



Т.Т. КАРАКЕЕВ,
Д.К. РУСТАМОВА

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
НЕЛОКАЛЬНЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ

$$Lu(x) = f(x)$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial y^2} +$$
$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial z^2} = 0$$

2



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
И ИННОВАЦИЙ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Ж. БАЛАСАГЫНА**

Т.Т. КАРАКЕЕВ, Д.К. РУСТАМОВА

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

БИШКЕК - 2025

УДК 517
ББК 22.161.6
К 21

Рекомендовано к изданию решением Научно-технического совета Кыргызского национального университета имени Жусупа Баласагына и Комиссией по выпуску книг, посвященных 100-летию КНУ.

Рецензенты: д-р.физ.-мат.наук., проф. Искандаров С.
д-р.физ.-мат.наук., Аблабеков Б.С.

Каракеев, Т.Т. Рустамова Д.К.

К21 Методы решения нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных: монография посвящается 100-летию КНУ им. Ж. Баласагына. – Б.: 2025 – 152с.

ISBN 978-9967-32-572-2

В работе исследуются вопросы регуляризации и методы численного решения нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и связанные с ними интегральные уравнения Вольтерра третьего рода. Обоснован метод регуляризации, относящийся к лаврентьевскому типу, построены численные решения указанных краевых задач и интегральных уравнений с выводами оценок допускаемых погрешностей.

Работа предназначена для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов математических факультетов, интересы которых связаны с теорией регуляризации и методами численного решения нелокальных краевых задач.

Библиогр. 81 назв.

ISBN 978-9967-32-572-2

УДК517

ББК 22.161.6

© Каракеев Т.Т.,
Рустамова Д.К.,
2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Регуляризация нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных	17
1.1 Нелокальная краевая задача для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка	17
1.2. Нелокальная краевая задача для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка	32
1.3. Регуляризация уравнения Бенджамина-Бона-Махони с нелокальными краевыми условиями	47
1.4. Регуляризация интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.....	62
Глава 2. Численное решение нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.....	70
2.1. Разностная схема для линейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями	70
2.2. Численное решение интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.....	103
Заключение	143
Выводы	144
Литература	145

Введение

Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, где связаны между собой значения неизвестных функций и ее производных в различных точках границы [25, 27, 32, 37, 39, 40, 43, 68, 69, 74, 75], имеют важные приложения и встречаются в приложениях в качестве математической модели реальных физических процессов. Это задачи распределения влаги в почве [40, 43, 74, 76], задачи математической биологии [39].

Развитие теории нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных были начаты в работах А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [12]. Исследованию таких задач посвящены работы А.М. Нахушева [38-40], Ю.А. Митропольского и Л.Б. Урманчевой [37], Н.И. Ионкина [25], М.Х. Шханукова [74-75], Т.И. Кигурадзе [32], А.И. Кожанова [31], О.А. Репина [46], Ю.Т. Сильченко [68], А. Сопуева [69], Л.С. Пулькиной [44], Т.Т. Каракеева [27], А.Т. Асановой [7] и др.

Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных в определенной постановке могут быть приведены к интегральным уравнениям Вольтерра, в том числе интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода [27, 43, 74]. Теория данных задач развивается в направлении применения методов регуляризации, основы которых были заложены в работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева.

Регуляризация интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и условия их разрешимости исследованы в работах Л.И. Панова [45], Я. Янно [77], Н.А. Магницкого [34], А. Асанова [7], Т.Д. Омурова [41-42], Т.Т. Каракеева [30], М.В. Булатова [11] и др. Вопросы численного решения изучены в работах Т.Т. Каракеева [28-29].

Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных исследованы в случаях обратимости объединённого оператора при неизвестных функциях в нелокальных условиях [8, 32, 37]. Данные задачи в случаях необратимости объединённого оператора при неизвестных функциях в нелокальных условиях мало исследованы, не разработаны методы регуляризации, не изучены вопросы обоснования методов численного решения.

Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго и третьего порядка изучены Ю.А. Митропольского и Л.Б. Урманчевой, Т.И. Кигурадзе, А.М. Нахушцева, М.Х. Шханукова, Т.Т. Каракеева и др.

Ю.А. Митропольский и Л.Б. Урманчева, Т.И. Кигурадзе исследовали нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с нелокальным краевым условием в случае, когда в краевом условии коэффициенты являются постоянными. Эту же задачу исследует А.Т. Асанова в случае, когда в краевом условии коэффициентами являются функции.

Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка исследовано М.Х. Шхануковым, Т.Т. Каракеевым и другими.

В работе Ю.А. Митропольского и Л.Б. Урманчевой исследуется задача [37]

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x} = P(t, x)u(t, x) + f(t, x, u(x, t), u_t(x, t)), \quad (0.1.1)$$

$$u(t, 0) = u_0(t) + v(0),$$

$$u(0, x) = u_0(0) + v(x), \quad (0.1.2)$$

$$Au(0, x) + Cu(T, x) = \omega(x), \quad (0.1.3)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ – векторы n -мерного евклидова пространства E_n , $P(t, x)$ – $n \times n$ -матрица, вектор функция $u_0(t)$ задана, непрерывна и обладает непрерывной ограниченной производной

$$|u_0(t)| \leq \vec{N}, \quad |u'_0(t)| \leq \vec{N}_1, \quad t \in [0, T],$$

вектор-функция $v(x)$ строится в процессе нахождения искомого решения, а вектор-функция $\omega(x)$ ограничена и непрерывна, $|\omega(x)| \leq \vec{L}$. Требуется выполнение следующих условий:

- I. Вектор функция $f(t, x, u(t, x), u'_t(t, x))$ определена и непрерывна в области, $\Omega: (t, x) \in [0, T] \times [-a, a]$, $(u(t, x), u'_t(t, x)) \in D \times D_1$, где D, D_1 – ограниченные области $E_n: D = \{\vec{u}: \vec{b} \leq \vec{u} \leq \vec{c}\}$, $D_1 = \{u'_t: |u'_t| \leq a\vec{M}_0 + \vec{N}_1\}$ и удовлетворяет неравенствам $|f(t, x, u(t, x), u'_t(t, x))| \leq \vec{M}$, $|P(t, x)u(t, x) + f(t, x, u(t, x), u'_t(t, x))| \leq \vec{M}_0$,

$$|f(t, x, \bar{u}_1, \bar{u}_2) - f(t, x, u_1, u_2)| \leq K_1 |\bar{u}_1 - u_1| + K_2 |\bar{u}_2 - u_2|.$$

Элементы матриц K_1, K_2 неотрицательны.

