ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ / ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК.517.368
DOI 10.33514/1694-7851-2024-4/2-432-439

Алымбаев А.Т.
физика-математика илимдеринин доктору, профессор
И.Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
asangul1952@gmail.com
Бапа кызы А.
ага окутуучу
К.Тыныстанов атындагы Ысык-Көл мамлекеттик университети
Каракол ш.
bapakyzya@iksu.kg
Мурзаев Т.
ага окутуучу
И.Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
tagaibekmurzaev@yandex.ru

КИЧИНЕ ПАРАМЕТРДИ КАРМАГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫ ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН КИЧИНЕ ПАРАМЕТРГЕ КАРАТА АСИМПТОТИКАЛЫК КАТАРГА АЖЫРАЛЫШЫ

Аннотация. Чектик маселелер дифференциалдык теңдемелердин жалпы теориясынын маанилүү разделдеринин бири болуп, илим жана техниканын көптөгөн маселелерин изилдөөдө кездешет. Чектик маселе Коши маселесинен айырмаланып, дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы, чектик шартты жалгыз чекитте эмес, чектик шарттын бир канча чекиттеги маанилерин канагаттандырышы керек. Азыркы мезгилде чектик маселелердин чыгарылыштарын тургузуунун сандык, аналитикалык, сан-аналитикалык жана асимптотикалык ыкмалары иштелип, кеңири колдонула баштады. Мындай ыкмалардын бири, А.Пуанкаре тарабынан иштелип чыккан кичине параметр методу жана анын ар түрдүү модификацияларын атасак болот.

Кичине параметрлер ыкмасы, кичине параметрди кармаган дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши жана чектик маселелеринин чыгарылыштарын изилдөөдөгү эффективдүү ыкмалардын бири.

Макалада кичине параметрди кармаган дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн чектик маселенин асимптотикалык чыгарылышын, чектик маселени интегралдык теңдемелердин системасына келтирүү жолу менен тургузулат. Интегралдык теңдеменин асимптотикалык чыгарылышы кичине параметрдин даражасына карата түзүлгөн катар түрүндө изделет. Так жана асимптотикалык чыгарылыштардын ортосундагы айырманын өлчөмүнүн чоңдугу аныкталат.

Негизги сөздөр. Дифференциалдык теңдемелердин системасы, кичине параметр, чектик маселе, асимптотикалык ажыралыш, катаны баалоо, интегралдык теңдемелер методу.

Алымбаев А.Т.
доктор физико-математических наук, профессор
Кыргызский государственный университет имени И.Арабаева
г. Бишкек
asangul1952@gmail.com
Бапа кызы А.
старший преподаватель
Ысык-Кулский государственный университет имени К.Тыныстанова
Каракол ш.
bapakyzya@iksu.kg
Мурзаев Т.
старший преподаватель
Кыргызский государственный университет имени И.Арабаева
г. Бишкек
tagaibekmurzaev@yandex.ru

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Аннотация. Краевые задачи являются одним из важных разделов общей теории дифференциальных уравнений и встречаются при исследовании многих проблем науки и техники. Краевая задача отличается от задачи Коши тем, что решение дифференциального уравнения должен удовлетворять граничному условию в нескольких точках, а не в одной точке.

В настоящее время разработаны и широко используются численные, аналитические, численно-аналитические и асимптотические методы для нахождения решений краевых задач. Одним из таких методов является метод малого параметра, разработанный А. Пуанкаре, и его различные модификации.

Метод малых параметров считается одним из эффективных методов исследования решения задачи Коши и краевых задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с малыми параметрами.

В статье установлен асимптотическое решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с малым параметром путем приведения краевой задачи к системе интегральных уравнений. Асимптотическое решение системы интегрального уравнения ищется в виде степени функционального ряда по малому параметру. Определяется оценка величины погрешности разности между точными и асимптотическими решениями.

Ключевые слова. Система дифференциальных уравнений, малый параметр, краевая задача, асимптотическое разложение, оценка погрешности, метод интегральных уравнений.

