УДК 517: 517.9
DOI 10.33514/1694-7851-2024-4/2-446-452

**Кутанов А.**
физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
**Жолдошбек кызы А.**
магистрант
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
aizat.joldoshbekkyzy@bk.ru

# БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖӨНӨКӨЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ

**Аннотация:** Бул макалада биринчи тартиптеги жөнөкөй дифференциалдык теңдемелерди жакындаштырып чыгаруу ыкмалары каралат. Дифференциалдык теңдемелерди чыгарууда аналитикалык ыкмалар ар дайым мүмкүн боло бербегендиктен, жакындаштыруу методдорунун мааниси чоң. Жакындаштырып чыгаруу методдору илимий жана инженердик эсептөөлөрдө колдонулган натыйжалуу курал болуп саналат. Макалада белгилүү жакындаштыруу ыкмалары, мисалы, Эйлердин ыкмасы, Рунге-Кутта методдору жана алардын өркүндөтүлгөн варианттары талданып, ар биринин өзгөчөлүктөрү, артыкчылыктары жана чектөөлөрү белгиленет. Ошондой эле, ар бир метод үчүн колдонуу чөйрөлөрү, натыйжалуулук критерийлери жана эсептик катага таасир этүүчү факторлор талкууланат. Изилдөө математикалык жана инженердик эсептөөлөр менен алектенген студенттер жана изилдөөчүлөр үчүн пайдалуу маалыматтарды берет. Натыйжада, ар кандай жакындаштыруу методдорунун практикалык мааниси жана алардын конкреттүү колдонулуштары көрсөтүлөт. Макаланын жыйынтыктары жакындаштыруу ыкмаларын колдонууда туура метод тандоонун маанилүүлүгүн белгилейт жана ар бир ыкманын натыйжалуулугу кандай шарттарда жогору болоорун көрсөтөт. Мындан тышкары, теория жана практиканы туташтыруучу учурларды талкуулоодо, окурмандарга дифференциалдык теңдемелерди чыгарууда колдонулуучу методдордун кеңири спектри менен тааныштырат. Бул изилдөө дифференциалдык теңдемелерди жакындаштыруу ыкмаларын тереңирээк түшүнүүгө, алардын практикалык колдонулуштарын көрсөтүүгө жана келечектеги изилдөөлөр үчүн пайдалуу жолдорду ачууга жардам берет.

**Негизги сөздөр:** Дифференциалдык теңдемелер, жакындаштырып чыгаруу ыкмалары, Эйлердин ыкмасы, Рунге-Кутта методдору, Пикар, теорема, Липщица, Эйлер, инженердик колдонмолор, сандык анализ, натыйжалуулук, математикалык моделдөө.

**Кутанов А.**
кандидат физико-математических наук, доцент
Кыргызский государственный университет имени И.Арабаева
г. Бишкек
**Жолдошбек кызы А.**
магистрант
Кыргызский государственный университет имени И.Арабаева

г. Бишкек
aizat.joldoshbekkyzy@bk.ru

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**Аннотация.** В данной статье рассматриваются методы приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Поскольку аналитические методы решения дифференциальных уравнений не всегда применимы, значение приближённых методов становится особенно важным. Методы приближённого решения являются эффективными инструментами, используемыми в научных и инженерных расчётах. В статье анализируются известные методы приближения, такие как метод Эйлера, методы Рунге-Кутты и их усовершенствованные варианты, а также рассматриваются особенности, преимущества и ограничения каждого из них. Также обсуждаются области применения каждого метода, критерии эффективности и факторы, влияющие на погрешности вычислений. Исследование предоставляет полезную информацию для студентов и исследователей, занимающихся математическими и инженерными расчётами. В результате подчёркивается практическое значение различных методов приближения и их конкретные применения. Результаты статьи акцентируют важность правильного выбора метода при использовании приближённых методов решения и показывают, при каких условиях эффективность каждого метода является наивысшей. Кроме того, обсуждение аспектов, соединяющих теорию и практику, знакомит читателей с широким спектром методов, применяемых при решении дифференциальных уравнений. Данное исследование способствует более глубокому пониманию методов приближения дифференциальных уравнений, демонстрирует их практическое применение и открывает полезные направления для будущих исследований.

**Ключевые слова:** Дифференциальные уравнения, методы приближенного решения, метод Эйлера, методы Рунге-Кутты, Пикар, теорема, Липшиц, Эйлер, инженерные приложения, численный анализ, эффективность, математическое моделирование.

