Институт математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики
Кыргызский Национальный университет имени Ж. Баласагына

Диссертационный совет Д 01.19.598

На правах рукописи
УДК 517.928

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич

Равномерная асимптотика решений бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Бишкек – 2020

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии Ошского государственного университета

Научный консультант: Алымкулов Келдибай, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Национальной Академии наук Кыргызской Республики, директор Института фундаментальных и прикладных исследований при Ошском государственном университете

Официальные оппоненты: Отелбаев Мухтарбай, доктор физико-математических наук, профессор, академик Национальной Академии наук Республики Казахстан, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования Комитета науки Министерства Образования и Науки Республики Казахстан

Дауылбаев Муратхан Кудайбергенович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления Казахского Национального университета им. аль-Фараби

Искандаров Самандар, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лаборатории теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики

Ведущая организация: кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений Ферганского государственного университета, 112000, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19.

Защита состоится 18 июня 2020 года в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.19.598 при Институте математики Национальной академии наук КР и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374. Сайт Института математики Национальной академии наук КР: www.math.kg.

Код защиты: 3264902235.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной Академии наук Кыргызской Республики, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а и Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына, 720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547.

Автореферат разослан 3 июня 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, к.ф.-м.н. Шаршембиева Ф. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Многие практические задачи гидро- и аэродинамики, электро- и радиотехники, квантовой механики, химической кинетики и науки описываются так называемыми «дифференциальными уравнениями с малыми параметрами при старших производных», и они называются сингулярно возмущенными.

Сегодня сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения составляют самостоятельную область математики, представляющую большой теоретический и прикладной интерес, и поэтому почти за каждые два-три года появляются монографии, посвященные этому разделу дифференциальных уравнений.

Случаи, в которых сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения имеют явные решения, крайне редки. Даже для современных компьютеров определение поведения решения в пограничных слоях при достаточно малых значениях параметра - весьма трудоемкая задача. Важными инструментами при исследовании поведений решений сингулярно возмущенных задач являются асимптотические методы. В связи с этим разработка новых таких методов никогда не теряет свою актуальность.

В развитие асимптотической теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений большой вклад внесли Л. Прандтль (1904), К. О. Фридрихс (1961), Ф.Х. Нагумо (1937), Ван-дер-Поль (1949), Ж. Лиувилл (1850), А.Н. Тихонов (1950), И.С. Градштейн (1949), Дж. Лайтхилл (1971), Н. Левинсон (1950), А.Б. Васильева (1963), П. А. Лагерстром (1988), В.П. Маслов (1983), Л.С. Понтрягин (1962), Н.Х. Розов (1995), Е.Ф. Мищенко (1970), А.А. Дородницын (1942), В.Ф. Бутузов (1963), М.И. Вишик (1989), Л.А. Люстерник (1989), В. Вазов (1966), Д.В. Аносов (1988), М. Иманалиев (1964), А.М. Ильин (1988), С.А. Ломов (1972), В.Г. Сушко (1998), А.Р. Данилин (2019), Р.Р. Гадыльшин (2013), Л.А. Калякин (2014), Н.Н. Нефедов (2019), А.Х. Найфе (1980), W. Eckhaus (1975), E.M. De Jager (1990), J. Kevorkian (1975), J.D. Cole (1982), J. Grasman (2005), P.P.N. De Groen (2014), М.В. Федорюк (1985), В. Н. Бобочко (2005), К.А. Касымов (1995), К. Алымкулов (2012), П.С. Панков (1995), М.К. Дауылбаев (2015), С. Каримов (1980), К. Какишов (1990), А.С. Омуралиев (2008), К.С. Алыбаев (2001) и др.

Вместе с тем проблема построения асимптотических разложений решений для многих классов сингулярно возмущенных задач до сих пор не решена до конца. Появляются новые физико-технические задачи, для которых нужно разработать новые асимптотические методы.

Диссертация посвящена построению асимптотических разложений решений линейных и нелинейных бисингулярно возмущенных задач, в частности, построению новых методов для явления прыжка и химической реакции со стационарной достижимостью. Равномерные асимптотические разложения решений задач Дирихле, Коши, Неймана и Робена строятся обобщенным методом пограничных функций, методом униформизации и методом преобразования (метод редукции). Для оценки остаточных членов применяется классический принцип максимума.

Применяется новый метод, разработанный нами, построения асимптотического разложения решения уравнения Бесселя при больших значениях действительного и комплексного аргументов, который является обобщением метода Пуанкаре - Линдстета из теории нелинейных колебаний. Здесь в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента, которое при больших его значениях является малым.

Также предлагается новый подход для построения асимптотики решения для химической реакции, который является обобщением метода Пуанкаре - Лайтхилла - Го из теории нелинейных колебаний.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами. Работа выполнялась в рамках научных проектов по Институту фундаментальных и прикладных исследований при ОшГУ по темам:

1) «Изучение математических моделей гидро - аэродинамики, химической кинетики, тепло-массообмена и других явлений природы», № гос. регистрации 0005721, 20.04.2012 г.

2) «Математические задачи гидро- аэродинамики и других явлений природы», договор с МОН КР УН 28/13 от 28.03.2013 г.

3) «Метод структурного сращивания и обобщенный метод погранфункций», договор с МОН КР УН № ОН - 2/14 27.01.2014-2015 г.

4) «Обобщение различных моделей для задач горения и взрывов и рекомендации», 2017 г.

5) «Задачи фазовых переходов и критические явления. Математические аспекты их уравнений, быстрые переходы и асимптотики», 2019 г.

Цель и задачи исследования. Целью исследования является построение асимптотики решения задач Рейсса для явления прыжка и химической реакции со стационарной достижимостью и асимптотики решения уравнения Бесселя, при больших значениях аргумента в действительной и комплексной областях. Развитие обобщенного метода погранфункций для построения асимптотики решения бисингулярно возмущенных задач с иррегулярной особенностью.

Задачи исследования:

1. Построить асимптотику решения:

а) модельного уравнения Рейсса для явления скачка и определить начало точки скачка;

б) химической реакции со стационарной достижимостью (со скачком);

в) уравнения Бесселя при больших значениях аргумента в действительной и комплексной областях без использования контурного представления его решения;

2. Применить обобщенный метод погранфункций для построения асимптотических разложений решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет иррегулярную особую точку и точку поворота дробного порядка.

3. Построить обобщенным методом погранфункций асимптотику решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа.

Научная новизна работы. Впервые в диссертационной работе:

- методами униформизации и преобразований построена асимптотика решения модельного уравнения Рейсса и определена точка, в которой начинается скачок;

- построена асимптотика решения химической реакции со стационарной достижимостью (со скачком). Предложен новый подход для построения асимптотики решения химической реакции, где асимптотическое разложение решения имеет две особые точки. Также использована экспоненциально малая поправка в асимптотическом разложении, без которой нельзя построить правильную асимптотику решения;

- разработан новый метод, который обобщает метод Пуанкаре – Линдстета из теории нелинейных колебаний, при помощи которого исследовано уравнение Бесселя при больших значениях аргумента;

- модифицированным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет иррегулярную особую точку;

- обобщенным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений начальной и первой краевой задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с точкой поворота;

- обобщенным методом погранфункций построены асимптотики решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа;

- методом преобразований построена асимптотика решения задачи Коши для уравнения параболического типа с малым коэффициентом температуропроводности на верхней полуплоскости.