II. Матрица $P(t, x)$ непрерывны при $(t, x) \in [0, T] \times [-a, a]$, элементы матрицы P определены соотношениями $|\{P(t, x)\}_{ij}| = P_{ij}$.

III. Для постоянных матриц A и C существует обратная матрица $(A + C)^{-1}$.

Решение задачи (1)–(3) строится с помощью последовательности функций

$$\begin{aligned} u_0(t, x) &= u_0(t) + v_0(x), \\ u_{n+1}(t, x) &= u_0(t) + \sum_{i=0}^{n+1} v_i(x) + \int_0^x \int_0^t \{ [P(\xi, \eta) u_n(\xi, \eta) + \\ &+ f(\xi, \eta, \tilde{u}_n(\xi, \eta), \tilde{u}'_{n\xi}(\xi, \eta))] - [P(\xi, \eta) u_n(\xi, \eta) + \\ &+ f(\xi, \eta, \tilde{u}_n(\xi, \eta), \tilde{u}'_{n\xi}(\xi, \eta))] \} d\xi d\eta + \frac{t}{T} \{ C^{-1}(\omega(x) - A[u_0(0) + \\ &+ v_0(x) + \sum_{j=1}^n v_j(x)] - u_0(T) - \sum_{j=1}^n v_j(x) \}, \end{aligned} \quad (0.1.4)$$

$$(A + C)v_n(x) + C \int_0^x \int_0^T P(\xi, \eta) v_n(\eta) d\xi d\eta = \psi_n(x),$$

$$\text{где } \psi_n(x) = -C \int_0^x \int_0^T \{ P(\xi, \eta) [\tilde{u}_n(\xi, \eta) - u_{n-1}(\xi, \eta)] +$$

$$+ [f(\xi, \eta, \tilde{u}_n(\xi, \eta), \tilde{u}'_{n\xi}(\xi, \eta)) - f(\xi, \eta, \tilde{u}_{n-1}(\xi, \eta), \tilde{u}'_{n-1,\xi}(\xi, \eta))] \} d\xi d\eta,$$

$$\tilde{u}_n(\xi, \eta) = u_n(\xi, \eta) - v_n(\eta).$$

Вектор функция $v_i(x)$, $i = 0, 1, \dots$, выбирается так, чтобы последовательные приближения $\tilde{u}_i(\xi, \eta)$, $i = 0, 1, \dots$, удовлетворяли двухточечному условию

$$A\tilde{u}_i(0, x) + C\tilde{u}_i(T, x) = \omega(x).$$

При выполнении условий I–III доказано существование единственного решения $u(t, x)$ системы (0.1.1)–(0.1.3), которое является равномер-

ным пределом последовательности $u_{n+1}(t, x)$, удовлетворяющим системе интегро-дифференциальных уравнений с частными производными:

$$u(t, x) = u_0(t) + v(x) + \int_0^x \int_0^t [P(\xi, \eta)u(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u'_\varepsilon(\xi, \eta))] d\xi d\eta.$$

В работе Т.И. Кигурадзе [32] рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = P(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}), \quad (0.1.5)$$

краевыми условиями

$$\begin{aligned} A_0 u(0, y) + A_1 u(a, y) &= \varphi_2(y) \text{ при } 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) &= \varphi_1(x) \text{ при } 0 \leq x \leq a, \end{aligned} \quad (0.1.6)$$

где $P: D_{ab} \rightarrow R^{n \times n}$ и $f: D_{ab} \times R^{2n} \rightarrow R^n$ - непрерывные матричная и векторная функции, $h: C([0, a]; R^n) \rightarrow R^n$ - линейный непрерывный оператор, $\varphi_1: [0, a] \rightarrow R^n$ и $\varphi_2: [0, a] \rightarrow R^n$ - непрерывно дифференцируемые векторные функции такие, что $h(\varphi_1) = \varphi_2(0)$, A_0 и A_1 постоянные вещественные $(n \times n)$ -матрицы и соблюдается равенство

$$A_0 \varphi_1(0) + A_1 \varphi_1(a) = \varphi_2(0).$$

В работе доказывается существование и единственность решения задачи (0.1.5)–(0.1.6).

М.Х. Шхануков [74] для уравнения

$$\begin{aligned} L(u) &= u_{xxt} + d(x, t)u_t + \eta(x, t)u_{xx} + a(x, t)u_x + \\ &+ b(x, t)u = -q(x, t), \end{aligned} \quad (0.1.7)$$

в области $D \equiv \{(x, t): 0 < x < H, 0 < t < T\}$ рассматривает характеристическую задачу

$$u(0, t) = f(t), \quad (0.1.8)$$

$$u_x(0, t) = g(t), \quad (0.1.9)$$

$$u(x, 0) = h(x), \quad (0.1.10)$$

где $f(t), g(t) \in C^1[0, T]$, $h(x) \in C^2[0, H]$, $\eta_x, d_t, a_x, b, q \in C(\bar{D})$.

Для задачи (0.1.7)–(0.1.10) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} vL(u) - uM(v) = & \frac{\partial}{\partial x} [vu_{xt} + uv_{xt} + \eta u_x v - (\eta v)_x u + auv] + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} [duv - v_x u_x], \end{aligned} \quad (0.1.11)$$

где $M(v) = -v_{xtx} - (dv)_t + (\eta v)_{xx} - (av)_x + bv$.

В работе показано, что функция Римана $v(x, t, \xi, \tau)$ однозначно определяется следующими требованиями:

$$M(v) = 0, \quad (0.1.12)$$

$$\begin{cases} v(\xi, t, \xi, \tau) = 0, & v_x(\xi, t, \xi, \tau) = \exp\left\{\int_{\tau}^t \eta(\xi, t_1) dt_1\right\}, \\ v(x, \tau, \xi, \tau) = \omega_1(x, \tau), \end{cases} \quad (0.1.13)$$

где $\omega_1(x, \tau)$ – решение задачи Коши

$$v_{xx}(x, \tau, \xi, \tau) + d(x, \tau)v(x, \tau, \xi, \tau) = 0,$$

$$v(x, \tau, \xi, \tau)|_{x=\xi} = 0, \quad v_x(x, \tau, \xi, \tau)|_{x=\xi} = 1, \quad (0.1.14)$$

(ξ, τ) – произвольная фиксированная точка области D .