**Kutanov A.**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
**Zholdoshbek kyzy A.**
Master's student
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
aizat.joldoshbekkyzy@bk.ru

## APPROXIMATE SOLUTIONS OF FIRST-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

**Annotation:** This article examines methods for approximating the solutions of first-order ordinary differential equations. Since analytical methods for solving differential equations are not always applicable, the significance of approximation methods becomes crucial. Approximation methods serve as effective tools used in scientific and engineering computations. The article reviews well-known approximation techniques, such as the Euler method, the Runge-Kutta methods, and their enhanced versions, analyzing the characteristics, advantages, and limitations of each. It also discusses the application areas of each method, the criteria for their efficiency, and the factors influencing computational errors. The research provides valuable insights for students and researchers involved in mathematical and engineering calculations. Ultimately, the article highlights the practical significance of various approximation methods and their specific applications. The results emphasize the importance of choosing the correct method in approximation approaches and demonstrate the conditions under which the efficiency of each method is optimal. Furthermore, the study links theory with practice by exploring the wide spectrum of methods available for solving differential equations, contributing to a deeper understanding of these techniques and their practical uses, while opening avenues for future research.

**Keywords:** Differential equations, approximation methods, Euler method, Runge-Kutta methods, Picard, theorem, Lipschitz, Euler, engineering applications, numerical analysis, efficiency, mathematical modeling.

Берилсин биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме

$$y' = f(x,y), \tag{1}$$

жана баштапкы шарты

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

(1) жана (2) шарттарды канааттандырган чыгарылышын аныктоо. Дифференциалдык теңдмелерде маселе, Кошинин маселеси деп аталат. Бул маселе, Пикаранын шартын канааттандырганда чыгарылышы жашайт жана жеке чыгарылышка ээ болот.

***Теорема.*** Эгерде $f(x,y)$ функциясы аныкталган жана $G$ областында $\{|x - x_0| \leq$ $a, y - y0 \leq b$ үзгүлтүксүз болсо жана Липшицанын шартын канаттандырса

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \tag{3}$$

анда $|x - x_0| \leq h$ аралыгында (1)-(2) маселесинин жеке чыгарылышы жашайт [2, 29б.].

Мында $M = max\left|f_y^1(x,y_1)\right|$. Берилген Коши маселесинин жекече чыгарылышы жашасын. Ушул чыгарылышты табуу талап кылынат. Дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарын аныктоо эки топко бөлүнөт. Биринчи топ аналитикалык ыкмалар, экинчи топ сандык ыкмалар (методдор).

**Аналитикалык метод.** Аналитикалык методдон удаалаштыктын методун–Пикаранын методун колдонобуз. Берилсин $y' = f(x,y)$ теңдемеси үчүн Кошинин маселеси $y(x_0) = y_0$ Кошинин маселесинен интегралдык теңдемеге келтиребиз [3, 12б.]:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

$dy = f(x,y)dx$, эки жагын тең $[x_0, x]$ кесиндисинде интегралдайбыз

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(\xi,y)d\xi, y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(\xi,y)d\xi, \\ y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi,y)d\xi, \end{cases} \tag{4}$$

Бул интегралдык теңдеменин (4) чыгарылышы, (1) – (2) маселенин чыгарылышы менен эквиваленттүү

$(y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y) d\xi = y_0)$.

Ушул (4) интегралдык теңдемени удаалаштыктын методу – Пикаранын методу менен чыгарабыз [1, 48б.]. Интегралдын алдындагы $y$ ти $y_0$ менен алмаштырабыз да $y_1 = y_1(x)$ табабыз.

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0) d\xi.$$

Бул интегралдын мааниси белгилүү функцияны берет. Аныкталган $y_1(x)$ функциясын (4) теңдеменин оң жагына коюп $y_2(x)$ жакындаштырылып чыгарылган чыгарылышты алабыз.

