УДК 517.928

ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Алыбаев К.С. – ЖАГУ
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Нарымбетов Т.К. – НИМСИ
talant83@mail.ru

Аннотация: *В данной работе рассматривается система состоящая из нескольких сингулярно возмущенных уравнений первого порядка в комплексной области. Невозмущенная система, сингулярно возмущенной системы, имеет семейство решений. Вводится определение области притяжения. Сформулированы условия, в терминах линии уровня, существования областей притяжений решений систем сингулярно возмущенных уравнений к некоторым решениям из семейства решений невозмущенной системы.*

Ключевые слова: *сингулярное возмущение, невозмущенная система, область притяжения, гармоническая функция, линия уровня.*

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЕЧИМДЕРИНИН ТАРТЫЛУУ ОБЛАСТТАРЫ

Алыбаев К.С. – ЖАМУ
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Нарымбетов Т.К. – ИИМСИ
talant83@mail.ru

Аннотация: *Бул жумушта бир нече биринчи татиптеги сингулярдык козголгон теңдемелерден турган система комплекстик области караалган. Сингулярдык козголгон системанын козголбогон системасы бир нече чечимге ээ. Тартылуу областынын аныктамасы киргизилди. Деңгээл сызыктар термини боюнча сингулярдык козголгон теңдеменин чечимдеринин козголбогон теңдеменин чечимдеринин тобунан, айрым чечимдерге тартылуу областтарынын жашоо шарттары келтирилди.*

Түйүндү сөздөр: *Сингулярдык козголуу, козголбогон система, тартуу областы, гармоникалык функция, деңгээл сызык.*

DOMAINS OF ATTRACTION OF SOLUTIONS TO SYSTEMS OF SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS

Alybaev K.S. - ZHAGU
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Narymbetov T.K. - NIMSI
talant83@mail.ru

Abstract: *In this paper, we consider a system consisting of several singularly perturbed first-order equations in a complex domain. An unperturbed system, a singularly perturbed system, has a family of solutions. The definition of the area of attraction is introduced. Conditions are formulated in terms of the level line for the existence of domains of attraction of solutions of systems of singularly perturbed equations to some solutions from the family of solutions of the unperturbed system.*

Key words: *singular excitation, uncompressed system, region of attraction, harmonic function, linear level.*

Постановка задачи

Пусть рассматривается система сингулярно возмущённых уравнений

$$\varepsilon z_k'(t,\varepsilon)=a_k(t)\, z_k(t,\varepsilon)+z_k^2(t,\varepsilon)+\varepsilon f_k(t,z,\dots,z_n) k=1,\dots,n, \quad (1)$$

с начальным условием

$$z_k(t_0,\varepsilon)=z_k^0 \quad (2)$$

где $0<\varepsilon-$малый вещественный параметр, $t\in\Delta\subset C-$ множество комплексных чисел и

$\Delta-$односвязная, открытая область, $t_0\in\Delta$.

Из (1), полагая $\varepsilon=0$, получим невозмущенную систему

$$a_k(t)y_k(t)+y_k^2(t)=0, k=1,\dots,n \quad (3)$$

При фиксированном к (3) имеет решения

$$y_{k1}(t)\equiv 0, y_{k2}=-a_k(t) \quad (4)$$

Сочетая решения (4), нетрудно доказать, система (3) имеет 2^n решений. К примеру, если: $n=1$, то имеем два решения; $n=2$, то вектор функции $(0,0),(0,-a_2(t)),(-a_1(t),0),(-a_1(t),-a_2(t))$ являются решениями системы (3).

Пусть $y_j(t)-$ одно из решений системы (3). Определение

1. Пусть существует: 1 Область $\Delta_j\subset\Delta$.
2. Решение $z(t,\varepsilon)=(z_1(t,\varepsilon),\dots, z_n(t,\varepsilon))-$ решение задачи (1)-(2) определенное в Δ_j.

Если $\forall t\in\Delta_j$ $(z(t,\varepsilon)\rightarrow yj(t))$, то область Δj назовем область притяжения решения $z(t,\varepsilon)$ к решению $y_j(t)$.