Практическая значимость полученных результатов. Хотя работа является теоретической, ее результаты могут быть применены в теории возмущений, гидродинамике, аэродинамике, химической кинетике, физике лазеров, биологии и в других отраслях науки. Разработанные два новых метода построения асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных уравнений могут найти своё применение и для других таких уравнений. Результаты исследования также могут быть использованы при чтении лекционных курсов по теории возмущений, и специального курса для подготовки бакалавров и магистров по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», кроме того, могут быть использованы для решения других теоретических задач, связанных с качественной теорией дифференциальных уравнений.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- построение асимптотики решения модельного уравнения Рейсса методом униформизации и методом преобразований. Определение начальной точки перехода к устойчивой стационарной точке;
- построение асимптотики решения химической реакции со стационарной достижимостью;
- построение асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента в действительной и комплексной областях с помощью нового метода, который не использует контурное представление его решения.
- построение модифицированным методом погранфункций асимптотических разложений решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку;
- построение обобщенным методом погранфункций асимптотических разложений решений начальной и первой краевой задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с точкой поворота;
- построение асимптотики решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа обобщенным методом погранфункций;
- построение асимптотики решения задачи Коши для уравнения параболического типа с малым коэффициентом температуропроводности на верхней полуплоскости с помощью преобразований.

Личный вклад соискателя. В совместных работах К. Алымкулову принадлежит постановка проблем, Д.А. Турсунову - обсуждение результатов, а соискателю - идеи, разработанные методы, теоретическая разработка полученных результатов, доказательство теорем, получение и формулировка научных результатов.

Апробация результатов исследования. Результаты работы докладывались и обсуждались на:

Международные научные конференции

- «Борубаевские чтения», посвященные 35-летию со дня образования ИМ НАН КР (г. Бишкек, 2019 г.);

- «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры». Конференция, посвященная 10-летию Евразийского математического журнала. ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 16-19 окт. 2019 г., г. Нур-Султан;

- «Борубаевские чтения» (г. Бишкек, 2018 г.);

- «Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8». Конференция, посвященная 80-летию со дня рождения А.М. Самойленко (г. Чолпон-Ата, 2018 г.);

- VI Конгресс Всемирного математического общества тюркоязычных стран (г. Алматы, Казахстан, 2017 г.);

- «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». Международная конференция, посвященная 70-летию профессора А. Керимбекова (г. Чолпон-Ата, 2017 г.);

- «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике». Конференция, посвященная 80-летию академика М.И. Иманалиева (г. Бишкек, 2016 г.);

- «Информационные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании». Международная конференция, посвященная 75-летию академика А. Жайнакова (г. Бишкек, 2016 г.);

- «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». Конференция, посвященная 65-летию со дня рождения академика А.А. Борубаева (г. Бишкек, 2015 г.).

- Issyk-Kul International Mathematical Forum (г. Чолпон-Ата, 2015 г.);

- «Актуальные проблемы математики и информатики». Конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика НАН РК К.А. Касымова (г. Алматы, 2015 г.);

- «Роль науки и образования в современных условиях глобализации». Международная конференция, посвященная 75-летию академика Б. Мурзубраимова (г. Ош, 2015 г.);

- V Конгресс Всемирного математического общества тюркоязычных стран (г. Чолпон-Ата, 2014 г.).

на межрегиональных семинарах математиков южного Кыргызстана «Актуальные проблемы математики и информатики», руководитель семинара член-корр. НАН КР, профессора К. Алымкулова (г. Ош, 2012-2019 гг.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. По результатам исследований соискателем опубликованы: одна монография [1], 19 статей [2]-[20] и 6 тезисы докладов [21]-[26]. В том числе три статьи опубликованы в журналах, индексируемых в базах Scopus и Web of Science. Все научные результаты, отраженные в диссертации, получены автором лично.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из оглавления, списка условных обозначений и определений, принятых в работе, введения, шести глав, разбитых на 19 параграфов, выводов, списка использованной литературы.

Список использованной литературы содержит 95 наименований. Объем текста 168 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ» состоит из двух параграфов. В § 1.1 «Обзор литературы» дается обзор литературы по теме диссертации. В данном параграфе проведен анализ научных результатов работ других авторов, наиболее близких к теме предлагаемой диссертационной работы. В § 1.2 «Обзор результатов диссертации» приведен подробный обзор научных результатов диссертации. Детально изложены постановки задач и теоремы без доказательств. В заключении первой главы отмечено, что на основании проведенных анализов диссертационное исследование актуально, оригинально, своевременно и имеет определенный теоретический и практический интерес.

Вторая глава «МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» состоит из двух параграфов. В § 2.1 «Объекты и предметы исследования» приведены объекты и предметы исследования:

Объект исследования. Начальные и граничные (Дирихле, Нейман, Робен) задачи для линейных и нелинейных бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Уравнение Бесселя при больших значениях аргумента, сингулярно возмущенные уравнения теплопроводности.

Предмет исследования. Построение асимптотики решения бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений.

В § 2.2 «Методы исследования» подробно с конкретными примерами изложены многократно используемые в данной диссертации метод преобразования и асимптотические методы: метод малого параметра, классический метод погранфункций, обобщенный метод погранфункций, метод униформизации и метод мажорант. Отмечено, к каким классам возмущенных задач применяются эти методы.

Третья глава «АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ» посвящена построению асимптотики решения нелинейных сингулярно возмущенных задач с быстрыми переходами.

В §3.1 «Асимптотика решения задачи Рейсса для явления прыжка» исследована асимптотика решения задачи Рейсса для явления прыжка

$$y'(t)=y^2(t)\big(1-y(t)\big),\, t\in(0,\infty),\quad y(0)=\varepsilon. \tag{1}$$

Точное решение задачи (1) можно выразить в неявном виде:

$$-\frac{1}{y}+ln\frac{y}{1-y}=t-\frac{1}{\varepsilon}+ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

и в явном виде:

$$y(t)=\frac{1}{W\left(\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}e^{\frac{1}{\varepsilon}-t-1}\right)+1},$$

где $W(x)$ - функция Ламберта (если $xe^x=a$, то $x=W(a)$).

Асимптотика решения задачи (1) построена двумя способами.

1-й способ. Асимптотика решения задачи (1) строится из точного решения в неявном виде. Доказана

Теорема 1. Для решения задачи (1), при $\varepsilon\to 0$, справедливо асимптотическое разложение:

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{\tilde{y}(t,\varepsilon)},\ при\ \ t\le\dfrac{1}{\varepsilon}-ln\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\\[2ex] y_2(t),\ \ при\ \ \ \tau=t-\dfrac{1}{\varepsilon}+ln\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\,\tau>0\ \tau>\tau_0,\end{cases}$$

где $y_2(t)=1-e^{-\tau}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k e^{-k\tau}$, φ_j - некоторые постоянные,

$$\tilde{y}(t,\varepsilon)=1-\varepsilon t-\varepsilon\, ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}-\varepsilon\, ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-t-ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}-1\right)\left(1+\sum_{i+j=1}^{\infty}a_{ij}\alpha^i\beta^j\,)\right).$$

В точке $t=t_0:=t_0(\varepsilon)=\dfrac{1}{\varepsilon}-ln\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\, y=y_0\approx 0.78$ начинается скачок к стационарной точке y=1.

2-й способ. Получение асимптотического разложения методом униформизации. После преобразования $y=\varepsilon x$, $\theta=\varepsilon t$ задача (1) приводится к виду

$$x'(\theta)=x^2(\theta)(1-\varepsilon x(\theta)),\, x(0)=1. \tag{2}$$

Если решать задачу (2) обычным методом возмущений, то есть искать решение в виде

$$x(\theta)=x_0(\theta)+\varepsilon x_1(\theta)+\ldots+\varepsilon^n x_n(\theta)+\ldots, \tag{3}$$

то имеем

$$x_0(\theta)=(1-\theta)^{-1},\ldots,\ x_n(\theta)\sim(1-\theta)^{-n-1}\ln^n(1-\theta),\ldots \text{ при } \theta\to 1. \tag{4}$$

Из (4) видно, что ряд (3) расходится в окрестности точки $\theta=1$ или $t=1/\varepsilon$. Более точно, ряд (3) сходится только на промежутке $[0,\theta_0)$, где

$$\theta_0 = 1-\varepsilon\left(-ln\,\varepsilon - ln\left(-ln\,\varepsilon\right)+O(1)\right).$$

Чтобы получить решение задачи (2) для любого $\theta\in[0,\infty)$, вместо него рассмотрим униформизирующее уравнение

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi}=x^2(\xi),\ \ \frac{d\theta}{d\xi}=(1-\varepsilon x(\xi))^{-1},\ x(0)=1, \theta(0)=0,\quad \xi\in[0,\infty). \tag{5}$$

Доказана эквивалентность задач (1) и (5).