Интегрируя (0.1.11) по области $\Omega \equiv \{(x, t): 0 < x < \xi, 0 < t < \tau\}$ с учетом (0.1.8)–(0.1.10), (0.1.12)–(0.1.14), получено соотношение

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) = & f(\tau)v_x(0, \tau, \xi, \tau) - \int_0^{\tau} [v(0, t, \xi, \tau)g'(t) + \eta(0, t)v(0, t, \xi, \tau) \times \\ & \times g(t) + f(t)(v_{xt}(0, t, \xi, \tau) - \eta_x v(0, t, \xi, \tau) - \eta(0, t)v_x(0, t, \xi, \tau) + \\ & + a(0, t)v(0, t, \xi, \tau)]dt - \int_0^{\xi} [d(x, 0)h(x)v(x, 0, \xi, \tau) - \\ & - v_x(x, 0, \xi, \tau)]h'(x)dx + \int_0^{\xi} \int_0^{\tau} vq(x, t)dxdt. \end{aligned} \quad (0.1.15)$$

Формула (0.1.15) позволяет в явном виде написать решение задачи (0.1.7)–(0.1.10), если известно $v(x, t, \xi, \tau)$. Доказано существование и единственность функции Римана.

Полученные результаты используются при изучении нелокальной задачи

$$L(u) = -q(x, t), \quad (0.1.16)$$

$$u(0, t) = u(H, t), \quad u_x(0, t) = g(t) \quad (0.1.17)$$

$$u(x, 0) = h(x). \quad (0.1.18)$$

С помощью (0.1.15) из задачи (0.1.16)–(0.1.18) получено интегральное уравнение Вольтерра вида

$$f(\tau)[v_x(0, \tau, H, \tau) - 1] + \int_0^\tau K(\tau, t)f(t)dt = \gamma(\tau), \quad f(\tau) = u(0, \tau), \quad (0.1.19)$$

$$K(\tau, t) = v_{xt}(0, t, H, \tau) - \eta_x v(0, t, H, \tau) - \eta v_x(0, t, H, \tau) + av(0, t, H, \tau),$$

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) = & \int_0^\tau g(t)[\eta v(0, t, H, \tau) - v_t(0, t, H, \tau)]dt + \int_0^H [d(x, 0)h(x) \times \\ & \times v(x, 0, H, \tau) - v_x(x, 0, H, \tau)h'(x)]dx - \int_0^H \int_0^\tau v q dx dt - v(0, \tau, H, \tau) \times \\ & \times g(\tau) + v(0, 0, H, \tau)g(0). \end{aligned}$$

Находя из уравнения (0.1.19) $f(t) \in C^1[0, T]$, из (0.1.15) получено решение задачи (0.1.16)–(0.1.18).

Задача (0.1.16)–(0.1.18) в случае $u(0, t) = \lambda(t)u(H, t)$ в условии (0.1.17) исследовано в работе Т.Т. Каракеева [27]. Показано, что данная задача с помощью функции Римана сводится к интегральному уравнению Вольтерра третьего рода:

$$[1 - \lambda(\tau)v_x(0, \tau, H, \tau)]f(\tau) + \int_0^\tau K(\tau, t)f(t)dt = q(\tau),$$

$$\text{где } K(\tau, t) = \lambda(\tau)[v_{xt}(0, t, H, \tau) - \eta_x(0, t)v(0, t, H, \tau) - \eta(0, t) \times \\ \times v_x(0, t, H, \tau) + a(0, t)v(0, t, H, \tau),$$

$$\begin{aligned} q(\tau) = & \lambda(\tau) \left[\int_0^H [d(x, 0)v(0, t, H, \tau) h(x) - v_x(0, t, H, \tau)h'(x)]dx - \right. \\ & - \int_0^H \int_0^\tau v(x, t, H, \tau)f(x, t)dx dt + \int_0^H [v(0, t, H, \tau) g'(t) + v(0, t, H, \tau) \times \\ & \times \eta(0, t)]g(t)dt. \end{aligned}$$

Функция Римана определяется также как выше в [74].

В предположении, что функция $(1 - \lambda(t)v_x(0, \tau, H, \tau))$ обращается в нуль при $\tau = T$ и является невозрастающей функцией методом регуляризации доказано единственность и устойчивость решения исследуемой задачи.

А.М. Нахушев рассматривает в области $\Omega = \{z | 0 < x < h, 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$ нагруженное уравнение гиперболического типа [40]

$$u_{xy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = \sum_{i=1}^3 B_i u + f(x, y), \quad (0.1.20)$$

$$\begin{aligned} \text{где } B_1 u &\equiv a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \alpha(x, y, \eta) u(x, \eta) d\eta + b(x, y) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \beta(x, y, \xi) u(\xi, y) d\xi + \int_0^x d\xi \int_0^y c(x, y, \xi) u(\xi) d\eta, \\ B_2 u &\equiv \int_0^y \alpha^i(x, y, \eta) u(x_i, \eta) d\eta + \int_0^x \beta^j(x, y, \xi) u(\xi, y_j) d\xi, \\ B_3 u &\equiv c^{ij}(x, y) u(x_i, y_j), \quad \xi = (\xi, \eta). \end{aligned}$$

Для уравнения (0.1.20) ставится следующая задача. Пусть $\alpha_j(y)$, $(j = 1, \dots, n)$ – заданные достаточно гладкие на сегменте $0 \leq y \leq T$ функции, а $x_0 > 0$, x^j , $j = 1, \dots, n$, – фиксированные точки, принадлежащие промежутку $0 \leq x \leq h$. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (0.1.20), непрерывное в Ω и удовлетворяющее условию $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq h$, если дополнительно для всех $y \in [0, T]$ известно, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{x_0} u(\xi, y) d\xi = \tau(y) \quad (0.1.21)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^n \alpha_j(y) u(x^j, y) = \tau(y). \quad (0.1.22)$$

Решения нелокальной задачи строятся на основе функции Римана

$$\begin{aligned}
R(x, \eta, x, y) &= \exp\left(\int_{\eta}^y A(x, t) dt\right), \\
R(\xi, y, x, y) &= \exp\left(\int_{\xi}^x B(t, y) dt\right),
\end{aligned} \tag{0.1.23}$$

для уравнения $R_{\xi\eta} - (AR)_{\xi} - (BR)_{\eta} + CR = 0$.