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1) d\xi.$$

Ушул ыкманы улантып, төмөнкү функциялардын удаалаштыгын алабыз:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_n) d\xi \qquad (n = 0,1,2, \dots, ) \qquad (5)$$

$$y_0, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$

Табылган чыгарылыштын удаалаштыгынын жыйналуучулугун аныктайбыз. Аныкташ үчүн Липшицанын шартын колдонобуз

$$\delta_n = |y_{n+1} - y_n| = \left| \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_n) d\xi - \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}) d\xi \right| \le$$

$$\int_{x_0}^{x} M |y_n - y_{n-1}| \, d\xi \le M(b-a)\delta_{n-1}.$$

Эгерде $\boldsymbol{\delta_n = \max_{a \le x \le b} |y_{n+1} - y_n|}$ болсо, анда $\delta_n \le \delta_{n-1} M(b-a)$ болот,
$M(b-a) = \alpha$ менен белгилеп $\delta_n \le \alpha \delta_{n-1} \le a^2 \delta_{n-1} \le \dots \le a^n \delta_0$ болот,
$\delta_0 = \max_{a \le x \le b} |y_1 - y_0|$. Эгерде $\alpha < 1$ болсо, анда
$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$ удалааштыгы бир калыпта жыйналат, б.а.

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} |y_{n+1} - y_n| \le \lim_{n\to\infty} a^n \delta_0 = \delta_0 \lim_{n\to\infty} a^n = 0}$$

Демек

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)}$$

**Мисалдар.**

1.Төмөнкү Кошинин маселесин удаалаштыктын методун колдонуп чыгаргыла
$$\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Белгисиз $y = y(x)$ функциясынын баштапкы маанилери үчүн $y(x_0) = y(0) = y_0 = 1$ колдонуп Пикаранын методунан $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ жакындаштырылган чыгарылыштарын табабыз [2, 98б.]:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (\xi - 1) d\xi = 1 + \left(\frac{\xi^2}{2} - \xi\right)\Bigg|_0^x = 1 - x - \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (\xi - y_1(\xi)) d\xi = 1 + \int_0^x \left(\xi - (1 - \xi - \frac{\xi^2}{2})\right) d\xi =$$

$= 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}$,

$y_3(x) = 1 + \int_0^x (\xi - y_2(\xi)) d\xi =$

$= 1 + \int_0^x \left(\xi - (1 - \xi + \xi^2 - \frac{\xi^3}{2})\right) d\xi = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24},$

………………………………………………………………………………………

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x (\xi - y_{n-1}(\xi)) d\xi = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} - \cdots +$$

$+(-1)^n \frac{x^n}{3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n} - (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$

Ушул $y_n(x)$ жакындаштырылган чыгарылышты өзгөртүп түзөлү

$y_n(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n} - (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} =$

$$= 2 - 2x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{2^{xn}}{n!} - (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$-1 + x = 2\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) -$$

$$-(-1)^n \frac{x^{x+n}}{(n+)!} - 1 + x.$$

Эми эки жагынан $n \to \infty$ пределге өтөлүк

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) -$$

$$-\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{x^{x+n}}{(n+)!} - 1 + x = 2\left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots +\right.$$

$$\left. +(-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots \right] - 1 + x = 2e^{-x} - 1 + x.$$

Демек

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) = 2e^{-x} - 1 + x.$$

Кошинин маселесинин чыгарылышы

$y(x) = 2e^{-x} - 1 + x$ болот.

Текшерүү.

$$\begin{cases} y' = 2e^{-x} - 1 = x - y = x - 2e^{-x} + 1 - x = 2e^{-x} - 1 \\ y(0) = 2e^0 - 1 + 0 = 1 \end{cases}$$

**2-Мисал.**

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Бул маселеде [4, 36б.]

$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_n) d\xi$ формуласын колдонуп:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (\xi + y_0) d\xi = 1 + \int_0^x (\xi + 1) d\xi = 1 + x - \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (\xi + y_1(\xi)) d\xi = 1 + \int_0^x \left(\xi + 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2})\right) d\xi =$$

$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$,

$y_3(x) = 1 + \int_0^x (\xi + y_2(\xi))d\xi =$

$= 1 + \int_0^x \left(\xi + 1 + \xi + \xi^2 + \frac{\xi^3}{6})\right) d\xi = 1 + x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$,

………………………………………………………………………………

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x (\xi + y_{n-1}(\xi))d\xi = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \cdots +$$

$+ \frac{x^n}{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

удаалаштыктрарын алабыз. Ушул удаалаштыктын жыйналышын аныктайбыз

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{x^n}{3 \cdot 4 \cdot \ldots n} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} = \left[2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) - 1 - x + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right] =$$

$2 \lim_{n\to\infty} = \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right] - 1 - x + \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} =$