В § 3.2 «Асимптотика решения задачи химической реакции со стационарной достижимостью» рассмотрена задача химической реакции со стационарной достижимостью[1]. Здесь исследуется нелинейная задача, взятая из теории пространственно однородных тепловых взрывов. Оказывается, в этой задаче асимптотическое разложение решения имеет две особые точки, которые не были замечены в других работах. Они указывают на появление более одной внешней области, более одного (внутреннего) слоя и нелинейного преобразования расжатия.

Исследуется задача Коши

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\varepsilon}{\beta}\left(1+\beta-T\right)e^{\frac{T-1}{\varepsilon T}},\quad T\left(0\right)=1. \tag{6}$$

Известно точное решение задачи Коши (6) в неявном виде:

$$t(T)=\frac{\beta}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}Ei\left(\frac{1}{T\varepsilon}\right)-e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon T}-\frac{1}{\varepsilon\left(1+\beta\right)}\right)\right\}-$$

$$-\frac{\beta}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)-e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon\left(1+\beta\right)}\right)\right\},$$

где $Ei\left(x\right)=P.V.\int\limits_{-\infty}^{x}y^{-1}e^{y}dy$.

Требуется построить явное асимптотическое решение задачи (6) по малому параметру ε при $\varepsilon\to 0$.

Доказана

Теорема 2. Для решения задачи (6) при $t\in[0,1-\varepsilon^{\alpha}]$, $0<\alpha<1$ справедливо асимптотическое разложение

$$T=1+\varepsilon\,ln\frac{1}{1-t}+\varepsilon^2\frac{1}{1-t}\left\{\tilde{T}_1+\frac{\varepsilon}{1-t}\tilde{T}_2+\ldots+\left(\frac{\varepsilon}{1-t}\right)^n\tilde{T}_{n+1}+\ldots\right\}\ \text{при}\ \varepsilon\to 0. \tag{7}$$

Ряд (7) является асимптотическим только при $t\in[0,1-\varepsilon^{\alpha}]$, $0<\alpha<1$. В

---

[1] Ashwani K. Kapila Asymptotic Treatment of Chemically Reacting Systems. 1983.

малой окрестности точки t=1 теряется свойство асимптотичности.

Чтобы построить асимптотическое решение при t>1 введем новую переменную s: $t-1=\frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\beta/(1+\beta)\varepsilon}s$.

Введем обозначение: T(t)=ψ(s). Тогда

$$ds=\frac{\beta}{\varepsilon}e^{\frac{\beta}{(1+\beta)\varepsilon}}dt,\ t=1\Rightarrow s=0;\ \ t>1\Rightarrow s\to\infty,\ \varepsilon\to 0;\ t<1\Rightarrow s\to-\infty,\ \varepsilon\to 0.$$

и уравнение (6) в новой переменной s примет вид:

$$\frac{d\psi}{ds}=\left(1+\beta-\psi\right)e^{\frac{\psi-(1+\beta)}{\varepsilon\psi(1+\beta)}},\ \ T\left(1\right)=\omega:=1-\varepsilon ln\varepsilon+O\left(\varepsilon\left(ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^2,\varepsilon\to 0. \quad (8)$$

Доказана

Теорема 3. Решение задачи (8) можно представить в виде асимптотического разложения

$$\psi\left(s\right)=1+\beta+\varepsilon\left(1+\beta\right)^2e^{-s}+O\left(\varepsilon\left(1+\beta\right)e^{-s}\right)^2+...+O\left(\varepsilon\left(1+\beta\right)e^{-s}\right)^n+...,\ s\to\infty,\varepsilon\to 0.$$

Доказана

Теорема 4. Асимптотическое решение задачи (6) представляется в виде

$$T(t)=1-\varepsilon ln(\tilde{t}-t)+O[\varepsilon ln(\tilde{t}-t)]^2,\varepsilon\to 0,t\le 1$$

$$T(s)\{\ s=\left(t-1\right)\frac{\beta}{\varepsilon}e^{\beta/(1+\beta)\varepsilon}\ \}=1+\beta+\varepsilon\left(1+\beta\right)^2e^{-s}+O\left(\varepsilon\left(1+\beta\right)e^{-s}\right)^2+$$

$$+...+O\left(\varepsilon\left(1+\beta\right)e^{-s}\right)^n+...,\ s\to\infty,t>1,\varepsilon\to 0.$$

Заключение по главе 3. Для задачи Рейсса начиная с момента

$$t=t_0:=t_0(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}-ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ y=y_0\sim 0.78$$

происходит быстрый переход к устойчивой точке y=1.

Решение задачи (6) начинает скачок в особой точке

$$\tilde{t}=1-\varepsilon ln\varepsilon+(\varepsilon ln\varepsilon)^2,\varepsilon\to 0,$$

и при этом

$$T\left(\tilde{t}\right)=1-\varepsilon ln\varepsilon+O\left(\varepsilon ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2,\varepsilon\to 0.$$

Затем быстро перейдет в точку равновесия T=1+β.

Глава 4 «АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА» посвящена построению асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента.

Обычно асимптотику решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента получают из интегрального представления его решения, например, из интегрального представления Пуассона, Ханкеля, Сонина, Шлефли и др.

В диссертации изложены простые методы получения асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента. Асимптотика решения строится прямо из уравнения Бесселя двумя способами: сведением к уравнению Риккати и прямым методом.

В § 4.1 «Сведение уравнения Бесселя к уравнению Риккати» асимптотика решения уравнения Бесселя нулевого порядка построена сведением к уравнению Риккати.

Для простоты рассмотрим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+y(x)=0. \tag{10}$$

В (10) сделаем подстановку: $y(x)=e^{\int S(x)dx}$.

Отсюда относительно $S(x)$ получим уравнение:

$$S'(x)+S^2(x)+\frac{1}{x}S(x)+1=0. \tag{11}$$

За нулевое приближение решения уравнения (11) берем решение уравнения:

$$S_0^2(x)+1=0 \Rightarrow S_0(x)=\pm i.$$

Доказаны

Теорема 5. Асимптотическое решение задачи (11) можно представить в виде

$$S(x)=\pm i-\frac{1}{2}x^{-1}+a_2x^{-2}+...+a_nx^{-n}+R_{n+1}(x),\quad x\to\infty, \tag{12}$$

где $|R_{n+1}(x)|\le lx^{-(n+1)}$, l=const.

Теорема 6. Ряд (12) является асимптотическим рядом при больших значениях x.

В § 4.2 «Прямой метод получения асимптотики решения из уравнения Бесселя» прямым методом построена асимптотика решения уравнения Бесселя. Здесь изложен новый метод, который обобщает метод малого параметра Пуанкаре – Линдстета в теории нелинейных колебаний, и в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента при больших его значениях.

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)y(x)=0 \tag{13}$$

и подстановкой

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}u(x),$$

где $u(x)$ - новая неизвестная функция, уравнение (13) сводим к виду

$$u''(x)+\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)u(x)=0, \tag{14}$$

где $\alpha=\frac{1}{4}-v^2$.

Мы будем искать решение уравнения (14), удовлетворяющее условию

$$u(x)\to\cos x,\ x\to\infty.$$

Это условие можно заменить на условие: $u(x)\to\sin x,\ x\to\infty$.