Решение задачи Гурса $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq h$, $u(0, y) = \psi(y)$, $0 \leq y \leq T$, для уравнения (0.1.20) представлено в виде

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= R(x, 0, x, y)\varphi(x) - R(0, 0, x, y)\varphi(0) + R(0, y, x, y)\psi(y) + \\
&+ \int_0^x [B(\xi, 0)R(\xi, 0, x, y) - R_{\xi}(\xi, 0, x, y)] \varphi(\xi) d\xi + \int_0^y [A(0, \eta)R(0, \eta, x, y) - \\
&- R_{\eta}(0, \eta, x, y)] \psi(\eta) d\eta + F(x, y, i) + \int_0^x d\xi \int_0^y R(\xi, \eta, x, y) (B_1 u) d\eta.
\end{aligned}$$

Пользуясь общим представлением

$$u(x, y) = v(x, y) + \int_0^x P(x, y, \xi_1) v(\xi_1, y) d\xi_1 + \int_0^y Q(x, y, \eta_1) v(x, \eta_1) d\eta_1,$$

всех регулярных в области Ω и непрерывных в $\bar{\Omega}$ решений уравнения $Lu = B_1 u + f(x, y)$, доказано следующее утверждение.

Теорема 0.1.1. Если для всех $y \in [0, T]$

$$\int_0^{x_0} [R(0, y, \xi, y) + \int_0^{\xi} P(\xi, y, \xi_1) R(0, y, \xi_1, y) d\xi_1] \neq 0,$$

где $R(0, y, \xi, y)$ – функция Римана, нелокальная задача (0.1.21), (0.1.22) для уравнения $u_{xy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = B_1 u + f(x, y)$ всегда разрешима притом единственным образом.

В работе А.Т. Асановой [7] установлены достаточные условия существования и единственности классического решения задачи двухточечной краевой задачи для квазилинейных гиперболических систем уравнений с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = P(t, x)u + f(t, x, u(t, x), \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}), \tag{0.1.24}$$

с условиями

$$u(t, 0) = u_0(t) + v(0), \quad t \in [0, T] \quad (0.1.25)$$

$$u(0, x) = u_0(0) + v(x), \quad x \in [0, \omega] \quad (0.1.26)$$

$$A(x)u(0, x) + C(x)u(T, x) = w(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (0.1.27)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ – векторы n -мерного пространства R^n , $P(t, x)$ – $(n \times n)$ -матрица, вектор-функция $u_0(t)$ задана на $[0, T]$, непрерывна и обладает непрерывной ограниченной производной, вектор-функция $v(x)$ определяется в процессе нахождения искомого решения, а вектор-функция $w(x)$ ограничена и непрерывна на $[0, \omega]$.

В краевой задаче (0.1.24)–(0.1.27) производится, следующая замена: $\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - v(x)$. Тогда задача (0.1.24)–(0.1.27) переходит к эквивалентной краевой задаче с параметром $v(x)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = P(t, x)\tilde{u} + P(t, x)v(x) + f(t, x, \tilde{u}(t, x) + v(x), \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial t}), \quad (0.1.28)$$

с условиями

$$\tilde{u}(t, 0) = u_0(t), \quad t \in [0, T] \quad (0.1.29)$$

$$\tilde{u}(0, x) = u_0(0), \quad x \in [0, \omega] \quad (0.1.30)$$

$$[A(x) + C(x)]v(x) = w(x) - A(x)u_0(0) - C(x)\tilde{u}(T, x), \quad x \in [0, \omega]. \quad (0.1.31)$$

Известные функции удовлетворяют следующим условиям:

- 1) матрица $P(t, x)$ непрерывна при $(t, x) \in \bar{\Omega}$;
- 2) вектор-функция $f(t, x, u(t, x), \frac{\partial u(t, x)}{\partial t})$ определена и непрерывна в области $G_0: (t, x) \in \bar{\Omega}, (u(t, x), \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}) \in S_1(u_0, p) \times S_2(u_0, p)$,

где $S_1(u_0, p) = \{u \in R^n: \|u - u_0\| \leq p\}$, $S_2(u_0, p) = \{u \in R^n: \|u - u_0\| \leq p \text{ и удовлетворяет условию Липшица}$

$\|f(t, x, u_1, u_2) - f(t, x, \bar{u}_1, \bar{u}_2)\| \leq K_1(t, x)\|u_1 - \bar{u}_1\| + K_2(t, x) \times \|u_2 - \bar{u}_2\|$,

где $K_i(t, x)$ – неотрицательные непрерывные на $\bar{\Omega}$ функции, $i = 1, 2$;

- 3) для непрерывных на $[0, \omega]$ матриц $A(x)$ и $C(x)$ существует обратная матрица $[A(x) + C(x)]^{-1}$ при всех $x \in [0, \omega]$.

Используя обозначение $\tilde{\omega}(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial t}$ задача (0.1.28)–(0.1.29) сведена к системе двух интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(t, x) = u_0(t) + \int_0^x [P(t, \xi) \tilde{u}(t, \xi) + P(t, \xi) v(\xi) + \\ + f(\tau, \xi, \tilde{u}(\tau, \xi) + v(\xi), \tilde{\omega}(\tau, \xi))] d\xi, \end{aligned} \quad (0.1.32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x) = u_0(t) + \int_0^t d\tau \int_0^x [P(\tau, \xi) \tilde{u}(\tau, \xi) + P(\tau, \xi) v(\xi) + \\ + f(\tau, \xi, \tilde{u}(\tau, \xi) + v(\xi), \tilde{\omega}(\tau, \xi))] d\xi. \end{aligned} \quad (0.1.33)$$

Метод введения дополнительных параметров разбивает процесс нахождения неизвестных функций на два этапа:

1) нахождение введенного функционального параметра $v(x)$ из соотношения (0.1.31);

2) нахождение неизвестных функций $u(t, x)$, $\omega(t, x)$ из системы интегральных уравнений (0.1.32)–(0.1.33).

Для определения неизвестных функций $v(x)$, $\tilde{u}(t, x)$, $\tilde{\omega}(t, x)$ применяется итерационный метод и решения функциональных соотношений (0.1.32)–(0.1.33), (0.1.31) находят как пределы последовательностей $\{v^{(k)}(x), \tilde{u}^{(k)}(t, x), \tilde{\omega}^{(k)}(t, x)\}$ которое определяют по следующему алгоритму:

- I. учитывая обратимость матрицы $A(x) + C(x)$ при $x \in [0, \omega]$ из уравнения (0.1.31) находят $v^{(0)}(x)$. Из системы уравнений (0.1.32)–(0.1.33) определяется $\tilde{u}^{(0)}(t, x), \tilde{\omega}^{(0)}(t, x)$;
- II. в силу обратимости матрицы $A(x) + C(x)$ при $x \in [0, \omega]$, из уравнения (0.1.31) при $\tilde{u}(T, x) = \tilde{u}^{(0)}(T, x)$ находят $v^{(1)}(x)$. Из системы уравнений (0.1.32)–(0.1.33) определяется $\tilde{u}^{(1)}(t, x), \tilde{\omega}^{(1)}(t, x)$ и т. д.

