формулировка условий обеспечивающие предельный переход. Кратко данную проблему можно сформулировать так.

Пусть рассматривается система уравнений

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=F(t,x(t,\varepsilon),\varepsilon), \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ – вещественный параметр; $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $F=(F_1,\ldots,F_n)$; $[t_0,T]$ – отрезок действительной оси.

В (1) полагая, $\varepsilon=0$ получим систему уравнений

$$F(t,\xi(t),0)=0. \tag{3}$$

(3) называется вырожденная система соответствующая системе (1).

Пусть $\xi(t)=\xi 0(t)$ – изолированное решение системы (3) [1].

Определение. *Пусть существует: 1.* $x(t,\varepsilon)$ *– решение задачи (1) - (2) определенное в* $[t_0,T]$. *2.* $\forall t\epsilon[t_0,T]$ $(x(t,\varepsilon)\to\xi(t)$ по $\varepsilon)$. *При выполнении условий 1-2 интервал* $[t_0,T]$ *назовем интервалом притяжения решения* $\xi_0(t)$.

Доказательство существования интервалов притяжений, при определенных условиях, определяет задачу о предельном переходе.

Задача о предельном переходе в наиболее общем виде сформулирована А.Н.Тихоновым [1].

Приведем примеры уравнений, когда нарушаются условия теоремы Тихонова [1], тем не менее возможно предельный переход.

Пусть

$$F(t,x(t,\varepsilon),\varepsilon)=a(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon f(t,x(t,\varepsilon)), \tag{4}$$

где $x(t,\varepsilon)$ – скалярная функция и выполняются условия:

I. $a(t)<0$ при $t_0\le t<T_0$; $a(T_0)=0$; $a(t)>0$ при $T_0<t\le T$ и $a(t)$ – непрерывна на отрезке $[t_0,T]$

II. $\Delta=\{(t,x),t\epsilon[t_0,T],|x|\le\delta-$некоторая постоянная не зависящая от $\varepsilon\}$.

$\forall(t,x)\epsilon\Delta(f(t,0)\equiv0)$ и $\forall((t,\tilde{x}),(t,\tilde{\tilde{x}}))\epsilon\Delta(|f(t,\tilde{x})-f(t,\tilde{\tilde{x}})|\le M_1|\tilde{x}-\tilde{\tilde{x}}|)$. Здесь и далее все постоянные не зависящие от ε будем обозначать буквами $M_1,M_2,\ldots$.

В рассматриваемом случае вырожденное уравнение имеет решение $\xi 0(t)\equiv0$ и не выполняется условие асимптотической устойчивости точки покоя для присоединенного уравнения, на всем отрезке $[t_0,T]$.

При выполнении условий I и II решим задачу предельного перехода решения задачи (1) - (2) с учетом (4). Задачу (1) - (2) заменим следующим

$$x(t,\varepsilon)=x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon}+\int_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau,\varepsilon))exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \tag{5}$$

где $A(t)=\int_{t_0}^{t} a(s)ds$.

Согласно I, имеем $A'(t)=a(t)$. Тогда $A(t)$ убывает при $t_0\le t<T_0$ и возрастает при $T_0<t\le T$. Возможны следующие варианты: $A(t)<0$, $A(t)=0$, $A(t)>0$. Если $A(t)>0$, то существует $T_1<T$ и $A(T_1)=0$.

К (5) применим метод последовательных приближений. Последовательные приближения определим следующим образом

$$x_m(t,\varepsilon)=x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon}+\int_{t_0}^{t} f\big(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon)\big)exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \tag{6}$$

$$x_0(t,\varepsilon)\equiv0,\ m=1,2,\ldots.$$

Оценим последовательные приближения (6). Имеем

$$|x_1(t,\varepsilon)| = |x^0| exp\frac{A(t)}{\varepsilon},$$

$$|x_2(t,\varepsilon)| \le |x_1(t,\varepsilon)| + \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau,x_1) exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right| \le |x_1(t,\varepsilon)| +$$

$$+\left|\int_{t_0}^{t} M_1|x_1| exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right| \le |x_1(t,\varepsilon)| + M_1|x^0| exp\frac{A(t)}{\varepsilon}(t-t_0) =$$

$$= |x_1(t,\varepsilon)|\big(1+M_1(t-t_0)\big),$$

$$|x_3(t,\varepsilon)| \le |x_1(t,\varepsilon)| + \left|\int_{t_0}^{t} M_1|x_2| exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right| \le |x_1(t,\varepsilon)| +$$

$$+M_1\left|\int_{t_0}^{t}\big(1+M_1(\tau-t_0)\big)|x^0| exp\frac{A(t)}{\varepsilon}d\tau\right| = |x_1(t,\varepsilon)| \times \left(1+M_1(t-t_0)+\frac{\big(M_1(t-t_0)\big)^2}{2!}\right).$$