Доказана

Теорема 7. Асимптотическое разложение решения уравнения Бесселя представляется в виде

$$u(x)=\cos x+J_1(x)\sin x+J_2(x)\cos x, \tag{15}$$

здесь

$$J_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+1}\frac{1}{x^{2k+1}},\quad J_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_{2k}\frac{1}{x^{2k}}, \tag{16}$$

$$B_{2k+1}=(-1)^{k+1}\frac{(4v^2-1)(4v^2-3^2)...(4v^2-(2k+3)^2)}{(2k+1)!8^{2k+1}},$$

$$A_{2k+2}=(-1)^{k+1}\frac{(4v^2-1)(4v^2-3^2)...(4v^2-(2k+4)^2)}{(2k+1)!8^{2k+1}},\ \text{k=0,1,2,....}$$

В § 4.3 «Асимптотика решения уравнения Бесселя при большом значении аргумента в комплексной плоскости» доказана справедливость разложения решения уравнения Бесселя (15) при большом значении комплексного аргумента в области $z\in D=\{z:|Arg\,z|<\frac{\pi}{2}-\delta,\delta>0\}$ ($z=x+iy$, $i=\sqrt{-1}$, x, $y\in R$). Доказана

Теорема 8. Ряды (16) являются асимптотическими:

$$J_1(z)=\sum_{k=0}^{m}B_{2k+1}\frac{1}{x^{2k+1}}+R_{1,2m+1}(z),\quad J_2(z)=\sum_{k=1}^{m}A_{2k}\frac{1}{x^{2k}}+R_{2,2m+2}(z),$$

где $|R_{1,2m+2}(z)|\le l|z|^{-2m-2},|R_{2,2m+1}(z)|\le l|z|^{-2m-1},l=const,z\in D,z\to\infty.$

Заключение по главе 4.

Здесь разработан новый метод, который обобщает метод малого параметра Пуанкаре - Линдстета из теории нелинейных колебаний, в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента при его больших значениях.

В главе 5 «АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ, КОГДА ПРЕДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ НЕРЕГУЛЯРНУЮ ОСОБУЮ ТОЧКУ ИЛИ ТОЧКУ ПОВОРОТА» строятся асимптотики решения сингулярно возмущенных начальных и краевых задач с точкой поворота и в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку. Здесь исследуются задача Коши, Дирихле, Неймана и Робена.

В § 5.1 «Первая краевая задача, случай отрицательного коэффициента перед производной первого порядка» модифицированным методом погранфункций построена асимптотика решения первой краевой задачи на отрезке:

$$\varepsilon y''(x)-x^2p(x)y'(x)-q(x)y(x)=f(x),\ 0\le x\le 1,\ y(0)=a,\ y(1)=b, \tag{17}$$

где $p(x)$, $q(x)>0$, $x\in[0,1]$; p, q, $f\in C^{\infty}[0,1]$, a, b - const.

Известно, что задача (17) имеет единственное решение. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to 0$.

Отметим, что соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение (ε= 0): $\quad x^2 p(x)y'_0(x)+q(x)y_0(x)=-f(x)$

имеет нерегулярную особую точку при x=0.

Решение задачи

$$x^2 p(x)y'_0(x)+q(x)y_0(x)=-f(x), \quad y(1)=b,$$

представимо в виде: $\quad y_0(x)=O\left(e^{1/x}\right),\, x\to 0,\, \varepsilon\to 0.$

Поэтому интегрируем так, чтобы $y_0(x)\in C^\infty[0,1]$. В таком случае решение соответствующего невозмущенного уравнения представимо в виде:

$$y_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds,$$

где $Q(x)=\int_1^x \frac{q(t)}{t^2 p(t)}dt.$

Теорема 9. Для решения $y(x)$ задачи (17) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),$$

при $\varepsilon\to 0$ на всем отрезке $0\le x\le 1$, т.е.

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(\tau)+O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $v_k\in C^\infty[0,1]$, $\quad t=x/\mu, \tau=(1-x)/\varepsilon,\ \mu=\sqrt{\varepsilon},\quad |\pi_k(t)|\le ce^{-\sqrt{q(0)}t}$, $|z_k(\tau)|\le ce^{-p(1)\tau},\ 0<c-const$, π_k, $z_k\in C^\infty[0,\infty)$, k=0,1,2,....

Пример. Пусть $p(x)\equiv 1$, $q(x)\equiv 1$, $f(x)\equiv 1$, a=1, b=4. Тогда задача (17) примет вид

$$\varepsilon y''(x)-x^2y'(x)-y(x)=1,\ 0\le x\le 1,\ y(0)=1,\ y(1)=4.$$

Задача

$$x^2y'(x)+y(x)=-1,\ 0\le x\le 1,\ \ y(1)=4$$

имеет решение: $\ y(x)=-1+5e^{\frac{1}{x}-1}$.

Заметим, что при $x\to 0$ решение $y(x)$ экспоненциально растет.

Применяя изложенную выше идею, получаем: $\ v_0(x)= -1$, $v_k(x)\equiv 0$, $k\in\boldsymbol{N}$ и

$$y(x)=-1+2e^{-t}+\sqrt{\varepsilon}e^{-t}t\left(c_2t^2+c_1t+c_0\right)+5e^{-\tau}+\varepsilon c_3\tau e^{-\tau}\left(\tau-1\right)+O\left(\varepsilon^2\right),\varepsilon\to 0,$$

где $t=x/\sqrt{\varepsilon},\tau=(1-x)/\varepsilon,\mu=\sqrt{\varepsilon},c_j-const,\ j=0,1,2,3.$

В § 5.2 «Первая краевая задача, случай положительного коэффициента перед производной первого порядка» исследован случай, когда знак перед производной первого порядка неотрицателен, т.е. исследована следующая задача:

$$\varepsilon y''(x)+x^2p(x)y'(x)-q(x)y(x)=f(x),\ 0\le x\le 1,\ y(0)=a,\quad y(1)=b, \qquad (18)$$

где $p(x)$, $q(x)>0$, $x\in[0,1]$; p, q, $f\in C^{\infty}[0,1]$, a, b - const.

Задача (18) имеет единственное решение, требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to 0$.

Доказана

Теорема 10. Для решения задачи (18) на отрезке $x\in[0,1]$, при $\varepsilon\to 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t)+O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $y(x)\in C^{\infty}[0,1]$, при $x\to 0$ имеем $y_k(x)=O(x^{\alpha}e^{-\beta/x})$, $k\in\boldsymbol{N}$, $0<\beta=q(0)/p(0)$, α – const, $|\pi_k(t)|\le ce^{-\sqrt{q(0)}t}, 0<c-const,\ \mu=\sqrt{\varepsilon},\ x=\mu t.$

В § 5.3 «Асимптотика решения второй краевой задачи с иррегулярной особенностью порядка три» исследуется задача Неймана, или вторая краевая задача

$$\varepsilon y''(x)-x^3p(x)y'(x)-q(x)y(x)=f(x),\ 0\le x\le 1,\ y'(0)=a,\quad y'(1)=b, \qquad (19)$$

где $p(x)$, $q(x)>0$, $x\in[0,1]$; p, q, $f\in C^{\infty}[0,1]$, a, b - const.

Соответствующее невозмущенное дифференциальное уравнение имеет иррегулярную особую точку при $x=0$. Поэтому решение задачи в точке $x=0$ имеет особенность. Решение задачи (19) ищем в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$.

Соответствующее невозмущенное дифференциальное уравнение первого порядка интегрируем так, чтобы $y_0(x)\in C^{\infty}[0,1]$. В таком случае решение соответствующего невозмущенного уравнения можно представить в виде:

$$y_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds,$$

где $Q(x)=\int_1^x\frac{q(t)}{t^3p(t)}dt.$

Доказана

Теорема 11. При достаточно малых ε задача (19) имеет единственное решение $y(x)$, причем ряд

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),$$

является асимптотическим рядом для решения $y(x)$ при $\varepsilon\to 0$ на всем отрезке $0\le x\le 1$, т.е.

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(\tau)+O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $v_k\in C^{\infty}[0,1]$, $|\pi_k(t)|\le ce^{-\sqrt{q(0)}t}$, $|z_k(\tau)|\le ce^{-p(1)\tau}$, $0<c-const$,
$t=x/\mu, \tau=(1-x)/\varepsilon, \mu=\sqrt{\varepsilon}$, π_k, $z_k\in C^{\infty}[0,\infty)$, $k=0,1,2,\ldots$.