Если данные краевой задачи (0.1.24)–(0.1.27) удовлетворяют условиям 1)–3), то существует единственное классическое решение $u(t, x)$ двухточечной краевой задачи (0.1.24)–(0.1.27) в области $S(u_0, p)$.

В работе Т.Т. Каракеева исследуется линейное уравнение Вольтерра третьего рода [28]

$$p(x)v(x) + \int_0^x K(x,t)v(t)dt = f(x), \quad (0.1.34)$$

где $p(x), f(x), K(x, t)$ – известные функции и подчиняются условиям

а) $p(x) \in C^2[0, b]$, $p(b) = 0$, $p(x)$ – невозрастающая функция,

б) $K(x, t) \in C^1(D)$, $K(x, x) \geq 0$, $(x, t) \in D = \{0 \leq t \leq x \leq b\}$,

в) $\max(p(x), K(x, t)) > 0$, $0 \leq x \leq b$, $f(x) \in C^1[0, b]$.

Действуя оператором $C_0J + I$, где I – тождественный оператор, J – оператор Вольтерра $(Jv)(x) = \int_0^x v(t)dt$, из (0.1.34), получено уравнение

$$(Av)(x) + (Gv)(x) = (Lv)(x) + g(x), \quad (0.1.35)$$

где $(Lv)(x) = \int_0^x L(x, t)v(t)dt$, $(Gv)(x) = \int_0^x G(t)v(t)dt$,

$g(x) = f(x)C_0 \int_0^x f(t)dt$, $G(x) = C_0 p(x) + K(x, x)$, $L(\tau, t) = K(t, t) -$

$-K(x, t) - C_0 \int_t^x K(v, t)dv$, $(Av)(x) = p(x)v(x)$.

Рассматривается уравнение с малым параметром

$$(\varepsilon + A)v_\varepsilon(x) + (Gv_\varepsilon)(x) = (Lv_\varepsilon)(x) + \varepsilon v(0) + g(x), \quad (0.1.36)$$

где ε – малый параметр из интервала $(0, 1)$.

Доказано следующая теорема.

Теорема 0.1.2. Пусть выполняются условия а-в, если:

1. уравнение (0.1.34) имеет решение $v(x) \in C^\gamma[0, b]$, $0 < \gamma \leq 1$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$, решение уравнения (0.1.36) равномерно сходится к решению уравнения (0.1.34), причем имеет место оценка

$$\|v_\varepsilon(x) - v(x)\|_C \leq (d_4\varepsilon + d_3\varepsilon^\gamma)d_5M_0,$$

$$0 < M_0 = \text{const}, \quad d_3 = (2 + P_2)\gamma_0^{-(1+\gamma)}d_\gamma d_1^{-\gamma}, \quad d_4 = \frac{(2 + P_2)b^\gamma}{p(0)},$$

$$\gamma_0 = \min(1 - \theta_1, 1 - \gamma), \quad d_5 = \exp(bC_3(L_K + C_0\|K\|_{C(D)})/d_1),$$

$$\theta_2 = 1 - \theta_1, \quad C_3 = (2 + P_2)(2\theta_2^{-2} + \|\varphi\|_C p^{-1}(0)),$$

$$\|v\|_{\gamma^*} = \sup_{\substack{(\tau, \nu) \in [0, b] \\ x \neq \nu}} \{|v(x) - v(\nu)|/|x - \nu|^\gamma\};$$

2. уравнение (0.1.34) имеет решение $v(x) \in C[0, b]$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$, решение уравнения (0.1.36) равномерно сходится к решению уравнения (0.1.34), причем имеет место оценка

$$\|v_\varepsilon(x) - v(x)\|_C \leq [d_7(\varepsilon/p(0) + (\theta_2^2 d_1 e)^{-1} \varepsilon^{1-\beta}) \|v\|_C + d_8 \omega_v(\varepsilon^\beta)] d_5,$$

$$\omega_v(\delta) = \sup_{|x-t| \leq \delta} |v(x) - v(t)|.$$

В работе [29] для уравнения (0.1.34) обоснован метод численного решения на основе квадратурных формул правых прямоугольников:

$$v_{\varepsilon, i} = -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{j=1}^i W_{i,j}^{\varepsilon, h} G_j [h \sum_{k=1}^j L_{j,k} v_{\varepsilon, k} - h \sum_{k=1}^i L_{i,k} v_{\varepsilon, k} +$$

$$+ g_j - g_i] + \tilde{W}_{i,j}^{\varepsilon, h} [h \sum_{j=1}^i L_{i,j} v_{\varepsilon, j} + g_i + \varepsilon v_0], \quad i = 1..n, \quad (0.1.37)$$

где $L_{j,k} = L(x_j, x_k)$, $v_{\varepsilon, j} = v_\varepsilon(x_j)$, $g_i = g(x_i)$, $p_i = p(x_i)$, $x_j = jh$,

$$j = 1..i, \quad L(x_i, x_k) = -K(x_i, x_k) + K(x_k, x_k) - C_0 h \sum_{m=k+1}^i K(x_m, x_k),$$

$$v_0 = v(0), \quad i = 1..n,$$

$$W_{i,j}^{\varepsilon, h} = \frac{1}{\varepsilon + p_j} \exp\left(-h \sum_{m=j}^i \frac{G_m}{\varepsilon + p_m}\right),$$

$$\tilde{W}_{i,1}^{\varepsilon, h} = \frac{1}{\varepsilon + p_0} \exp\left(-h \sum_{m=1}^i \frac{G_m + p'_m}{\varepsilon + p_m}\right). \quad (0.1.38)$$

Доказано сходимость численного метода по равномерной сеточной норме к точному решению уравнения (0.1.34), получена оценка погрешности:

$$\|v_{\varepsilon, i} - v_i\|_{C_h} \leq C_2 h^\alpha, \quad 0 < C_2 = \text{const}, \quad \varepsilon = O(h^\alpha), \quad 0 < \sigma \leq 1/2.$$

В работе А. Асанова, Г. Ободоевой [6] рассматривается интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$a(t)u(t) + \int_{t_0}^t K(t, s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [t_0, T], \quad T > t_0, \quad (0.1.39)$$

где $K(t, s)$, $f(t)$, $a(t)$ - заданные функции $a(t_0) = 0$, $a(t)$ - неубывающая функция на $[t_0, T]$.