Продолжая, получим

$$|x_m(t,\varepsilon)| \le |x_1(t,\varepsilon)|\left(1+M_1(t-t_0)+\ \ldots + \frac{\big(M_1(t-t_0)\big)^{m-1}}{(m-1)!}\right).$$

Отсюда имеем

$$|x_m(t,\varepsilon)| \le |x_1(t,\varepsilon)| e^{M_1(t-t_0)} \le |x_1(t,\varepsilon)| e^{M_1(T-t_0)}.$$

Таким образом

$$\forall t\epsilon[t_0,T]\ \big(|x_m(t,\varepsilon)| \le M_2|x_1(t,\varepsilon)|,\ M_2 = e^{M_1(T-t_0)}\big) \qquad (7)$$

Теперь докажем равномерную сходимость последовательных приближений (6). Для этого докажем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}(x_m - x_{m-1}). \qquad (8)$$

Оценим разность

$$|x_m - x_{m-1}|,\ m = 1,2, \ldots.$$

Имеем

$$|x_1| = |x^0| exp\frac{A(t)}{\varepsilon},$$

$$|x_m - x_{m-1}| \le \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau,x_{m-1}) - f(\tau,x_{m-2})| exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right| \le$$

$$\le \left|\int_{t_0}^{t} M_1|x_{m-1}-x_{m-2}| exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right|.$$

$$|x_m - x_{m-1}| \le M_1\left|\int_{t_0}^{t} |x_{m-1}-x_{m-2}| exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right|.$$

Отсюда получим

$$|x_2 - x_1| \le M_1|x^0| exp\frac{A(t)}{\varepsilon}(t-t_0) = |x_1(t,\varepsilon)|M_1$$

$$|x_3 - x_2| \le M_1^2|x^0| exp\frac{A(t)}{\varepsilon}\frac{(t-t_0)^2}{2!} = |x_1(t,\varepsilon)|\frac{\big(M_1(t-t_0)\big)^2}{2!}.$$

Далее

$$|x_m - x_{m-1}| \le |x_1(t,\varepsilon)|\frac{\big(M_1(t-t_0)\big)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Таким образом

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}(x_m - x_{m-1})\right| \le \sum_{m=1}^{\infty}|x_m - x_{m-1}| \le |x_1(t,\varepsilon)|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\big(M_1(t-t_0)\big)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Ряд в правой части неравенства сходится равномерно для любого t и ее сумма равна

$$exp M_1(t-t_0).$$

–

Тогда

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}(x_m - x_{m-1})\right| \le |x_1(t,\varepsilon)| exp M_1(t-t_0) \le M_2|x_1(t,\varepsilon)|.$$

Если учесть $\forall t\epsilon[t_0,T]$ $(|x_1(t,\varepsilon)| \le |x^0|)$, то ряд $\sum_{m=1}^{\infty}(x_m - x_{m-1})$ для значений $t\epsilon[t_0,T]$ сходится равномерно. Отсюда следует, что для $t\epsilon[t_0,T]$ последовательность функций (6) равномерно сходится к некоторой функции $x(t,\varepsilon)$, которая является решением задачи (1) – (2) (при условии 4). Для этого решения, согласно (7), справедлива оценка

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_2|x_1(t,\varepsilon)|, t\epsilon[t_0,T] \tag{9}$$

Если $t_0 \ll t \ll T$, то из (9) следует

$$|x(t,\varepsilon)| \to 0 \text{ по } \varepsilon. \tag{10}$$

Возможность предельного перехода на интервале (t_0,T) доказана.

Примечание. Если функция $a(t)$ во внутренних точках имеет несколько точек разрыва первого рода, то возможно предельный переход на всем интервале (t_0,T).

