Эрматали уулу Б.

СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕКТИК КАТМАР ЖАНА ЧЕКТИК СЫЗЫКТАРЫН MATLAB ПРОГРАММАСЫНЫН ЖАРДАМЫНДА МОДЕЛДӨӨ

Эрматали уулу Б.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРАНСЛОЙНЫХ И ПОГРАНИЧНЫХ ЛИНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ MATLAB

Ermatali uulu B.

MODELING THE BOUNDARY LAYER AND BOUNDARY LINES OF SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS USING MATLAB

УДК:517.968

Аннотация:

Бул иште изилдөөнүн предмети болуп сингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелердин чектик катмарлар жана чектик сызыктарын моделдөө маселеси каралат. Изилдөөнүн максаты – сингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелердин чектик катмар жана чектик сызыктарын изилдеп, аларды MATLAB колдонмо программасынын жардамы менен натыйжалуу моделдөө болуп эсептелет.

Моделдөө процессинде MATLAB программасынын негизги функциялары жана графикалык интерфейси (App Designer) менен бирге буйрук жазуу интерфейси колдонулду. Изилдөөнүн алкагында сингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелердин чектик катмар жана чектик сызыктарынын мүнөздүү өзгөчөлүктөрү талданып, алардын динамикасын чагылдырган моделдери курулду. Программалык камсыздоонун жардамы менен конкреттүү мисалдар каралып, моделдердин жүрүшү визуалдык түрдө интерпретацияланды жана натыйжалардын таблицасы алынды.

Программалык кодду түзүүдө сандык жана компьютердик изилдөө ыкмалары колдонулуп, сингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелердин чектик катмар жана чектик сызыктарын моделдөөдө тиешелүү алгоритмдер скрипт файлдар түрүндө иштелип чыкты. Иштелип чыккан программанын жардамы менен чектик катмарлардын түзүлүшү, алардын визуалдык сүрөттөлүшү жана динамикасы ар тараптуу изилденип, алынган жыйынтыктар негизинде натыйжалуу анализ жүргүзүлдү.

Негизги сөздөр: сингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдеме, MATLAB программасы, программа, код, модел, чектик катмар, чектик сызыктар, скрипт файл.

Аннотация:

В данной работе рассматривается задача моделирования погранслойных и пограничных линий сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений. Цель исследования заключается в изучении погранслойных и пограничных линий сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений и их эффективном моделировании с использованием прикладной программы MATLAB.

В процессе моделирования использовались основные функции и графический интерфейс MATLAB (App Designer), а также интерфейс командной строки. В рамках исследования были проанализированы характерные особенности погранслойных и пограничных линий сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений и построены модели, отражающие их динамику. С помощью программного обеспечения были рассмотрены конкретные примеры, визуально интерпретированы ходы моделирования и получены таблицы с результатами.

При написании программного кода применялись численные и вычислительные методы исследования, а соответствующие алгоритмы были разработаны в виде скриптов для моделирования погранслойных и пограничных линий сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений. С помощью разработанной программы подробно

исследовалась структура пограничных слоёв, их визуальное представление и динамика, что позволило провести эффективный анализ полученных результатов.

Ключевые слова: сингулярно возмущённое дифференциальное уравнение, программа MATLAB, программа, код, модель, погранслойные линии, скриптовый файл.

Annotation:

This work addresses the problem of modeling the boundary layers and boundary lines of singularly perturbed differential equations. The objective of the study is to investigate the boundary layers and boundary lines of singularly perturbed differential equations and to model them effectively using the MATLAB application software.

During the modeling process, the core functions and graphical interface (App Designer) of MATLAB were utilized, along with the command-line interface. The study analyzed the characteristic features of boundary layers and boundary lines of singularly perturbed differential equations, and constructed models to represent their dynamics. Specific examples were explored using the software, with the modeling process visually interpreted and the results presented in tabular form.

In the development of the program code, numerical and computational research methods were employed, and the relevant algorithms were implemented as script files for modeling the boundary layers and boundary lines of singularly perturbed differential equations. The developed program enabled a comprehensive analysis of the structure, visual representation, and dynamics of the boundary layers, providing a solid basis for the interpretation and evaluation of the obtained results.

Key words: singularly perturbed differential equation, MATLAB software, program, code, model, boundary layer lines, script file.