В § 5.4 «Асимптотика решения третьей краевой задачи в случае иррегулярной особенности произвольного порядка..» исследуется задача Робена

$$\varepsilon y''(x) - x^n p(x)y'(x) - q(x)y(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{20}$$

$$y(0) - h_1 y'(0) = a,\ \ y(1) + h_2 y'(1) = b, \tag{21}$$

где $p(x)$, $q(x)>0$, $x\in[0,1]$; p, q, $f\in C^\infty[0,1]$, a, b - const, $0<h_1$, $0<h_2$, n - фиксированное натуральное число больше единицы.

Заметим, что задача (20)-(21) имеет единственное решение. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to 0$.

Соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение ($\varepsilon = 0$):

$$x^n p(x)y'_0(x) + q(x)y_0(x) = -f(x)$$

имеет нерегулярную особую точку $x=0$.

Доказана

Теорема 12. Для решения $y(x)$ задачи (20)-(21) при $\varepsilon\to 0$ на всем отрезке $0 \le x \le 1$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=0}^{2n} \mu^k \pi_k(t) + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k z_k(\tau) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $v_k\in C^\infty[0,1]$, $|\pi_k(t)| \le ce^{-\sqrt{q(0)}t}$, $|z_k(\tau)| \le ce^{-p(1)\tau}$, $0<c-const$, $t = x/\mu, \tau = (1-x)/\varepsilon, \mu = \sqrt{\varepsilon}$, π_k, $z_k\in C^\infty[0,\infty)$, $k=0,1,2,...$

В § 5.5 «Задача Коши с негладким коэффициентом» исследована задача Коши с негладким коэффициентом

$$\varepsilon y'(x) + \sqrt{x}q(x)y(x) = f(x),\ 0 \le x \le T,\quad y(0)=y^0, \tag{22}$$

где $q(x)>0$ $x\in[0,T]$, q, $f\in C^\infty[0,T]$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, x\to 0$, $f_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$, $f_0\neq 0$, T, y^0 – const.

Задача (22) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$y(x) = y^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{s}q(s)ds} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(\tau)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_x^\tau \sqrt{s}q(s)ds} d\tau.$$

Решение соответствующего невозмущенного уравнения ($\varepsilon=0$):

$$y_0(x) = f(x)/q(x)\sqrt{x}$$

не удовлетворяет начальному условию и не является гладкой функцией на отрезке $[0,T]$.

Доказана

Теорема 13. Для решения задачи Коши (22) при $\varepsilon\to 0$, $0\le x\le T$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x) = \sum_{k=0}^{2m+1} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=-1}^{6m+3} \mu^k \pi_k(t) + O\left(\varepsilon^{2m+1}\right),$$

где $t=x/\mu^2$, $\mu^3=\varepsilon$, $v_{2k}(x)=\sqrt{x}\tilde{v}_{2k}(x),\ \tilde{v}_{2k}\in C^\infty[0,T], v_{2k+1}\in C^\infty[0,T]$,

$$|\pi_{6k-1}(t)|\le ct^{-3/2},\ \ |\pi_0(t)|\le|y^0|e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}},\ \pi_{6m}(t)\equiv 0, |\pi_{6k+1}(t)|\le ct^{-2},$$

$$\pi_{6k+2}(t)\equiv 0, |\pi_{6k+3}(t)|\le|v_{2k+1}(0)|e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}, \pi_{6k+4}(t)\equiv 0.$$

В § 5.6 «Точка поворота дробного порядка» исследована задача Дирихле с точкой поворота дробного порядка

$$\varepsilon y''(x)-\sqrt{x}y(x)=f(x),\ x\in(0,1),\quad y(0)=0,\quad y(1)=0, \qquad (23)$$

где $f\in C^\infty[0,1]$, $f(0)\neq 0$.

Не нарушая общности, рассматриваем однородные граничные условия, так как неоднородные граничные условия $y(0)=a$, $y(1)=b$ с помощью линейного преобразования $y(x)=a+(b-a)x+z(x)$ всегда можно привести к однородным граничным условиям $z(0)=0$, $z(1)=0$.

Задача (23) имеет единственное решение и с помощью модифицированных функций Бесселя можно записать его явный вид. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ по малому параметру ε в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to 0$.

Здесь также решение соответствующего невозмущенного уравнения ($\varepsilon=0$)

$$y_0(x)=-f(x)/\sqrt{x}$$

не удовлетворяет краевым условиям и не является гладкой функцией на отрезке [0, 1], точку $x=0$ называют дробной точкой поворота. Следовательно, задача (23) является бисингулярной. Сначала доказывается вспомогательная

Лемма 1. Задача

$$z''(t)-\sqrt{t}z(t)=\frac{c}{\sqrt{t^k}}, t\in(0,\infty), k=0,1,3, z(0)=z^0, \lim_{t\to\infty} z(t)=0$$

имеет единственное решение (здесь c, z^0 - const), представимое в виде

$$z(t)=\frac{z^0 z_2(t)}{z_2(0)}+cc_1\left(z_2(t)\int_0^t s^{-k/2}z_1(s)ds+z_1(t)\int_t^\infty s^{-k/2}z_2(s)ds\right).$$

Доказана

Теорема 14. Асимптотическое решение задачи Дирихле (23) при $\varepsilon\to 0$, $x\in[0,1]$ представимо в виде

$$y(x)=\sum_{k=0}^{2m+1}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=-1}^{10m+5}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{4m+2}\lambda^k w_k(\tau)+O\left(\varepsilon^{2m+1}\right),$$

где $v_{2k}(x)=\sqrt{x}\tilde{v}_{2k}(x),\ \tilde{v}_{2k}\in C^\infty[0,1], v_{2k+1}\in C^\infty[0,1]$, $t=x/\mu^2$, $\mu^5=\varepsilon$, $\lambda^2=\lambda$, $\tau=(1-x)/\lambda$, $\pi_{10k-1}(t)=O(1/t^{1/2})$, $\pi_{10k+1}(t)=O(1/t^2)$, $\pi_{10k+3}(t)=O(1/t)$, $t\to\infty$.

$\pi_{10k-1}(t)=O(t^2)$, $\pi_{10k+1}(t)=O(t^{1/2})$, $\pi_{10k+3}(t)=O(t^{1/3})$, $t\to 0$.

Замечание. Аналогично строится равномерное асимптотическое разложение решения задачи

$$\varepsilon y''(x)-x^\alpha p(x)y(x)=f(x),\ 0<x<1,\ \ y(0)=y^0, y(1)=y^1,$$

где α - рациональное число, $p, f\in C^{\infty}[0,T]$, $0<p(x)$, $x\in[0,T]$, $f_0\neq 0$, y^0, y^1 - const.

В § 5.7 «Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с кратной точкой поворота» построено асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с кратной точкой поворота

$$\varepsilon y''(x)+x^n y(x)=f(x),\quad 0\leq x\leq T,\quad y(0)=a,\ y'(0)=b, \tag{24}$$

где n - фиксированное натуральное число, T, a, b - const, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(x)$, $f_k\in C^{\infty}[0,T]$, $f_0(0)\neq 0$.

Решение задачи (24) существует и единственно. Требуется построить асимптотическое разложение решения этой бисингулярной задачи при $\varepsilon\to 0$.

Доказана

Лемма 2. Задача

$$\pi''_{-n}(t)+t^n\pi_{-n}(t)=\tilde{f}_0(\mu t),\ 0<t\leq T/\mu,\ \pi_{-n}(0)=0,\ \pi'_{-n}(0)=0$$

имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение в классе функций, убывающих степенным ростом, когда $t\to T/\mu$, $\mu\to 0$. Здесь $\tilde{f}_0(x)=\sum_{j=0}^{n-1}x^j f_{0,j}$, $f_{0,j}=f_0^{(j)}(0)/j!$.