Alymbaev A.T.
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Kyrgyz State University named after I.Arabaev
Bishkek c.
asangul1952@gmail.com
Bapa kyzy A.
Senior Lecturer
Issyk-Kul State University named after K. Tynystanov
Karakol c.
bapakyzya@iksu.kg
Murzaev T.
Senior Lecturer
Kyrgyz State University named after I.Arabaev
Bishkek c.
tagaibekmurzaev@yandex.ru

ASYMPTOTIC EXPANSION IN A SMALL PARAMETER OF THE SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER

Annotation. Boundary value problems are one of the important sections of the general theory of differential equations and are encountered in the study of many problems in science and technology. A boundary value problem differs from a Cauchy problem in that the solution to a differential equation must satisfy the boundary condition at several points rather than at one point. Currently, numerical, analytical, numerical-analytical and asymptotic methods have been developed and widely used to find solutions to boundary value problems. One of these methods is the small parameter method developed by A. Poincaré and its various modifications.

The method of small parameters is considered one of the effective methods for studying the solution of the Cauchy problem and boundary value problems for differential and integro-differential equations with small parameters.

The article establishes an asymptotic solution to a boundary value problem for a system of differential equations with a small parameter by reducing the boundary value problem to a system of integral equations. An asymptotic solution to the system of integral equations is sought in the form of a power of a functional series with respect to a small parameter. An estimate of the error value of the difference between the exact and asymptotic solutions is determined.

Key words. System of differential equations, small parameter, boundary value problem, asymptotic expansion, error estimation, method of integral equations.

Төмөнкүдөй чектик маселени карайлы

(1)

$$\frac{dx}{dt} = g_1(t) + \varepsilon f_1(t,x,y,\varepsilon),$$
$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{g}_2(\mathrm{t}) + \varepsilon \mathrm{f}_2(\mathrm{t,x,y},\varepsilon),$$
$$\bar{a}_1 x(0,\varepsilon) + \bar{b}_1 x(T,\varepsilon) = d_1,$$
$$\bar{a}_2 y(0,\varepsilon) + \bar{b}_2 y(T,\varepsilon) = d_2.$$

Мында $g_1(t), g_2(t) -$ үзгүлтүксүз функциялар, ал эми $f_1(t,x,y,\varepsilon), f_2(t,x,y,\varepsilon) - \ x,y,\varepsilon$ чоңдуктарына карата аналитикалык функциялар б.а. $f(t,x,y,\varepsilon) \in C^{\infty}(x,y,\varepsilon)$.
$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2, d_1, d_2$ −заттык сандар.

$$x(0,\varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \cdots + \varepsilon^k a_k + \cdots,$$
$$y(0,\varepsilon) = b_0 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \cdots + \varepsilon^k b_k + \cdots,$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots, b_k \dots$ −белгисиз тандалып алынуучу турактуу заттык сандар.
(1), (2) чектик маселенин чыгарылыштарын изилдеп, анын жакындаштырылган чыгарылыштарын тургузуу ыкмаларын иштеп чыгуу актуалдуу маселелердин бири болуп эсептелет. Бул багытты Самойленко А.М., Ронто Н.И., тарабынан иштелип чыккан удаалаш жакындаштырып табуу сан- аналитикалык ыкманы атасак болот [1, 220 б.].
Ал эми чыгарылышты кичине параметрдин даражасына ажыратуу ыкмасы А.Пуанкаре тарабынан иштелип чыгып, азыркы учурда анын ар кандай модификациялары бар [2, 771 б.]: И.Г Малкиндин методу [3, 491 б.], Лятхиллдин методу [4, 455 б.], А.И. Боташев методу [5, 270 б.], К.Алымкулов методу [6, 138 б.]. [7, 205 б.] иште Алымбаев А.Т. тарабынан “интегро-дифференциалдык метод”, аттуу ыкма сунушталып, анын жалпы интегро-дифференциалдык теңдемелердин теориясынын аппараттарынын негизинде математикалык негизделиши каралган.

$A = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & 0 \\ 0 & \bar{a}_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 & 0 \\ 0 & \bar{b}_2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} -$
белгилөөлөрүн киргизип (1), (2) чектик маселени төмөндөгүдөй түрдө жазып алабыз.

$$\frac{dx}{dt} = g(t) + \varepsilon f(t,z,\varepsilon), \tag{3}$$
$$Az(0,\varepsilon) + Bz(T,\varepsilon) = d, \qquad z(0,\varepsilon) = \big(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon)\big) \tag{4}$$

Лемма1. $f(t)$ функциясы [0,T] кесиндиде үзгүлтүксүз функция болсо, анда

$$\left| \int_0^t \left[f(s) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds \right] ds \right| \le \frac{T}{2}|f(t)|_0, \qquad |f(t)|_0 = \max_t |f(t)|.$$

Лемма2. Эгерде $detB \neq 0$ болсо, анда (3), (4) чектик маселени интегралдык теңдемеге келтирүүгө болот.