Киришүү. Аналитикалык функциялуу сингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелер жана чектик катмар сызыктардын формалары [1], [2], [3], [5], [8] жумуштарда каралган.

[4], [6], [7] жумуштарда сингулярдуу козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелердин асимптотикалык жүрүмүн изилдөөдө чектик катмар сызыктар, регулярдуу жана сингулярдуу аймактар колдонулган.

Сингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелердин чечимдерин табууда компьютердик программаны колдонуу [13] жумушта көрсөтүлгөн жана гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктарын MATLAB программасында моделдөө коду түзүлгөн [12].

Изилдөөнүн материалдары

Сингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелердин чектик катмар сызыктарын моделдөө үчүн MATLAB программасында contourf(), meshgrid(), abs(Z) функцияларды колдонууга болот [10].

MATLAB программасында кодду иштеп чыгуу үчүн скрипт файлды колдонобуз.

Маселенин коюлушу

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = -u + x, 0 \leq x \leq 1, u_{\varepsilon}(0) = 1. \qquad (1)$$

Берилген теңдеменин аналитикалык чечими төмөнкүгө барабар. $u(x) = x - \varepsilon + (1 + \varepsilon)e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$.

```
% Кадам 1: Параметрди беребиз
epsilon = 0.01;

% Кадам 2: x өзгөрмөсүнүн диапазонун түзөбүз
x = linspace(0, 1, 500);

% Кадам 3: Интегралдоо фактору e^{x/epsilon} (керек болсо)
mu = exp(x / epsilon); % Бул кадам маалымат үчүн гана

% Кадам 4: Жалпы чечим формуласы
% u(x) = x - epsilon + (1 + epsilon) * exp(-x/epsilon)
u = x - epsilon + (1 + epsilon) .* exp(-x / epsilon);

% Кадам 5: Баштапкы шарт текшерүү
u0 = u(1); % x = 0 үчүн u(0)
fprintf('Баштапкы шарт: u(0) = %.4f (керек: 1)\n', u0);

% Кадам 6: График
figure;
plot(x, u, 'b-', 'LineWidth', 2);
grid on;
xlabel('x');
ylabel('u(x)');
title('Аналитикалык чечим: u(x) = x - \epsilon + (1 + \epsilon)e^{-
x/\epsilon}');
legend('u(x)');
```

≫ u = x - epsilon + (1 + epsilon) .* exp(-x / epsilon);
Берилген теңдеменин чектик катмар, регулярдык жана сингулярдык областтарын түзүү үчүн программада төмөнкүдөй функциялар колдонулат.

1. xline(boundary_limit, '--k', 'Label', 'Чектик катмар', ...) Чектик катмарды визуалдаштыруу үчүн;