Доказана

Теорема 15. Для решения задачи Коши (24) при $\varepsilon\to 0$ на отрезке $x\in[0,T]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=-n}^{-1}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{m(n+2)}\mu^k\left(v_k(x)+\pi_k(t)\right)+O\left(\varepsilon^{m+2/(n+2)}\right),$$

где $\mu=\sqrt[n+2]{\varepsilon},\ x=\mu t;\ \pi_k(t)$ - пограничные функции, зависящие от μ, $\pi_k\in C^{\infty}[0,T/\mu]$, $v_k(x)\in C^{\infty}[0,T]$.

Заключение по главе 5.

Применением метода преобразования и обобщенным методом пограничных функций построены равномерные асимптотические разложения решений начальных и краевых задач для сингулярно возмущенных линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в случаях, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку: с точкой поворота дробного порядка; с негладким коэффициентом и кратным точкой поворота. Приведены точные асимптотические оценки для остаточных членов асимптотических рядов, т.е. асимптотические разложения обоснованы.

В 6-ой главе «АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ОСОБЕННОСТЯМИ» диссертации построена асимптотика решения сингулярно возмущенных параболических задач с различными особенностями.

В § 6.1 «Асимптотика решения бисингулярной задачи Коши с квадратичным ростом особенности по времени» исследовано асимптотическое поведение решения бисингулярной задачи Коши на прямой с квадратичной особенностью по времени.

Равномерное асимптотическое разложение решения построено обобщенным методом пограничных функций. Рассмотрен случай, когда решение соответствующего «вырожденного» уравнения имеет квадратичный рост сингулярности по времени. Приведена асимптотическая оценка для остаточного члена.

Исследуется задача Коши на бесконечной прямой

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^2 p(x,t)u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in D, \tag{25}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty, \tag{26}$$

где $D=\{(x,t)|\ x\in R,\ 0\le t\le 1\}$, $p(x,t)>0\ (x,t)\in\bar{D}$, $f\in\tilde{C}^\infty(D)$, $f(x,0)\neq 0$, $\varphi\in\tilde{C}^\infty(R)$, $\tilde{C}^\infty(D)$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций, и ограниченных в R относительно x, $u(x,t)$ - неизвестная функция.

Задача (25)-(26) является бисингулярной, так как соответствующее невозмущенное уравнение имеет не гладкое решение:

$$u_0(x,t)=\frac{f(x,t)}{t^2 p(x,t)}.$$

Нас интересует асимптотическое поведение решения задачи (25)-(26), когда $\varepsilon\to 0$.

Докажем вспомогательные теоремы.

Теорема 16. Пусть $F(x,\tau)\in C^\infty(\bar{D}_1)$, $z^0(x)\in C^\infty(R)$, $a(x)>0$. Тогда задача

$$\frac{\partial z(x,\tau)}{\partial\tau}+\tau^2 a(x)z(x,\tau)=F(x,\tau),\ (x,\tau)\in D_1,\ z(x,0)=z^0(x)$$

имеет единственное решение $z(x,\tau)\in C^\infty(\bar{D}_1)$.

Теорема 17. Пусть $0<a(x)\in C^\infty(R)$ и функции $F_j(x,\tau)\in C^\infty(\bar{D}_1)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$F_j(x,\tau)=\tau\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_{j,3k+j}(x)}{\tau^{3k+j}},\ j=0,1,2,\qquad \tau\to+\infty,\ -\infty<x<+\infty.$$

Тогда в области D_1 существуют решения уравнений

$$\frac{\partial z_j(x,\tau)}{\partial\tau}+\tau^2 a(x)z_j(x,\tau)=F_j(x,\tau),\ \ j=0,1,2,\ \tau\to+\infty,$$

которые разлагаются в ряды

$$z_j(x,\tau)=\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_{j,3k+j}(x)}{\tau^{3k+j}},\ j=0,1,2,\ \ \tau\to+\infty.$$

Теорема 18. Для решения задачи (25)-(26) при $\varepsilon\to 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k v_k(x,t)+\sum_{k=-2}^{3m}\mu^k w_k(x,\tau)+O\left(\varepsilon^m\right),$$

где $v_k(x,t)\in C^{\infty}(D),\ k=0,1,...;\ w_k(x,\tau)\to 0$ при $\tau\to+\infty,\ x\in R\ \ \varepsilon=\mu^3,\tau=t/\mu$.

В § 6.2 «Асимптотика решения бисингулярной задачи Коши с особенностью по времени» построена асимптотика решения бисингулярной задачи Коши

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^m u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in D,\qquad u(x,0)=\varphi(x),\ x\in R,\quad (27)$$

где $D=\{(x,t)|\ x\in R,\ 0\le t\le 1\}$, $f\in\tilde{C}^{\infty}(D)$, $f(x,0)\neq 0$, $\varphi\in\tilde{C}^{\infty}(R)$, m - фиксированное натуральное число, $\tilde{C}^{\infty}(D)$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций, и ограниченных в R относительно x, $u(x,t)$ - неизвестная функция.

Задача (27) тоже является бисингулярной, так как предельное (соответствующее невозмущенное, $\varepsilon=0$) уравнение: $t^m u^0(x,t)=f(x,t)$ имеет негладкое решение: $u^0(x,t)=\dfrac{f(x,t)}{t^m}$, т.е. решение в точке $t=0$ имеет полюс m-го порядка.

Доказаны

Лемма 3. Пусть $r(x,\tau)\in\tilde{C}^{\infty}(\bar{D}_1),\ a(x)\in\tilde{C}^{\infty}(R)$. Тогда задача

$$z_{\tau}(x,\tau)\ +\tau^m z(x,\tau)=r(x,\tau),\quad z(x,0)=a(x)$$

имеет единственное решение $z(x,\tau)\in\tilde{C}^{\infty}(D_1)$.

Теорема 19. Для решения задачи (27) при $\varepsilon\to 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(x,t)+\sum_{k=-m}^{(m+1)n}\mu^k w_k(x,\tau)+O\left(\varepsilon^n\right),$$

где $z_k(x,t)\in\tilde{C}^{\infty}(D),\ W(x,\tau)\in\tilde{C}^{\infty}(D_1),\ D_1=\{(x,\tau)\,|\,x\in \mathrm{R},0<\tau<\infty\}$, $\varepsilon=\mu^{m+1},\tau=t/\mu$.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+tu(x,t)=\frac{1}{1+x^2},\quad (x,t)\in D,\qquad u(x,0)=1.$$

Для решения этой задачи справедливо асимптотическое разложение

$u(x,t)=\mu^{-1}w_{-1}(x,\tau)+w_0(x,\tau)+\mu w_1(x,\tau)+\mu^2 w_2(x,\tau)+O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$, $(x,t)\in\bar{D}$,

где $w_{-1}(x,\tau)=(1+x^2)^{-1}\left(\tau^{-1}+\tau^{-3}+O(\tau^{-5})\right)$, $\tau\to+\infty$, $x\in R$,

$$w_0(x,\tau)=c^{(0)}(x)\left(\tau^{-2}+\tau^{-4}+O(\tau^{-6})\right),\ c^{(0)}(x)=\left((1+x^2)^{-1}\right)'',\ \tau\to+\infty,\ x\in R,$$

$$w_j(x,\tau)=c^{(j)}(x)\mathrm{O}(\tau^{-2-j}),\ c^{(j)}(x)=\left(c^{(j-1)}(x)\right)'',\ j=1,2,\ \tau\to+\infty,\ x\in R.$$

В § 6.3 «Асимптотика решения уравнения теплопроводности с малым коэффициентом температуропроводности» исследована задача Коши для уравнения теплопроводности с малым коэффициентом температуропроводности:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\ (x,t)\in D, \quad u(0,x)=f(x),\ x\in R, \tag{28}$$

где $D=\{(t,x):0<t<\infty,\ x\in R\}$, $f(x)$ - ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на всей числовой оси.

Решение задачи (28) существует и единственно. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение по малому параметру в области $\bar{D}$.