Исследование вопросов единственности и регуляризируемости решения уравнения (0.1.38) проведено на основе уравнения

$$(\varepsilon + a(t))v(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t K(t, s)v(s, \varepsilon)ds = f(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (0.1.40)$$

где $0 < \varepsilon$ малый параметр, в следующих условиях

- а) при любом фиксированном $t \in [t_0, T]$, $K(t, s) \in L^{q_1}(t_0, t)$, $q \geq 1$, функция $K(t, t) \in L_1^1(t_0, T)$ и $K(t, t) \geq 0$, $t \in [t_0, T]$,
б) при $\tau > \eta$ для любых $(\tau, s), (\eta, s) \in G = \{(t, s): t_0 < s < t < T\}$ справедлива оценка

$$|K(\tau, s) - K(\eta, s)| \leq l(s) \int_{\eta}^{\tau} K(s, s)ds,$$

где $l(t) \geq 0$ при $t \in [t_0, T]$ и $l(t) \in L_1^{q_1}[t_0, T]$, $q_1 \geq 1$.

Доказано следующая теорема.

Теорема 0.1.3. Пусть выполняются условия, а-б. Тогда:

- 1) если $K(t, t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0, T]$ уравнение (0.1.38) имеет решение $u(t) \in C[t_0, T]$ и $u(t_0) = 0$, то решение $v(t, \varepsilon)$ уравнения (0.1.39) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0, T]$ к $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_C \leq 3MC_0\|u(t)\|_C\varepsilon^{1-\beta} + M\omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta),$$

где β - произвольное число из $(0, 1)$, $\omega_{\bar{u}}(\delta) = \sup_{|x-v| \leq \delta} |u(\varphi^{-1}(x)) -$

$-u(\varphi^{-1}(v))|$, $\varphi(t) = \int_{t_0}^t K(s, s)ds$, $\varphi^{-1}(x)$ - обратная функция к функции $\varphi(t)$, M, C_0 - известные постоянные, независимые от ε ;

- 2) если уравнение (0.1.39) имеет решение $u(t) \in C_\varphi^\gamma[t_0, T]$, $0 < \gamma \leq 1$, $\varphi(t) = \int_{t_0}^t K(s, s)ds$ и $u(t_0) = 0$, то решение $v(t, \varepsilon)$ уравнения (0.1.40) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0, T]$ к $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_C \leq M_2\varepsilon^\gamma,$$

где M_2 - постоянная, независимая от ε .

ГЛАВА 1. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1.1 Нелокальная краевая задача для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t \partial x} = P(x, t)w(x, t) + f(x, t, w(x, t), w_t(x, t)), \quad (1.1.1)$$

с условиями

$$w(0, t) = \sigma(t) + \varphi_0, \quad (1.1.2)$$

$$A(x)w(x, 0) + C(x)w(x, T) = q(x). \quad (1.1.3)$$

Известные функции удовлетворяют условиям:

- а) $A(x), C(x) \in C[0, b]$, $p(x) \equiv A(x) + C(x)$ — неубывающая функция, $p(0) = 0$, $p(x) > 0$, $\forall x \in (0, b]$, $q(x) \in C[0, b]$, $\sigma(0) = 0$, $C(0)\sigma(T) = q(0)$;
- б) $P(x, t) \in C(D)$, $f(x, t, w, z) \in C(D \times R^1 \times R^1)$, $\sigma(t) \in C^1[0, T]$, $D = [0, b] \times [0, T]$, φ_0 — неизвестный параметр, функция, $f(x, t, w, z)$ удовлетворяет условию Липшица по w и z ;
- в) $G(x) \equiv C_0 p(x) + K(x, x) \geq d_1$, $0 < C_0$, $K(x, s) \equiv C(x)P_0(s)$, $P_0(s) = \int_0^T P(s, \tau) d\tau$, $0 \leq s \leq x$, $K(x, s)$ удовлетворяет условию Липшица по x в области $D_1 = \{(x, s) / 0 \leq s \leq x \leq b\}$, $d_1 = \text{const}$.

Введем подстановку

$$w(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t z(x, \tau) d\tau, \quad (1.1.4)$$

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (1.1.5)$$

Тогда из (1.1.1), (1.1.2), имеем

$$z(x, t) = \sigma'(t) + \int_0^x P(s, t)\varphi(s) ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t z(s, \tau) d\tau ds +$$

$$+ \int_0^x f(s, t, \varphi(s) + \int_0^t z(s, \tau) d\tau, z(s, t)) ds. \quad (1.1.6)$$

При $t = T$ обе части (1.1.4) умножим на $C(x)$ и учитывая условие (1.1.3) и уравнение (1.1.6), получим интегральное уравнение

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x K(x, s) \varphi(s) ds = \mu(x) - C(x) \int_0^x \int_0^T P(s, t) \times \\ \times \int_0^t z(s, \tau) d\tau dt ds - C(x) \int_0^x \int_0^T f(s, t, \varphi(s) + \int_0^t z(s, \tau) d\tau, z(s, t)) dt ds, \quad (1.1.7)$$

где $\mu(x) = q(x) - C(x)\sigma(T)$, $K(x, s) = C(x) \int_0^T P(s, t) dt$,

$$p(x) = A(x) + C(x).$$

Проинтегрируем уравнение (1.1.7), умноженное на постоянную $C_0 > 0$, от 0 до x и суммируем полученное выражение с исходным уравнением (1.1.7).

Тогда получим уравнение

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s) ds = \int_0^x L(x, s)\varphi(s) ds - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s)P(s, t) \times \\ \times \int_0^t z(s, \tau) d\tau dt ds - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s)f(s, t, \varphi(s) + \int_0^t z(s, \tau) d\tau, z(s, t)) dt ds + \\ + g(x),$$

$$\text{где } L(x, s) = K(s, s) - K(x, s) - C_0 \int_s^x K(v, s) dv, \quad g(x) = \mu(x) + \\ + C_0 \int_0^x \mu(s) ds, \quad K_0(x, s) = C(x) + C_0 \int_s^x C(\xi) d\xi.$$

Для неизвестных функций $z(x, t)$ и $\varphi(x)$ получим систему уравнений

$$z(x, t) = \sigma'(t) + \int_0^x P(s, t)\varphi(s) ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t z(s, \tau) d\tau ds +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^x f(s, t, \varphi(s) + \int_0^t z(s, \tau) d\tau, z(s, t)) ds, \\
& p(x)\varphi(x) + \int_0^x G(s) \varphi(s) ds = \int_0^x L(x, s) \varphi(s) ds - \\
& - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) P(s, t) \int_0^t z(s, \tau) d\tau dt ds - \\
& - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) f(s, t, \varphi(s) + \int_0^t z(s, \tau) d\tau, z(s, t)) dt ds + g(x). \quad (1.1.8)
\end{aligned}$$