$$z(t,\varepsilon) = z(0,\varepsilon) + \int_0^t \left[g(s) - \frac{1}{T}\int_0^T g(s)ds \right] ds + \int_0^t \left[f(s,z(s),\varepsilon) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,z(s),\varepsilon)ds \right] ds +$$
$$+ \frac{t}{T}\left[B^{-1}d - (B^{-1}A + E)z(0,\varepsilon)\right]. \tag{5}$$

Далилдөө. (3) системанын оң жагына α параметрин кошуп, барабардыктын эки жагын интегралдап

$$z(t,\varepsilon)=z(0,\varepsilon)+\int_0^t g(s)ds+\varepsilon\int_0^t f(s,z(s),\varepsilon)ds+\alpha t \qquad (6)$$

теңдемесин түзобүз.

(4) чектик шарттын негизинде төмөндөгүдөй барабардыкты алабыз

$$Az(0,\varepsilon)+Bz(T,\varepsilon)+B\left[\int_0^T g(s)ds+\varepsilon\int_0^T f(s,z(s,\varepsilon),\varepsilon)ds+\alpha t\right]=d.$$

Мындан

$$\alpha=\frac{1}{T}\left[B^{-1}d-(B^{-1}A+E)z(0,\varepsilon)-\varepsilon\int_0^T f(s,z(s,\varepsilon),\varepsilon)ds-\int_0^T g(s)ds\right]. \qquad (7)$$

Параметр α маанисин (6) теңдемеге коюп (5) интегралдык теңдемени алабыз.

Теорема1. Эгерде $z^0(t,\varepsilon)$ функциясы

$$B^{-1}d-(B^{-1}A+E)z^0(0,\varepsilon)-\varepsilon\int_0^T f(s,z^0(s,\varepsilon),\varepsilon)ds-\int_0^T g(s)ds=0 \qquad (8)$$

теңдемени канагаттандырган (5) интегралдык теңдеменин чыгарылышы болсо, анда ал (3), (4) чектик маселенин дагы чыгарылышы болот.

Далилдөө. Эгерде $z^0(t,\varepsilon)$ функциясы (8) теңдемени канагаттандырса, анда (7) барабардыктан $\alpha=0$ экендиги келип чыгат. Анда $z^0(t,\varepsilon)$ функциясы

$$z(t,\varepsilon)=z(0,\varepsilon)+\varepsilon\int_0^t f(s,z(s,\varepsilon),\varepsilon)ds$$

интегралдык теңдемесин канагаттандырат. Теңдеменин эки жагын дифференцирлеп, (3) дифференциалдык теңдемелердин системасын алабыз. Ал эми (8) шарттан $z^0(t,\varepsilon)$ функциясы (4) чектик шартты канагаттандыра тургандыгын көрө алабыз.

(1), (2) чектик маселени карайлы жана ага туура келген интегралдык теңдемелердин системасын түзөлү. Жогорудагы белгилөөлөрдү эске алып

$$B^{-1}d-(B^{-1}A+E)z(0,\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{1}{\bar{b}_1}\left[\bar{a}_1d_1-(\bar{a}_1+\bar{b}_1)x(0,\varepsilon)\right],\\ \dfrac{1}{\bar{b}_2}\left[\bar{a}_2d_2-(\bar{a}_2+\bar{b}_2)y(0,\varepsilon)\right],\end{cases}$$

экендигин көрсөтөбүз.

(5) интегралдык теңдемеден $x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)$ функцияларына карата, төмөндөгүдөй интегралдык теңдемелердин системасын түзөбүз.

$$x(t,\varepsilon)=x(0,\varepsilon)+\int_0^t\Big[g_1(s)+\varepsilon f_1(s,x(s,\varepsilon),y(s,\varepsilon),\varepsilon)-\frac{1}{T}\int_0^T(g_1(s)$$
$$+\varepsilon f_1(s,x(s,\varepsilon),y(s,\varepsilon),\varepsilon))ds\Big]ds+$$

$$-\frac{1}{Tb_1}\left[\bar{a}_1 d_1 - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1) x(0,\varepsilon)\right], \qquad (9)$$

$$y(t,\varepsilon) = y(0,\varepsilon) + \int_0^t [g_2(s) + \varepsilon f_2(s, x(s,\varepsilon), y(s,\varepsilon), \varepsilon) - \frac{1}{T}\int_0^T (g_2(s) + \varepsilon f_2(s, x(s,\varepsilon), y(s,\varepsilon), \varepsilon)) ds] ds +$$

$$-\frac{1}{Tb_2}\left[\bar{a}_2 d_2 - (\bar{a}_2 + \bar{b}_2) y(0,\varepsilon)\right]. \qquad (10)$$