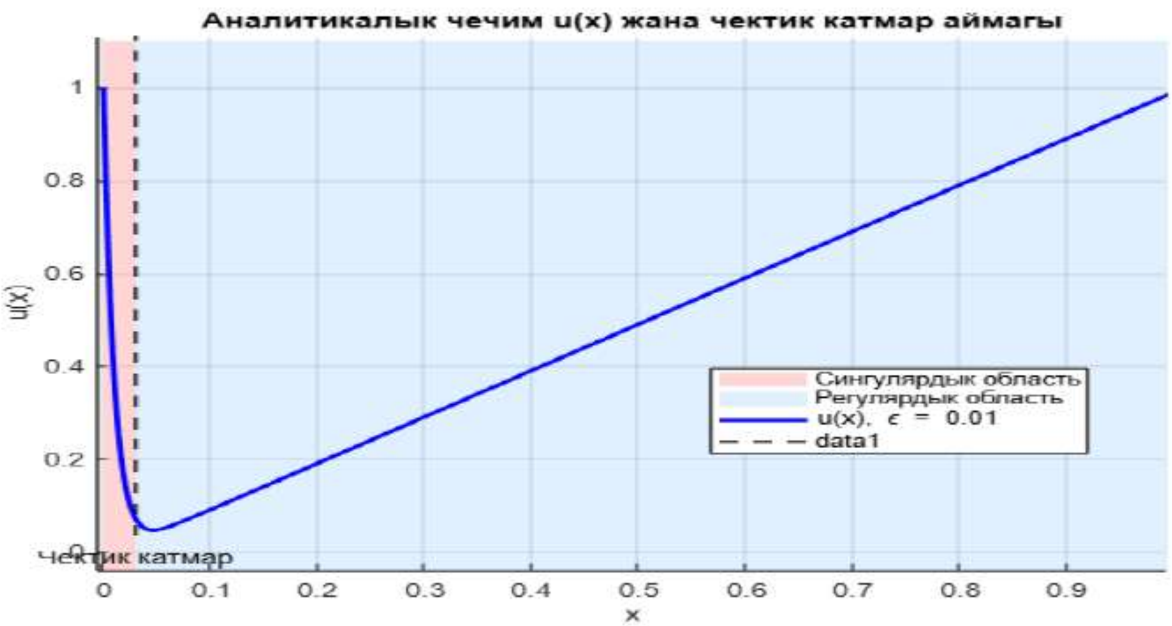
2. fill([...], [...], [түстөр], 'FaceAlpha', ...) Сингулярдык жана регулярдык областтарды бөлүп көрсөтүү үчүн;

```
>> clc;
clear;
% 1-кадам: Параметрлер
epsilons = [0.01]; % Эпсилондун мааниси
colors = ['b', 'r'];
x = linspace(0, 1, 1000); % x интервал
% 2-кадам: График түзүү
figure;
hold on;
% Натыйжаларды сактоо үчүн
resultTables = cell(length(epsilons), 1);

for k = 1:length(epsilons)
epsilon = epsilons(k);
% 3-кадам: Аналитикалык чечим
u = x - epsilon + (1 + epsilon) * exp(-x / epsilon);
% 4-кадам: Чектик катмар чекити
x=0
boundary_limit = 3 * epsilon;
% 5-кадам: Областтарды визуалдаштыруу
y_min = min(u) - 0.1;
y_max = max(u) + 0.1;
% Сингулярдык область (чектик катмар)
fill([0 boundary_limit boundary_limit 0], ...
[y_min y_min y_max y_max], ...
[1 0.6 0.6], 'FaceAlpha', 0.3, 'EdgeColor', 'none', ...
'HandleVisibility', 'off');
% Регулярдык область
fill([boundary_limit 1 1 boundary_limit], ...
[y_min y_min y_max y_max], ...
[0.6 0.8 1], 'FaceAlpha', 0.2, 'EdgeColor', 'none', ...
'HandleVisibility', 'off');
% u(x) графиги
plot(x, u, colors(k), 'LineWidth', 2, ...
'DisplayName', ['u(x), \epsilon = ', num2str(epsilon)]);
% Чектик катмар чекитин көрсөтүү
```

```
    xline(boundary_limit, '--k', 'LineWidth', 1.5, ...
    'Label', 'Чектик катмар', ...
    'LabelOrientation', 'horizontal', ...
    'LabelVerticalAlignment', 'bottom', ...
    'LabelHorizontalAlignment', 'center');
    % График стили
    xlabel('x');
    ylabel('u(x)');
    title('Аналитикалык чечим u(x) жана чектик катмарлар');
    legend('Location', 'best');
    grid on;
    ylim([y_min y_max]);
```

Коддун натыйжасында төмөнкүдөй графикти алууга болот (1-сүрөт).



1-сүрөт. ε = 0. 01 болгон учурдагы жыйынтык жана регулярдык сингулярдык областтардын бөлүнүшү