Регуляризация систем интегральных уравнений (1.1.8) построим в следующем виде

$$\left\{ \begin{aligned}
& z_\varepsilon(x, t) = \sigma'(t) + \int_0^x P(s, t) \varphi_\varepsilon(s) ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau ds + \\
& + \int_0^x f(s, t, \varphi_\varepsilon(s) + \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau, z_\varepsilon(s, t)) ds, \\
& (\varepsilon + p(x)) \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s) \varphi_\varepsilon(s) ds = \int_0^x L(x, s) \varphi_\varepsilon(s) ds - \\
& - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) P(s, t) \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau dt ds - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) \times \\
& \times f(s, t, \varphi_\varepsilon(s) + \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau, z_\varepsilon(s, t)) dt ds + \varepsilon \varphi(0) + g(x), \quad (1.1.9)
\end{aligned} \right.$$

где ε малый параметр из интервала $(0, 1)$.

Используя резольвенту $R_\varepsilon(x, s) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) G(s)$ ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon + p(x)}\right)$ второе уравнение системы (1.1.9) представим в виде:

$$\varphi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \int_0^s L(s, \xi) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi - \int_0^x L(x, \xi) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi + \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) \times \right. \\
& \times f(\xi, t, \varphi_\varepsilon(\xi) + \int_0^t z_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, z_\varepsilon(\xi, t)) dt d\xi - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) \times \\
& \times f(\xi, t, \varphi_\varepsilon(\xi) + \int_0^t z_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, z_\varepsilon(\xi, t)) dt d\xi + \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) \times \\
& \times P(\xi, t) \int_0^t z_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau dt d\xi - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) P(\xi, t) \int_0^t z_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau dt d\xi + \\
& \left. + g(s) - g(x) \right\} ds + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp \left(- \int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) \left\{ \int_0^x L(x, s) \times \right. \\
& \times \varphi_\varepsilon(s) ds - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) f(s, t, \varphi_\varepsilon(s) + \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau, z_\varepsilon(s, t)) dt ds - \\
& \left. - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) P(x, s) \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau dt ds + \varepsilon \varphi(0) + g(x) \right\}.
\end{aligned}$$

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} z_\varepsilon(x, t) = (A[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x, t), \\ \varphi_\varepsilon(x) = (B[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x), \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{где } (A[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x, t) &= \int_0^x P(s, t) \varphi_\varepsilon(s) ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau ds + \\
&+ \int_0^x f(s, t, \varphi(s) + \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau, z_\varepsilon(s, t)) ds,
\end{aligned}$$

$$(B[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x) = - \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp \left(- \int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left\{ \int_0^s L(s, \xi) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi - \int_0^x L(x, \xi) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi + \right. \\
& + \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) f(\xi, t, \varphi_\varepsilon(\xi) + \int_0^t z_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, z_\varepsilon(\xi, t)) dt d\xi - \\
& - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) f(\xi, t, \varphi_\varepsilon(\xi) + \int_0^t z_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, z_\varepsilon(\xi, t)) dt d\xi + \\
& + \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) P(\xi, t) \int_0^t z_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau dt d\xi - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) \times \\
& \times P(\xi, t) \int_0^t z_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau dt d\xi + g(s) - g(x) \left. \right\} ds + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \times \\
& \times \exp \left(- \int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) \left\{ \int_0^x L(x, s) \varphi_\varepsilon(s) ds - \right. \\
& - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) f(s, t, \varphi_\varepsilon(s) + \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau, z_\varepsilon(s, t)) dt ds - \\
& - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) P(x, s) \int_0^x z_\varepsilon(s, \tau) d\tau dt ds + \varepsilon \varphi(0) + g(x) \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Пусть $\bar{\varphi}_\varepsilon(x), \tilde{\varphi}_\varepsilon(x) \in \Omega_1, \bar{z}_\varepsilon(x, t), \tilde{z}_\varepsilon(x, t) \in \Omega_2,$

где $\Omega_1 = \{\varphi_\varepsilon(x) \in C[0, b]: |\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_0| \leq r_1, \forall x \in [0, b], 0 < \varphi_0, r_1 = \text{const}\}, \Omega_2 = \{z_\varepsilon(x, t) \in C(D): |z_\varepsilon(x, t) - z_0| \leq r_2, \forall (x, t) \in D, 0 < z_0, r_2 = \text{const}\}.$

Оценим разность

$$(A[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x, t) - (A[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x, t), (B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x) - (B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x).$$

Из (1.1.9) получим

$$\begin{aligned}
& |(A[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x, t) - (A[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x, t)| \leq \left| \int_0^x P(s, t) [\bar{\varphi}_\varepsilon(s) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(s)] ds + \right. \\
& + \int_0^x P(s, t) [\bar{z}_\varepsilon(s, t) - \tilde{z}_\varepsilon(s, t)] ds + \int_0^x [f(s, t, \bar{\varphi}_\varepsilon(s) + \int_0^t \bar{z}_\varepsilon(s, \tau) d\tau, \bar{z}_\varepsilon(s, t)) - \\
& \left. - f(s, t, \tilde{\varphi}_\varepsilon(s) + \int_0^t \tilde{z}_\varepsilon(s, \tau) d\tau, \tilde{z}_\varepsilon(s, t))] ds \right| \leq b(\|P(x, t)\|_{C(D)} + L_{1f}) \times \\
& \times \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + b(\|P(x, t)\|_{C(D)} + L_{1f}T + L_{2f}) \times \\
& \times \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)},
\end{aligned}$$

где $0 < L_{if}$, $(i = 1, 2)$ – коэффициент Липшица по третьему и четвертому аргументам.