Теорема 2. $\bar{x}(t,\varepsilon), \bar{y}(t,\varepsilon)$ функциялары

$$\frac{1}{\bar{b}_1}\left[\bar{a}_1 d_1 - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1) x(0,\varepsilon)\right] - \int_0^T (g_1(s) + \varepsilon f_1(s, \bar{x}(s,\varepsilon), \bar{y}(s,\varepsilon), \varepsilon)) ds = 0,$$

$$\frac{1}{\bar{b}_2}\left[\bar{a}_2 d_2 - (\bar{a}_2 + \bar{b}_2) y(0,\varepsilon)\right] - \int_0^T (g_2(s) + \varepsilon f_2(s, \bar{x}(s,\varepsilon), \bar{y}(s,\varepsilon), \varepsilon)) ds = 0.$$

(9), (10) интегралдык теңдемелерин шарттарын канагаттандырган чыгарылыштары болсун, анда бул функциялар (1), (2) чектик маселенин чыгарылыштары болот.

(9), (10) интегралдык теңдемелердин системасын төмөндөгүдөй катар түрүндө издейбиз

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots \varepsilon^k x_k(t) + \cdots, \qquad (11)$$

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \cdots \varepsilon^k y_k(t) + \cdots, \qquad (12)$$

(11), (12) катарды (9), (10) интегралдык теңдемелерге коюп, $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots, b_0, b_1, \dots, b_k, \dots$ коэффициенттерин төмөндөгүдөй туюнтмалардын негизинде тандап алсак

$$a_0 = \frac{1}{\bar{a}_1 + \bar{b}_1}\left(\bar{a}_1 d_1 - \bar{b}_1 \int_0^T g_1(s)\, ds\right), \qquad (13_0)$$

$$a_1 = -\frac{1}{\bar{a}_1 + \bar{b}_1}\int_0^T f_1(s, x_0(s), y_0(s), 0) ds, \qquad (13_1)$$

....

$$a_k = -\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_1 + \bar{b}_1}\int_0^T [f_{1x}(s, x_0(s), y_0(s), 0)\, x_{k-1}(s) + f_{1y}(s, x_0(s), y_0(s), 0) y_{k-1}(s) +$$

$$+ F_{k-1} s, x_0(s), x_1(s), \dots, x_{k-2}(s), y_0(s), y_1(s), \dots, y_{k-2}(s)] ds, \qquad (13_k)$$

$$b_0 = \frac{1}{\bar{a}_2 + \bar{b}_2}\left(\bar{a}_2 d_2 - \bar{b}_2 \int_0^T g_2(s)\,ds\right), \qquad (14_0)$$

$$b_1 = -\frac{1}{\bar{a}_2 + \bar{b}_2}\int_0^T f_2(s, x_0(s), y_0(s), 0)\,ds, \qquad (14_1)$$

…………………………………………………………

$$b_k = -\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_2 + \bar{b}_2}\int_0^T f_{2x}(s, x_0(s), y_0(s), 0)x_{k-1}(s) + f_{2y}(s, x_0(s), y_0(s), 0)y_{k-1}(s) +$$

$$+G_{k-1}\big(s, x_0(s), x_1(s), \dots, x_{k-2}(s), y_0(s), y_1(s), \dots, y_{k-2}(s)\big)ds \qquad (14_k)$$

$$k = 1,2,3, \dots.$$

анда (11), (12) асимптотикалык ажыралыштын коэффициенттери төмөндөгүдөй реккуренттик системанын негизинде аныкталат.

$$x_0(t) = a_0 + \int_0^t g_1(s)\,ds, \qquad (15_0)$$

$$x_1(t) = a_1 + \int_0^t f_1(s, x_0(s), y_0(s), 0)\,ds, \qquad (15_1)$$

……………………………………………..

$$x_k(t) = a_k + \int_0^t [f_{1x}(s, x_0(s), y_0(s), 0)\,x_{k-1}(s) + f_{1y}(s, x_0(s), y_0(s), 0)y_{k-1}(s) +$$

$$+F_{k-1}s, x_0(s), x_1(s), \dots, x_{k-2}(s), y_0(s), y_1(s), \dots, y_{k-2}(s)]ds, \qquad (15_k)$$

$$y_0(t) = b_0 + \int_0^t g_2(s)\,ds, \qquad (16_0)$$

$$y_1(t) = b_1 + \int_0^t f_2(s, x_0(s), y_0(s), 0)\,ds, \qquad (16_1)$$

……………………………………………..