Доказана

Теорема 20. Для решения задачи (28) справедливо разложение

$$u(\eta,x)=\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\pi(\eta+1)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}}f\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}}s+x\right)ds\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2+\frac{5}{16}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3+\frac{35}{128}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^4+\frac{63}{256}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^5+\ldots\right)$$

где $t=\frac{1}{\varepsilon\eta}-1,\ 0\le\eta\le 1/\varepsilon$.

Заключение по главе 6.

В данной главе исследованы задачи Коши на бесконечной прямой для бисингулярно возмущенных линейных дифференциальных уравнений параболического типа второго порядка с двумя независимыми переменными.

Методом преобразований (редукция) и обобщенным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений. Получены оценки для остаточных членов разложений, т.е. асимптотические разложения строго обоснованы.

ВЫВОДЫ

Впервые в диссертационной работе:

- методом униформизации и методом преобразований построена асимптотика решения модельного уравнения Рейсса. Построено явное решение этого уравнения с помощью специальной функции Ламберта. Определена точка начала скачка для перехода к стационарной точке;
- построена асимптотика решения химической реакции со стационарной достижимостью. Предложен новый метод построения асимптотики решения вблизи особой точки асимптотического разложения, который обобщает метод Пуанкаре - Лайтхилла - Го;
- разработан новый метод построения асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента (действительного или комплексного), который обобщает метод малого параметра Пуанкаре - Линдстета из теории нелинейных колебаний, и в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента при его больших значениях;
- модифицированным обобщенным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку;

- обобщенным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений начальной и первой краевой задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с точкой поворота;
- обобщенным методом погранфункций построена асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа;
- методом преобразований построена асимптотика решения задачи Коши для уравнения параболического типа с малым коэффициентом температуропроводности и предложен новый метод построения асимптотики.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность научному консультанту, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки КР, члену-корреспонденту Национальной Академии наук Кыргызской Республики *Алымкулову Келдибаю Алымкуловичу* и д.ф.-м.н., профессору Турсунову Дилмурату Абдиллажановичу за постоянное внимание и полезные советы при выполнении работы.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Научные результаты диссертации могут быть применены в теории возмущений, гидродинамике, аэродинамике, химической кинетике, физике лазеров, биологии и в других отраслях науки. Разработанные два новых метода построения асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных уравнений могут найти своё применение и для других дифференциальных уравнений с особенностями. Результаты исследования также могут быть использованы при чтении лекционных курсов по теории возмущений, и специального курса для подготовки бакалавров и магистров по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика».

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с точками поворота [Текст] / К. Г. Кожобеков, Д. А. Турсунов. – Ош: Билим, 2019. – 154 с.
2. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку [Текст] / К. Г. Кожобеков, Д. А. Турсунов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. –2019. – Т. 29. – Вып. 3. – С. 1–9. DOI: 10.20537/vm190306.
3. **Kozhobekov, K. G.** Singularly perturbed the parabolic equation in the case when unperturbed equation has unbounded solution [Text] / K. G. Kozhobekov, K. Alymkulov, D. A. Tursunov // Far East Journal of Mathematical Sciences. – Allahabad (India): Pushpa Publishing House. 2017. – Vol. 102. – № 2. – P. 329-336. DOI: 10.17654/MS102020329.
4. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота [Текст] / К. Г. Кожобеков, Д. А. Турсунов // Известия Иркутского госуниверситета. Серия «Математика». – 2017. – Т. 21. – С. 108–121. DOI: 10.26516/19977670.2017.21.108.
5. **Kozhobekov, K. G.** A new approach to constructing the asymptotic of the solution of the Bessel equation for large values of the complex argument [Text] / K. G. Kozhobekov, K. Alymkulov // International Journal of Professional Science. – 2019. – № 9. – P. 6–10.
6. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с малым коэффициентом температуропроводности [Текст] / К. Г. Кожобеков // Вестник ЖАГУ. – 2019. – № 4 (43). – С. 3-7.
7. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения бисингулярной задачи Коши на бесконечной прямой для уравнения теплопроводности [Текст] / К. Г. Кожобеков // Вестник ЖАГУ. – 2019. – № 4 (43). – С. 8-13.
8. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения задачи Робена с иррегулярной особенностью [Текст] / К. Г. Кожобеков // Вестник ОшГУ. – 2019. – № 3. – С. 19-23.
9. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения второй краевой задачи с иррегулярной особенностью [Текст] / К. Г. Кожобеков // Вестник ОшГУ. – 2019. – № 3. – С. 14-19.
10. **Кожобеков, К. Г.** Прямой метод построения асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента [Текст] / К. Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Постулат. – 2019. – № 2(40). – С. 30-35.

11. **Kozhobekov, K. G.** Asymptotics of the solution of Bessel equation at large values of the argument [Text] / K. G. Kozhobekov, K. Alymkulov // Norwegian Journal of development of the International Science. – 2019. – No 27. – P. 58–62.
12. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения уравнения бесселя при больших значениях аргумента [Текст] / К. Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Международный студенческий научный вестник. – 2019. – № 1. – С. 104. URL: http://www.eduherald.ru/article/view?id=19461.
13. **Кожобеков, К. Г.** Об асимптотике решения задачи Рейсса для явления прыжка [Текст] / К. Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Вестник ЖАГУ. – 2019. – №2(41). – С. 3-6.
14. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения задачи химической реакции со стационарной достижимостью [Текст] / К. Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Вестник ЖАГУ. – 2019. – № 3 (42). – С. 3-6.
15. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота [Текст] / К. Г. Кожобеков, Д. А. Турсунов // Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзор. – М.: ВИНИТИ РАН, 2018. – Т. 156. – С. 84–88.
16. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента [Текст] / К. Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Вестник ЖАГУ. – 2018. – № 1(36). – С. 5-8.
17. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения сингулярно возмущенного неоднородного уравнения типа Эйри [Текст] / К. Г. Кожобеков, К. Алымкулов, Д. А.Турсунов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2017. – № 5. – С. 56-59.
18. **Кожобеков, К. Г.** Обобщенный метод пограничных функций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с точкой поворота [Текст] / К. Г. Кожобеков, К. Алымкулов, Д. А. Турсунов // Известия КГТУ им. И. Раззакова. – 2016. – Т. 39. № 1. – С. 13-16.
19. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения бисингулярной задачи на бесконечной прямой с квадратичной особенностью по времени [Текст] / К. Г. Кожобеков // Молодой ученый. Казань. – 2016. – № 18 (122). – С. 1-5.
20. **Кожобеков, К. Г.** Обобщенный метод пограничных функций для бисингулярной задачи на бесконечной прямой [Текст] / К. Г. Кожобеков, К. Алымкулов, Д. А. Турсунов // Приволжский научный вестник. Ижевск. – 2016. – № 8 (60) – С. 8-12.
21. **Kozhobekov, K. G.** A new approach to constructing the asymptotic of the solution of the Bessel equation for large values of the argument [Text] / K. G. Kozhobekov, K. Alymkulov // III Borubaev’s readings, Bishkek, may 24, 2019. – P. 20.

22. **Кожобеков, К. Г.** Новый подход к построению асимптотики решения уравнения Бесселя для больших значений комплексного аргумента [Текст] / К. Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Сб. тезисов межд. конф «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры», посвящ. 10-летию Евразийского математического журнала. ЕНУ. 16-19 окт. 2019 г., г. Нур-Султан. – С. 75-76.
23. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения задачи Дирихле с иррегулярной особой точкой [Текст] / К. Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Борубаевские чтения, 2018. – С. 14.
24. **Kozhobekov, K. G.** Asymptotics of the solution of the Bessel equation for the large values of the argument [Text] / K. G. Kozhobekov, K. Alymkulov // Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8 Bishkek - Cholpon-Ata, Kyrgyzstan, June 17-23, 2018. – C. 17-23.
25. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота [Текст] / К. Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения. Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых. – Ташкент, Узбекистан, 15–17 декабря 2017 года. – С. 123-124.
26. **Кожобеков, К. Г.** Асимптотика решения задачи Коши для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения с точкой поворота [Текст] / К. Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений. Международная конференция, посвященная 70- летию профессора А. Керимбекова. г. Чолпон-Ата, 2017 г. – Бишкек, 2017. – С. 56.