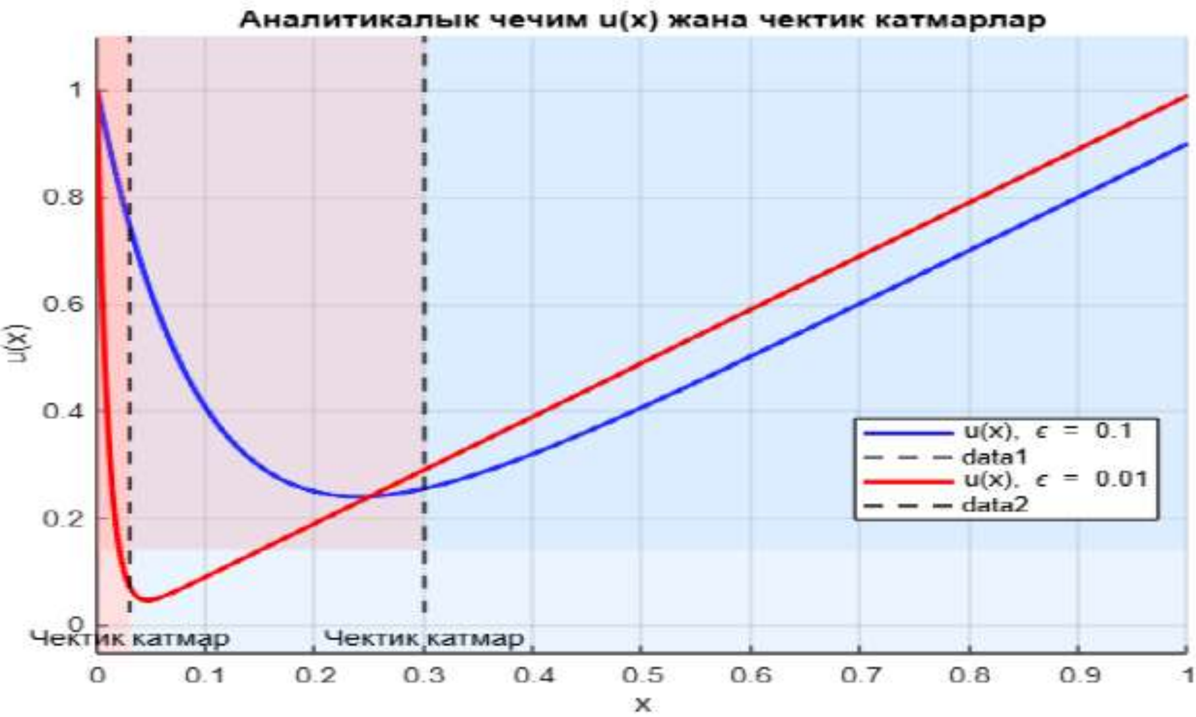
Натыйжаларды таблицада көрсөтүү үчүн.

```
regionLabels(x <= boundary_limit) = "Сингулярдык";
regionLabels(x > boundary_limit) = "Регулярдык";
T = table(x', u', regionLabels', 'VariableNames', {...});
disp(T)
```

функциясын колдонуу менен таблицалык маанилерди алууга болот. Программалык коду төмөнкүдөй түзүлөт:

```
% Таблицаларды консольго чыгаруу
for i = 1:length(resultTables)
    fprintf('\n--- Натыйжа таблицасы: ε = %.3f ---\n',
epsilons(i));
    disp(resultTables{i}(1:15,:)); % Ар бир таблицанын башындагы 15
сапты көрсөтүү
end
```

Коддун натыйжасында 1, 2-таблицаны жана графикти (2-сүрөт) алууга болот.



1-сүрөт. ε = 0.1 жана ε = 0. 01 болгон учурдагы жыйынтык

1-таблица. **2-таблица.**

-- Натыйжа таблицасы: ε = 0.100 ---

x	u(x)	Область
0	1	"Сингулярдык"
0.001001	0.99004	"Сингулярдык"
0.002002	0.9802	"Сингулярдык"
0.003003	0.97046	"Сингулярдык"
0.004004	0.96083	"Сингулярдык"
0.005005	0.95131	"Сингулярдык"
0.006006	0.94188	"Сингулярдык"
0.007007	0.93257	"Сингулярдык"
0.008008	0.92335	"Сингулярдык"
0.009009	0.91424	"Сингулярдык"
0.01001	0.90523	"Сингулярдык"

-- Натыйжа таблицасы: ε = 0.010 ---

x	u(x)	Область
0	1	"Сингулярдык"
0.001001	0.9048	"Сингулярдык"
0.002002	0.81875	"Сингулярдык"
0.003003	0.741	"Сингулярдык"
0.004004	0.67076	"Сингулярдык"
0.005005	0.60729	"Сингулярдык"
0.006006	0.54997	"Сингулярдык"
0.007007	0.49821	"Сингулярдык"
0.008008	0.45147	"Сингулярдык"
. . . . . .	. . . . .	. . . .
0.031031	0.06639	"Регулярдык"
0.032032	0.06307	"Регулярдык"
0.033033	0.060162	"Регулярдык"
. . . . . .	. . . . . .	. . . .

Параметрди камтыган чектик сызыктардын түрдүү формаларына мисалдар [10] жумушта каралган. MATLAB программасында [10] жумушта каралган туюк башкы чектик сызыкка ээ болгон аналитикалык функцияны визуалдаштыруу программасын түзүүгө болот.