$= 2e^x - 1 - x.$

Демек $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) = 2e^x - 1 - x.$

Кошинин маселесинин чыгарылышы $y(x) = 2e^x - 1 - x$ болот, б,а.

$$\begin{cases} y' = 2e^x - 1 = x + y = x - 2e^x + 1 - x = 2e^{-x} - 1 \\ y(0) = 2e^0 - 1 - 0 = 1 \end{cases}$$

Биринчи тартиптеги жөнөкөй дифференциалдык теңдемелердин жакындаштырып чыгаруу методдорунун турмуштагы колдонулушуна бир нече мисал келтирүүгө болот [4]:

1. **Электр схемаларында:** Электр тизмегиндеги токтун жана чыңалуунун өзгөрүшүн дифференциалдык теңдемелер аркылуу моделдөө жүргүзүлөт. Мисалы, резистор, индуктивтүүлүк жана конденсатордон турган RLC-түзүлүшүндө токтун өзгөрүшү биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме менен сүрөттөлөт. Бул теңдемени сандык жактан жакындаштыруу методдору, мисалы, Эйлердин же Рунге-Кутта ыкмасы, колдонулуп чечилет.
2. **Кошумча заттардын таралышын моделдөө:** Химияда же биологияда заттардын таралышы же реакциясы дифференциалдык теңдемелердин жардамы менен сүрөттөлөт. Мисалы, дары-дармектердин организмдеги сиңирүү жана таралышын изилдөөдө, реакция ылдамдыгы биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелер менен эсептелип, бул процесстерди жакындаштырып чыгаруу методдору аркылуу моделдөөгө мүмкүнчүлүк берет.
3. **Экономикалык моделдер:** Финансылык системаларда пайыздык чендердин өзгөрүшүн моделдештирүүдө же капиталдын убакытка жараша өзгөрүүсүн аныктоодо дифференциалдык теңдемелер колдонулат. Бул моделдерди сандык жактан жакындаштыруу методдору менен анализдөө аркылуу прогноздоолорду жүргүзсө болот.
4. **Автомобилдин кыймылын моделдөө.** Жакындаштырып чыгаруу методдорун колдонуп, транспорттук каражаттын кыймылынын траекториясын жана ылдамдыгын так эсептөө мүмкүн.

**Маселе:** 1. Эйлердин ыкмасы менен жакындаштырып, k=0.1, $v_0 = 100$ м/с жана кадамды Δt=1с кылып, 5 секунда ичиндеги ылдамдыктын өзгөрүшүн эсептегиле [3].

**Маселе 2.** Эйлердин ыкмасын колдонуп, 10 секундадан кийин товар наркынын болжолдуу маанисин эсептеңиз. Кадамды Δt=1 секунда кылып алыңыз [4].

**Жыйынтык:** Бул макалада биринчи тартиптеги жөнөкөй дифференциалдык теңдемелерди жакындаштырып чыгаруу ыкмаларынын маанилүүлүгү жана колдонулушу талданды. Дифференциалдык теңдемелерди чыгаруунун аналитикалык ыкмалары ар дайым мүмкүн боло бербегендиктен, жакындаштыруу методдору, анын ичинде Эйлердин ыкмасы жана Рунге-Кутта методдору, чоң мааниге ээ. Бул методдор илимий жана инженердик эсептөөлөрдө эффективдүү инструмент катары кызмат кылат.

Талкууланган методдор ар биринин өзгөчөлүктөрү, артыкчылыктары жана чектөөлөрү менен мүнөздөлүп, алардын кандай шарттарда натыйжалуулугун жогорулатууга мүмкүн экендиги көрсөтүлдү.

Макаланын жыйынтыгы, жакындаштыруу ыкмаларынын туура тандоосу математикалык моделдөөнүн натыйжалуулугун арттыруудагы негизги фактор болуп саналат. Жакындаштыруу методдорун өркүндөтүү жана аларды жаңы көйгөйлөрдө колдонуу үчүн изилдөө иштерин улантуу сунушталат.

**Колдонулган адабияттар:**

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М:. – Н. 1978. – 48б.
2. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М: – Н. 1984. – 98б.
3. Кошкин Н. И. Основы теории дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1985. – 12б.
4. Кадыркулов Ж.Б. Сандык методдордун колдонулушу жана оптималдаштыруу маселелери. – Бишкек, 2008. – 36б.

**Рецензент: физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент Баетов А.К.**