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевичтин «Бисингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин бир калыптагы асимптотикасы» деген темадагы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин доктору окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: асимптотикалык ажыралыш, кичине параметр, бисингулярдык теңдеме, Кошинин маселеси, Бесселдин теңдемеси, Дирихленин маселеси, Робендин маселеси, Неймандын маселеси, Рейсстин моделдик теңдемеси, жалпыланган чек аралык функциялар методу.

Изилдөөнүн объекти. Сызыктуу жана сызыктуу эмес бисингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы жана чектик (Дирихле, Нейман, Робен) маселелер, аргументи чексизге умтулгандагы Бесселдин теңдемеси, сингулярдуу козголгон параболалык теңдемелер.

Изилдөөнүн предмети. Бисингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин асимптотикасын тургузуу.

Иштин максаты. Секирик кубулушу үчүн Рейсстин жана стационардык жетишүүлүгү бар химиялык реакциянын маселесинин чечиминин асимптотикасын тургузуу. Бесселдин теңдемесинин чечиминин асимптотикасы аргументтин чоң маанисинде чыныгы жана комплекстик тегиздиктерде тургузуу. Иррегуляр өзгөчөлүккө ээ болгон бисингулярдык козголгон маселелердин чечимдеринин асимптотикасын тургузуу үчүн жалпыланган чек аралык функциялар усулун өркүндөтүү.

Изилдөөнүн усулдары жана аппараттары: өзгөртүп түзүү (редукция) усулу, мажоранттар усулу, жалпыланган чек аралык функция усулу, униформизация усулу.

Алынган жыйынтыктар жана алардын жаңылыгы. Секирик кубулушу үчүн Рейсстин жана стационардык жетишүүлүгү бар химиялык реакциянын маселесинин чечиминин асимптотикасы тургузулду. Өзгөчө чекиттин чеке-белинде чыгарылыштын асимптотикалык ажыралмасын тургузуу үчүн Пуанкаре - Лайтхилл - Гонун методун жалпылоочу жаңы метод сунушталды. Бесселдин теңдемесинин чыгарылышынын (чыныгы жана комплекстик), аргументтин чоң маанисинде, асимптотикасын тургузуу үчүн жаңы метод иштелип чыкты. Регулярдуу эмес (иррегулярдуу) өзгөчөлүккө ээ болгон бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасын тургузуу үчүн жалпыланган чек аралык функциялар методу өнүктүрүлдү.

Колдонуу даражасы же колдонууга сунуштар. Жумуш теориялык мазмунда болгону менен, анын натыйжалары козголуулар теориясында, гидродинамикада, аэродинамикада, химиялык кинетикада, лазерлер физикасында, биологияда, илимдин жана башка тармактарында колдонулушу мүмкүн.

Колдонуу аймактары. Ушул сыяктуу маселелер гидродинамикада, физикада, кинетикалык химияда, биологияда, аэродинамикада, океанологияда, астрономияда ж.б. илимдин аймактарында жана техникада кездешет

РЕЗЮМЕ

Диссертации Кожобекова Кудайберди Гапаралиевича на тему: «Равномерная асимптотика решений бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: асимптотическое разложение, малый параметр, бисингулярное уравнение, задача Коши, уравнение Бесселя, задача Дирихле, задача Робена, задача Неймана, модельное уравнение Рейсса, метод обобщенной погранфункции.

Объект исследования. Начальные и граничные (Дирихле, Нейман, Робен) задачи для линейных и нелинейных бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Уравнение Бесселя при больших значениях аргумента, сингулярно возмущенные уравнения теплопроводности.

Предмет исследования. Построение асимптотики решения бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений.

Цель работы. Построение асимптотики решения задач Рейсса для явления прыжка и химической реакции со стационарной достижимостью. Построение асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента в действительной и комплексной областях. Развитие обобщенного метода погранфункций для построения асимптотики решения бисингулярно возмущенных задач с иррегулярной особенностью.

Методы исследования и аппаратура: метод преобразования (редукция), метод мажорант, обобщенный метод погранфункций и метод униформизации.

Полученные результаты и их новизна. Построены асимптотики решений задач Рейсса для явления прыжка и химической реакции со стационарной достижимостью. Предложен новый метод построения асимптотики решения вблизи особой точки асимптотического разложения, который обобщает метод Пуанкаре - Лайтхилла - Го. Разработан новый метод построения асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента (действительного или комплексного). Развит обобщенный метод погранфункций для построения асимптотики решения бисингулярно возмущенных задач с иррегулярной особенностью.

Степень использования или рекомендации по использованию. Хотя работа является теоретической, ее результаты могут быть применены в теории возмущений, гидродинамике, аэродинамике, химической кинетике, физике лазеров, биологии и в других отраслях науки.

Область применения. Подобные задачи встречаются в гидродинамике, физике, химической кинетике, биологии, аэродинамике, океанологии, астрономии и др. областях науки и техники.

SUMMARY

Kozhobekov Kudayberdi Gaparalievich Dissertation «Asymptotic of solutions of bisingularly perturbed differential equations » for the scientific degree of doctor of physical-mathematical sciences (specialty 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control**)**

Key words: asymptotic expansion, small parameter, bisingular equation, Cauchy problem, the equation of Bessel, Dirichlet problem, Robin problem, Neumann problem, model Reiss equation, generalized boundary function method.

Object of research. Initial and boundary (Dirichlet, Neumann, Robin) problems for linear and nonlinear bisingularly perturbed differential equations. Bessel equation for large values of the argument, singularly perturbed heat equation.

Subject of study. Construction of the asymptotics of the solution of bisingularly perturbed differential equations.

Purpose of work. The construction of the asymptotics of the solution of Reiss problems for the phenomenon of a jump and a chemical reaction with stationary reachability. The construction of the asymptotics of the solution of the Bessel equation, for large values of the argument in the real and complex domains. Development of a generalized method of boundary functions for constructing the asymptotics of the solution of bisingularly perturbed problems with an irregular singularity.

Research methods and equipment: transformation method (reduction), majorant method, generalized method of boundary value functions and uniformization method.

The results obtained and their novelty. The asymptotics of the solutions of the Reiss problems for the phenomenon of a jump and a chemical reaction with stationary reachability are constructed. A new method is proposed for constructing the asymptotics of a solution near a singular point of the asymptotic expansion, which generalizes the Poincaré-Lighthill-Go method. A new method has been developed for constructing the asymptotics of the solution of the Bessel equation for large values of the argument (real or complex). A generalized method of boundary functions is developed for constructing the asymptotics of the solution of bisingularly perturbed problems with an irregular singularity.

Degree of use or recommendations for use. Although the work is theoretical, its results can be applied in perturbation theory, hydrodynamics, aerodynamics, chemical kinetics, laser physics, biology and other branches of science.

Application area. Similar problems are encountered in hydrodynamics, physics, chemical kinetics, biology, aerodynamics, oceanology, astronomy, and other fields of science and technology.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ, ЕДИНИЦ, ТЕРМИНОВ, СОКРАЩЕНИЙ

- Бисингулярность – двойная сингулярность (особенность).
- **N**, **Z**, **R** – множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно, $\mathbf{N_0}=\mathbf{N}\cup\{0\}$.
- $\forall$ – квантор общности.
- $\exists$ – квантор существования.
- $\in$ – «принадлежность».
- ~ – «эквивалентность».
- $\Rightarrow$ – «следует».
- $C^\infty(D)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций в области D.
- $0<\varepsilon$ – малый параметр, λ, μ – такие же параметры, связанные с ε.
- O, o – символы Ландау.

Подписано в печать: ___ 2020
Обьем: 1,75 п.л. Заказ № __
Формат 60х90 1/16. Тираж 120 экз.

Редакционно-издательский отдел “Билим” ОшГУ
г. Ош, ул. Ленина, 331.