Задача. Докажем существование областей притяжений.

Аналогичная задача рассмотрена в [1] для $n=2$, и в [2] для $n=3$.

Решение задачи

Задачу будем решать при следующих условиях:

У1. $\forall t\in\Delta$ $(a_k(t)\neq 0)$ и $a_k(t)\in Q(\Delta)$ $-$ пространство аналитических функций в области Δ.

У2. $f_k(t,z)\in Q(D)$, где $D-$ некоторое множество переменных $t,z_1, z_2,\dots,z_n$; и

$$\forall((t,\tilde{z})(t,\tilde{\tilde{z}}))\in D|fk(t,\tilde{z})-fk(t,\tilde{\tilde{z}})|\leq M_1\max_k|\tilde{z}k-\tilde{\tilde{z}}k|,$$

M_1-некоторая положительная постоянная не зависящая от ε. Здесь и далее все постоянные, не зависящие от ε, будем обозначать $M_1,M_2,\dots$.

Определим функции

$$A_k(t)=\int_{t_0}^{t} a_k(w)\, dw, k=1,\dots,n.$$

Как показывают исследования проведенные в [1-2] существование областей притяжений определяются знаком функций $ReA_k(t)$ $(k=1,\dots,n)$.

Рассмотрим функцию $ReA_k(t)$ при фиксированном к.

Определение 2. *Множество:*

$$(p_k)=\{t\in\Delta, \quad ReA_k(t)=pk-const\}$$

назовем линия уровня функции $ReA_k(t)$, $(q_k)=\{t\in\Delta, ImA_k(t)=q_k-const\}$ *− назовем линия уровня функции* $ImA_k(t)$.

Возьмем линию уровня $(pk0)=\{t\in\Delta, ReA_k(t)=0\}$.

Согласно У1 линия (p_{k0}) область Δ разделяет на части Δ_{k1}, Δ_{k2} при этом [2] выполняются соотношения

$$\forall t\in\Delta_{k1}\,(ReA_k(t)\leq 0 \text{ или } ReA_k(t)\geq 0),$$

$$\forall t\in\Delta_{k2}\,(ReA_k(t)\leq 0 \text{ или } ReA_k(t)\geq 0),$$

причем равенство имеет место только для $t\in(p_{k0})$. При исследовании существования областей притяжений требуется совместное рассмотрение функций $ReA_k(t)$. При этом для каждого решения $y_j(t)-$системы (3) область притяжения определяется в зависимости от знака $ReA_k(t)$. Поясним сказанное. Пусть рассматривается решение $y_1(t)$ = (0,…,0). Для этого случая рассмотрим задачу (1) - (2) причем будем считать, что $|Z_k^0| \le M_2{}^{\varepsilon}$.

Тогда, если существует область Δ_{01} и $\forall t \in \Delta_{01}$ ($ReA_k(t) \le 0$, $k = 1,\ldots,n$), то Δ_{01}– будет областью притяжения решения.

Теперь рассмотрим решение $y_2(t) = (-a1(t),0,\ldots,0)$. В (1) произведем замену

$$Z_1(t,\varepsilon) = u_1(t,\varepsilon) - a_1(t),$$

где $u_1(t,\varepsilon)$ − новая неизвестная функция, а функции $z_j(t,\varepsilon)$ (j=2,…,n) оставим без изменения.

Вместо задачи (1) – (2) получим

$$\varepsilon u_1' = a_1(t)\, u_1 + u_1^2 + \varepsilon f_{11}(t,u_1,z_2,\ldots,z_n),\ u_1(t_0,\varepsilon) = u_1^0,$$

$$\varepsilon z_k' = a_k(t) x_k + x_k^2 + \varepsilon f_{k1}(t,u_1,z_2,\ldots,z_n), \quad (5)$$

$$z_k(t0,\varepsilon) = z_k^0,\ k = 2,\ldots,n. \quad (6)$$

При исследовании задачи (5) – (6) будем предполагать

$$|u_1^0| \le M_3{}^{\varepsilon},\ |z_k^0| \le M_3{}^{\varepsilon}.$$

В рассматриваемом случае существование области, где одновременно $ReA_k(t)>0$ и $ReA_k(t) < 0$ (k=2,…,n) обеспечивает существование области притяжения.