Төмөнкү функция берилсин.

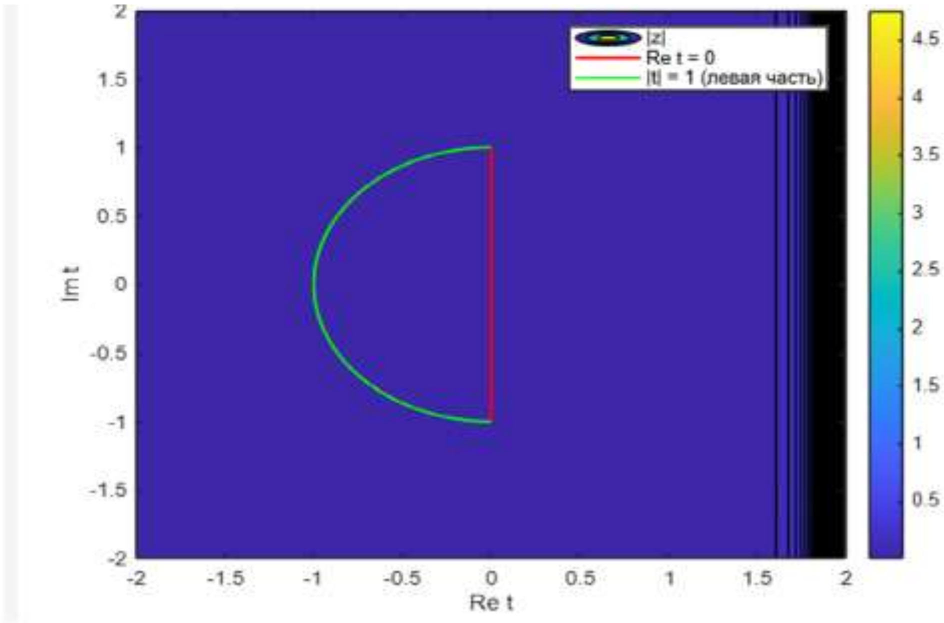
$z(t,\varepsilon) = M_1 e^{\frac{a(t)-a(t_0)}{\varepsilon}} + M_1\big(a(t)-a(t_0)\big)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ мында M_1, M_2-const едон көз каранды эмес.

```
>> % Параметрлер
M1 = 1;
M2 = 1;
eps = 0.1;
% Комплекс жазыктыгы боюнча тор түзүү
t1 = linspace(-2, 2, 400);
t2 = linspace(-2, 2, 400);
[T1, T2] = meshgrid(t1, t2);
t = T1 + 1i * T2;
% z(t, eps) функциясын эсептөө
z = M1 * exp(t / eps) + M2 * exp(log(abs(t)) / eps);
% zнин модулунун контурдук графигин чийүү
figure;
contourf(T1, T2, abs(z), 100, 'LineColor', 'none');
colormap(turbo); % Сапаттуу түстүү палитра
colorbar;
title('|z(t, \epsilon)| функциясынын модулунун графиги');
xlabel('Re t');
ylabel('Im t');
% Негизги чек ара сызыгын чийүү
hold on;
% Кызыл тик сызык t1 = 0, t2 -1 ден 1 ге чейин
plot(zeros(100,1), linspace(-1,1,100), 'r', 'LineWidth', 2);
% Жашыл жарым тегерек t = 1, сол жагы гана
theta = linspace(-pi/2, pi/2, 500);
x_circle = cos(theta); y_circle = sin(theta);
plot(-abs(x_circle), y_circle, 'g', 'LineWidth', 2);
legend('|z|','Re t = 0','|t| = 1 (сол жарымы)');
hold off;
```

Натыйжада 3-таблицаны жана графикти (3-сүрөт) алууга болот.

3-таблица.

t	z(t,eps)	|z|
0.5+0.5i	42.13-142.32i	148.42
-1+0.5i	3.0518-4.3535e-05i	3.0518
0+0.5i	0.28464-0.95892i	1.0003
-0.5+0.5i	0.033161-0.0064612i	0.033785



3-сүрөт. Функциянын башкы чектик сызыгынын сүрөттөлүшү

Изилдөнүнү жыйынтыгы. Изилдөөнүн жүрүшүндө төмөнкү негизги жыйынтыктар алынды:

Сингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелердин аналитикалык чечимдери аркылуу чектик катмарлардын түзүлүшү моделденди.