Пусть

$$a(t) = \begin{cases} a_1(t) < 0, & t_0 \le t \le t_1, \\ a_2(t) < 0, & t_1 \le t \le t_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_k(t) < 0, & t_{k-1} \le t \le T_0, \\ b_1(t) > 0, & T_0 \le t \le T_1, \\ b_2(t) > 0, & T_1 \le t \le T_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_m(t) > 0, & T_{m-1} \le t \le T. \end{cases}$$

Тогда

$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau < 0, t\epsilon[t_0,T]$, если только $A(t) \le 0$.

Примером $a(t)$ может служить функция:

$$a(t) = \begin{cases} -3, & -3 \le t \le -2, \\ -2, & -2 \le t \le -1, \\ -1, & -1 \le t \le 0, \\ 1, & 0 \le t \le 1, \\ 2, & 1 \le t \le 2, \\ 3, & 2 \le t \le 3. \end{cases}$$

Функция $a(t)$ имеет разрывы 1-го рода в точках –2, –1, 0, 1, 2. $A(t)$ определяется следующим образом.

$$A(t) = \begin{cases} -3t-9, & -3 \le t \le -2, \\ -2t-7, & -2 \le t \le -1, \\ -t-6, & -1 \le t \le 0, \\ t-6, & 0 \le t \le 1, \\ 2t-7, & 1 \le t \le 2, \\ 3t-9, & 2 \le t \le 3. \end{cases}$$

Функция $A(t)$ непрерывна на всем отрезке и $\forall t\epsilon[-3,3]$ $(A(t) \le 0)$, причем

Функция $A(t)$ непрерывна на всем отрезке и $\forall t\epsilon[-3,3]$ $(A(t) \le 0)$, причем
равенство имеет место только в точках -3,3.

Такие случаи рассмотрены в [2] при условии, что функция $f(t,x)$ по переменной x имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно и $|x^0| = C_0 \cdot \varepsilon$, где C_0 – const не зависящая от ε.

Также возможны случаи, когда $a(t)$ имеет точки разрыва второго рода. К примеру
$a(t) = \frac{m}{2n+1} t^{\frac{m-2n-1}{2n+1}}$, где $m, n \epsilon N$, m - четное и $m < 2n + 1$.

Тогда
$$A(t) = t^{\frac{m}{2n+1}} - (-t_0)^{\frac{m}{2n+1}},$$
$$-t_0 \epsilon (-\infty, 0).$$

При сделанных предположениях
$$\forall t \epsilon (-t_0, t_0)\ (A(t) < 0).$$

Приведем пример, когда вырожденное уравнение имеет несколько решений и не выполняется условие устойчивости.

Пусть рассматривается уравнение
$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = a(t)(x - b_1)(x - b_2), \tag{11}$$
с начальным условием
$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \tag{12}$$
где $t \epsilon [t_0, T]$, b_1, b_2 - некоторые вещественные числа, причем $0 < b_1 < b_2$.

Решение задачи (11) – (12) представляется в виде
$$\frac{x-b_2}{x-b_1} = \frac{x^0-b_2}{x^0-b_1} exp \frac{b_2-b_1}{\varepsilon} A(t), \tag{13}$$
где $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau$.

Уравнение (11) имеет решения x=b_2 и x–b_1. Следовательно $b_2 \neq x0$ и $b_1 \neq x^0$. Асимптотическое поведение решения (13) зависит от знака функции $A(t)$. Пусть

1) $\forall t \epsilon (t_0, T]\ (A(t) < 0)$.

Тогда $\forall t \epsilon (t_0, T] \left(exp \frac{b_2-b_1}{\varepsilon} A(t) \to 0 \text{ по } \varepsilon \Rightarrow x \to b_2 \right)$.

Пусть

2) $\forall t \epsilon (t_0, T]\ (A(t) > 0)$.

Тогда
$$\forall t \epsilon (t_0, T] \left(exp \frac{b_1-b_2}{\varepsilon} A(t) \to 0 \text{ по } \varepsilon \Rightarrow x \to b_1 \right).$$

Если на интервале (t_0,T] знак $A(t)$ чередуется, то согласно 1), 2) предельные переходы также чередуются.

Использованные источники

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. Талиев А.А. “Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных уравнений с неаналитическими, правыми частями при потере устойчивости” [Текст]: дисс… канд.физ.-мат.наук: 01.01.02/А.А.Талиев. – Ош, 2015, – 110с.