Таким образом для каждого решения $y_j(t)$, область притяжения, определяется индивидуально.

Общая схема доказательств утверждений приведены в [1-2].

Сформулируем условия обеспечивающие существование областей притяжений для некоторых решений из семейства $\{y_j(t)\}$. Пусть выполняются условия:

У3. $\forall t \in \Delta$ ($Ima_k(t) > 0$).

У4. $\forall t \in \Delta$: Линии уровня (p_{k0}) (k=1,…,n) не имеют общих точек, кроме точки t_0.

У5. Две произвольные линии уровня из семейства $\{(p_{k0})\}$ не имеют общей касательной точке t_0.

Сформулированные условия упорядочивают расоложение линии уровней (p_{k0}) в области Δ.

Из условий У3-У5 вытекает, линии уровня (p_{k0}) можно пронумеровать по расположению. Проведем прямую $t=t_0$. Это прямая разделяет линии уровня (p_{k0}) на две ветви. Часть ветвей располагаются в полуплоскости $Ret_0<Ret$, а другая в полуплоскости $Ret_0>Ret$. Справедливость этого утверждения вытекает из условия У3.

Рассмотрим полуплоскость $Ret_0<Ret$ и нумерацию линии уровней (p_{k0}) проведем по ходу часовой стрелки. Пусть первым идет (p_{10}), затем (p_{20}) и так далее (p_{n0}). При такой нумерации в полуплоскости $Ret_0 > Ret$ нумерация опять идет от (p_{10}) до (p_{n0}) (рис. 1).

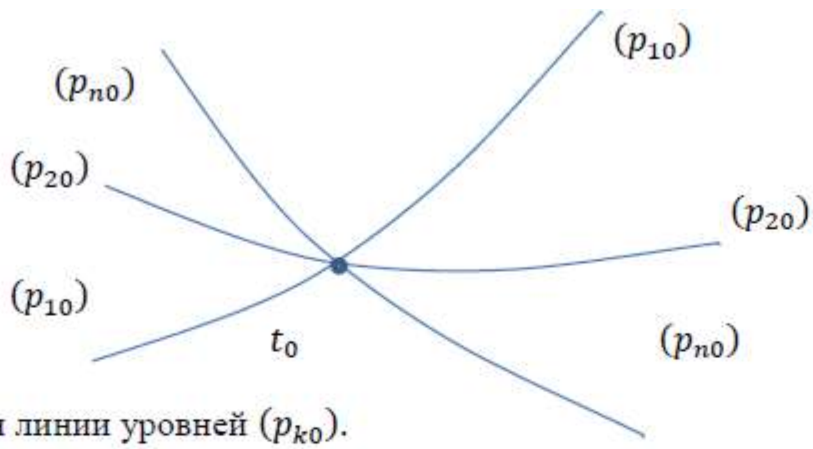

Рис. 1.Нумерация линии уровней (p_{k0}).

Согласно построений область Δ разделяется на 2n частей. Эти части обозначим $\Delta j(j=1,\ldots,2n)$ (рис. 2).