Чектик катмар жана чектик сызыктарды аныктоо жана визуалдаштыруу үчүн MATLAB'тын contourf, fill, xline, meshgrid, exp, abs сыяктуу функциялары натыйжалуу колдонулду.

Регулярдык жана сингулярдык аймактардын айырмачылыктары графикалык жол менен көрсөтүлүп, аларды бөлүп көрсөтүү алгоритмдери иштелип чыкты.

Иштелип чыккан скрипттерди колдонуу менен алынган жыйынтыктар таблицалык түрдө көрсөтүлдү.

Жалпылап айтканда, изилдөөнүн жыйынтыгында сингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелердин чектик катмар жана чектик сызыктарын моделдөөнүн алгоритмдери сунушталып, алар программалык каражаттардын жардамы менен ийгиликтүү ишке ашырылды.

Адабияттар:

1. Тампагаров, К. Б. Формы погранслойных линий для сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями [Текст]/ К. Б. Тампагаров // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2017. – № 5. – С. 121-124. – EDN ZEZQTP.

2. Алыбаев К. С. Затягивание потери устойчивости и погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями [Текст]/ К. С. Алыбаев, К. Б. Тампагаров // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2017. – № 5. – С. 125-129. – EDN ZEZQTZ.

3. Алыбаев, К. С. Алгоритм приближенного поиска погранслойных линий сингулярно возмущенных линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями [Текст]/ К. С. Алыбаев, К. Б. Тампагаров // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. – 2016. – Т. 16, № 5. – С. 3-6. – EDN WGWOFP.

4. Алыбаев К. С. Сингулярно возмущенные уравнения первого порядка при нарушении устойчивости точки покоя [Текст]/ К. С. Алыбаев, Т. К. Нарымбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2019. – № 12. – С. 49-53. – EDN RJBGUX.

5. Алыбаев К.С. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими

функциями / П.С. Панков, К.С. Алыбаев, М.Р. Нарбаев, К.Б.Тампагаров // Вестник ОшГУ, 2013. - № 1 (специальный выпуск). – С. 227-231.

6. Евграфов М.А. Аналитические функции / М.А. Евграфов. – Москва: Наука, 1991. - 448 с.

7. Тампагаров, К. Б. Исследование асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений первого порядка методом равномерного спуска (подъема) [Текст]/ К. Б. Тампагаров // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2019. – № 12. – С. 73-76. – EDN CTNARR.

8. Алыбаев, К. С. Сингулярно возмущенные уравнения первого порядка при нарушении устойчивости точки покоя [Текст]/ К. С. Алыбаев, Т. К. Нарымбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2019. – № 12. – С. 49-53. – EDN RJBGUX.

9. Алыбаев, К. С. Пограничные линии аналитических функций с параметром / К. С. Алыбаев, Т. К. Нарымбетов // Международный научно-исследовательский журнал. – 2020. – № 12-1(102). – С. 9-14. – DOI 10.23670/IRJ.2020.102.12.002. – EDN IVHNRW.

10. Эрматали Уулу, Б. Описание линий уровня гармонических функций в пакете прикладных программ MATLAB [Текст]/ Б. Эрматали Уулу, А. Анарбеков // Вестник Ошского государственного педагогического университета имени А. Мырсабекова. – 2022. – № 1-1(19). – С. 183-190. – EDN BHMKGM.

11. Алыбаев, К. С. Гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктары жана алардын колдонулушу [Текст]/ К. С. Алыбаев, Б. Эрматали Уулу // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. – 2021. – No. 4(49). – P. 24-28. – EDN KWPXCA.

12. Эрматали Уулу, Б. Комплекстик областтагы сингулярдык козголгон Бернулинин теңдемеси [Текст]/ Б. Эрматали Уулу, А. Анарбеков, А. Асан Кызы // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. – 2023. – No. 3(57). – P. 55-64. – EDN YLITLJ.

13. Эрматали Уулу, Б. Сингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелердин Maple15 колдонмо пакетинде чыгарылышы [Текст]/ Б. Эрматали Уулу, А. Анарбеков, А. Ибрагим Кызы // Интернаука. – 2022. – No. 14-5(237). – P. 50-53. – EDN HTXUJK.