$$y_k(t) = b_k + \int_0^t [f_{2x}(s, x_0(s), y_0(s), 0)\,x_{k-1}(s) + f_{2y}(s, x_0(s), y_0(s), 0)y_{k-1}(s) +$$

$$+G_{k-1}s, x_0(s), x_1(s), \dots, x_{k-2}(s), y_0(s), y_1(s), \dots, y_{k-2}(s)]ds, \qquad (16_k)$$

$$k = 2,3, \dots$$

$X_n(t,\varepsilon), Y_n(t,\varepsilon)$ аркылуу (11), (12) катардын жекече суммасын белгилейбиз:

$$X_n(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k x_k(t), \qquad Y_n(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k y_k(t), \qquad (17)$$

жана $|x(t,\varepsilon)-\mathrm{X}_n(t,\varepsilon)|$, $|y(t,\varepsilon)-Y_n(t,\varepsilon)|$ айырмаларынын катасынын чоңдугу төмөндөгүдөй теореманын негизинде аныкталарын көрсөтүгө болот.

Теорема3. $g_1(t), g_2(t)$ функциялары үзгүлтүксүз, ал эми $f_1(t,x,y,\varepsilon), f_2(t,x,y,\varepsilon)$ – x, y, ε чоңдуктары боюнча аналитикалык функциялар болсун дейли.

Эгерде $x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon)$ баштапкы маанилердеги катардын коэффициенттери (13_0),…,(13_k), (14_0),…, (14_k) туюнтмалары аркылуу аныкталса, анда (11), (12) катардын коэффициенттери (15_0),…,(15_k), (16_0),…, (16_k) туюнтмалары аркылуу аныкталат жана (11), (12) катар менен алардын жекече суммаларынын (17) ортосундагы айырманын чени төмөндөгүдөй барабарсыздыктар аркылуу аныкталат:

$$|x(t,\varepsilon)-\mathrm{X}_n(t,\varepsilon)|_0 \le \le \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}\varepsilon^k\left[\frac{|\bar a_1||a_k|+|\bar a_1+\bar b_1|}{|\bar a_1|}\left(1-\frac{\varepsilon T}{2}\left|f_{2y}\right|_0\right)+\frac{|\bar a_2||b_k|+|\bar a_2+\bar b_2|}{|\bar a_2|}\frac{\varepsilon T}{2}\left|f_{1y}\right|_0\right]}{1-\frac{\varepsilon T}{2}\left(\left|f_{2y}\right|_0+|f_{1x}|_0\right)+\varepsilon^2\frac{T^2}{4}\left(|f_{1x}|_0\left|f_{2y}\right|_0-\left|f_{1y}\right|_0|f_{2x}|_0\right)}$$

$$|y(t,\varepsilon)-Y_n(t,\varepsilon)|_0 \le \le \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}\varepsilon^k\left[\frac{|\bar a_1||a_k|+|\bar a_1+\bar b_1|}{|\bar a_1|}\frac{\varepsilon T}{2}|f_{2x}|_0+\frac{|\bar a_2||b_k|+|\bar a_2+\bar b_2|}{|\bar a_2|}\left(1-\frac{\varepsilon T}{2}|f_{1x}|_0\right)\right]}{1-\frac{\varepsilon T}{2}\left(\left|f_{2y}\right|_0+|f_{1x}|_0\right)+\varepsilon^2\frac{T^2}{4}\left(|f_{1x}|_0\left|f_{2y}\right|_0-\left|f_{1y}\right|_0|f_{2x}|_0\right)}.$$

Адабияттар

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования краевых задач.- Киев.: Наукова думка, 1956, – 220с.
2. Пуанкаре А. Избранные труды. – М.: Наука, 1971, Т.1, – 771с.
3. Малкин Н.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. -М.:Гостехиздат, 1956. – 491с.
4. Найфэ Ф.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455с.
5. Боташев А.И. Конечные методы в теории многомерного ветвления.- Фрунзе: Илим, 1976. – 270с.
6. Алымкулов К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач. – Бишкек: Илим, 1992. – 138с.
7. Алымбаев А.Т. Численные, численно - аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач. – Бишкек: Из-во КНУ, 2015. – 205с.

Рецензент: физика-математика илимдеринин доктору, профессор Байзаков А.Б.