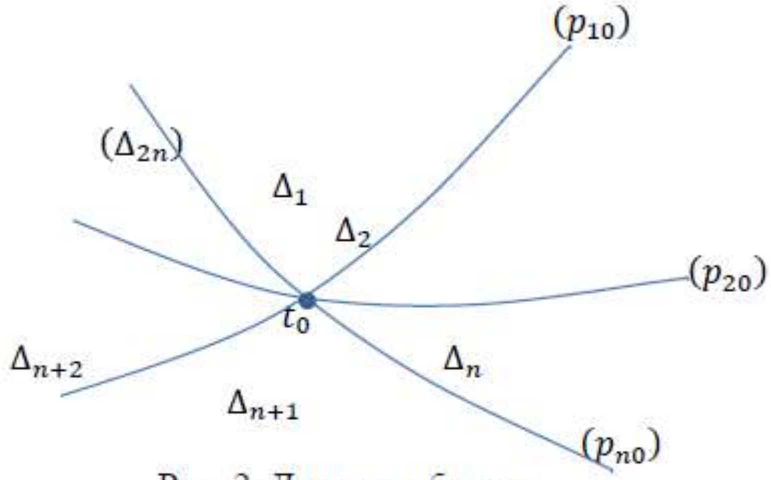

Рис. 2. Деление области.

В зависимости от $t\in\Delta_j$ определим знаки функций $ReA_k\ (t)$ $(k = 1,\ldots,n)$ и области притяжения соответствующие решениям $y_m\ (t)$ $(m = 1,2,\ldots,2^n)$.

Знаки $ReA_k\ (t)$ определяются согласно условия У3. Область притяжения и соответствующее решение обозначим $\Delta j(ym(t))$. Рассмотрим области Δ_j:

1. $t\in\Delta_1$, тогда $ReA_k\ (t) \leq 0$ $(k=1,\ldots,n)$. Следовательно $\Delta_1\ (y_1\ (t) = (0,0,\ldots0))$.
2. $t\in\Delta_2$, тогда $ReA_1(t) \geq 0, ReA_k\ (t) \leq 0$ $(k=2,\ldots,n)$ и $\Delta_2\ (y_2\ (t) = (-a_1\ (t),0,\ldots,0))$.
3. Для $t\in\Delta_3\ (ReA_1\ (t) \geq 0,\ ReA_2\ (t) \geq 0, ReA_k\,(t) \leq 0\ (k = 3,\ldots,n))$ и

$$\Delta_3\ (y_3(t) = (-a_1\ (t),-\ a_2\ (t),0,\ldots,0)).$$

Продолжая, имеем

$t\in\Delta_n\ (ReA_k\ (t) \geq 0\ (k=1,\ldots,n-1,\ ReA_n\ (t) \leq 0))$ и

$\Delta_n\ (y_n\ (t) = (-a_1(t),\ldots,-a_{n-1}\ (t),0))$.

$t\in\Delta_{n+1}\ (ReA_k\ (t) \geq 0, k=1,\ldots,n)$ и

$\Delta_{n+1}\ (y_{n+1}\ (t) = (-a_1(t),\ldots,-a_n\ (t)))$.

$t\in\Delta_{n+2}\ (ReA_1\ (t) \leq 0, ReA_k\ (t) \geq 0\ (k = 2,\ldots,n))$ и

$\Delta_{n+2}\ (y_{n+2}\ (t) = (0,-a_2(t),\ldots,-a_n(t)))$.

Далее при $t\in\Delta_{2n}\ (ReA_k\ (t) \leq 0\ k=1,2,\ldots,n-1), ReAn(t)\geq 0)$ и

$\Delta_{2n}\ (y_{2n} = (0,0,\ldots,0,-a_n\ (t)))$.

Таким образом, при сформулированных условиях из семейства решений $\{y_m(t), m=1,2,\ldots,2^n\}$ невозмущенной системы $2n$ решений имеют области притяжения. Общими частями областей притяжений являются линии уровня (p_{k0}) $(k = 1,\ldots,n)$. Из семейства $\{y_m\ (t), m=1,2,\ldots,2^n\}-$ решений (2^n-2n)–решения не имеют областей притяжений.

Литература

1. Мурзабаева А.Б. Исследование сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с разделением множеств при вырождении [Текст] / А.Б. Мурзабаева //Вестник ЖАГУ. №4 Жалал-Абад, 2018. – С.7-15.
2. Алыбаев К.С., Нарымбетов Т.К. Асимптотический анализ решений систем из трёх сингулярно возмущенных уравнений первого порядка [Текст] /К.С.Алыбаев, Т.К.Нарымбетов //Вестник Института математики НАН КР. №1. Бишкек, 2020. –С. 46-55