Для разности $(B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x) - (B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x)$ получим следующие оценки

$$\begin{aligned}
1) & \left| \int_0^s L(s, \xi) [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi - \int_0^x L(x, \xi) [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi \right| = \\
& = \left| \int_0^s [L(s, \xi) - L(x, \xi)] [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi - \int_s^x L(x, \xi) [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi \right| = \\
& = \left| \int_0^s [K(s, \xi) - K(x, \xi) - C_0 \int_s^x K(v, \xi) dv] [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi - \right. \\
& \left. - \int_s^x [K(\xi, \xi) - K(x, \xi) - C_0 \int_\xi^x K(v, \xi) dv] [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi \right| \leq \\
& \leq 2b(x - s)(L_K + C_0 K_1) \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]},
\end{aligned}$$

где $0 < L_K$ – коэффициент Липшица функции $K(x, s)$ по переменной x
 $K_1 = \max_{D_1} |K(x, s)|$, $D_1 = \{(x, s) / 0 \leq s \leq x \leq b\}$,

$$2) \left| \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) P(\xi, t) \int_0^t [\bar{z}_\varepsilon(\xi, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \tau)] d\tau dt d\xi - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) P(\xi, t) \int_0^t [\bar{z}_\varepsilon(\xi, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \tau)] d\tau dt d\xi \Bigg| = \\
& = \left| \int_0^s \int_0^T [K_0(x, \xi) - K_0(s, \xi)] P(\xi, t) \int_0^t [\bar{z}_\varepsilon(\xi, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \tau)] d\tau dt d\xi + \right. \\
& \left. + \int_s^x \int_0^T K_0(x, \xi) P(\xi, t) \int_0^t [\bar{z}_\varepsilon(\xi, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \tau)] d\tau dt d\xi \right| \leq \\
& \leq (x-s)b \frac{T^2}{2} \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \|P(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + \\
& + (x-s) \frac{T^2}{2} \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \|P(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq \\
& \leq (x-s)(1+b) \frac{T^2}{2} \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \|P(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}, \\
& 3) \left| \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) [f(\xi, t, \bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^t \bar{z}_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, \bar{z}_\varepsilon(\xi, t)) - \right. \\
& \left. - f(\xi, t, \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^t \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, \tilde{z}_\varepsilon(\xi, t))] dt d\xi - \right. \\
& \left. - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) [f(\xi, t, \bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^t \bar{z}_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, \bar{z}_\varepsilon(\xi, t)) - \right. \\
& \left. - f(\xi, t, \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^t \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, \tilde{z}_\varepsilon(\xi, t))] dt d\xi \right| = \\
& = \left| \int_0^s \int_0^T [K_0(x, \xi) - K_0(s, \xi)] [f(\xi, t, \bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^t \bar{z}_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, \bar{z}_\varepsilon(\xi, t)) - \right. \\
& \left. - f(\xi, t, \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^t \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, \tilde{z}_\varepsilon(\xi, t))] dt d\xi + \right. \\
& \left. + \int_s^x \int_0^T K_0(x, \xi) [f(\xi, t, \bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^t \bar{z}_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, \bar{z}_\varepsilon(\xi, t)) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| -f(\xi, t, \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^t \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, \tilde{z}_\varepsilon(\xi, t)) \right| dt d\xi \leq (x-s) b T L_{K_0} \times \\
& \times [L_{1f} \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + (L_{1f} T + L_{2f}) \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}] + \\
& + (x-s) T \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} [L_{1f} \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + (L_{1f} T + L_{2f}) \times \\
& \times \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}] \leq (x-s) T (b L_{K_0} + \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)}) \times \\
& \times [L_{1f} \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + (L_{1f} T + L_{2f}) \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}],
\end{aligned}$$

где $0 < L_{K_0}$ – коэффициент Липшица функции $K_0(x, s)$ по переменной x ,

$$4) \left| \int_0^x L(x, s) [\bar{\varphi}_\varepsilon(s) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(s)] ds \right| = \left| \int_0^x [K(s, s) - K(x, s) +
\right.$$

$$\left. + C_0 \int_v^x K(v, s) dv] [\bar{\varphi}_\varepsilon(s) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(s)] ds \right| \leq x \frac{b}{2} (L_K + C_0 K_1) \times$$

$$\times \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]},$$

$$5) \left| \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) P(s, t) \int_0^t [\bar{z}_\varepsilon(s, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(s, \tau)] d\tau dt ds \right| \leq$$

$$\leq x \frac{T^2}{2} \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \|P(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)},$$

$$6) \left| \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) [f(s, t, \bar{\varphi}_\varepsilon(s) + \int_0^t \bar{z}_\varepsilon(s, \tau) d\tau, \bar{z}_\varepsilon(s, t)) -
\right.$$

$$\left. -f(s, t, \tilde{\varphi}_\varepsilon(s) + \int_0^t \tilde{z}_\varepsilon(s, \tau) d\tau, \tilde{z}_\varepsilon(s, t)) \right] dt ds \right| \leq x T \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \times$$

$$\times [L_{1f} \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + (L_{1f} T + L_{2f}) \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}].$$

В силу неравенств 1)–6) получим

$$|(B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x) - (B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x)| \leq d_1^{-1} \int_0^x \exp \left(- \int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) ds \left\{ \frac{3}{2} b(L_K + C_0 K_1) \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \right. \\
& + (1+b) \frac{T^2}{2} \|C(x)\|_{C[0,b]} L_{K_0} \|P(x,t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x,t) - \tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)} + \\
& + (bL_{K_0} + \|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}) T [L_{1f} \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \\
& + (L_{1f}T + L_{2f}) \|\bar{z}_\varepsilon(x,t) - \tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}] \} + \\
& + d_1^{-1} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x G(s) ds \right) \left(\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x G(s) ds \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{b}{2} (L_K + C_0 K_1) \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \frac{T^2}{2} \|K_0(x,s)\|_{C(D_1)} \times \right. \\
& \times \|P(x,t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x,t) - \tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)} + T \|K_0(x,s)\|_{C(D_1)} \times \\
& \times [L_{1f} \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + (L_{1f}T + L_{2f}) \|\bar{z}_\varepsilon(x,t) - \\
& - \tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}] \} \leq d_1^{-1} \left[\frac{b}{2} (3 + e^{-1}) (L_K + C_0 K_1) + bTL_{K_0} + \right. \\
& + T \|K_0(x,s)\|_{C(D_1)} + e^{-1} TL_{1f} \|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}] \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \\
& + d_1^{-1} T \left\{ \frac{T}{2} (1+b) L_{K_0} \|P(x,t)\|_{C(D)} + e^{-1} \frac{T}{2} \|K_0(x,s)\|_{C(D_1)} \times \right. \\
& \times \|P(x,t)\|_{C(D)} + (bL_{K_0} + \|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}) (L_{1f}T + L_{2f}) + \\
& + e^{-1} \|K_0(x,s)\|_{C(D_1)} (L_{1f}T + L_{2f}) \|\bar{z}_\varepsilon(x,t) - \tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)} \}.
\end{aligned}$$

Тогда приходим к системе неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} |A[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon](x, t) - A[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon](x, t)| \leq q_{11} \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \\ + q_{12} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}, \\ |B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon](x) - B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon](x)| \leq q_{21} \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \\ + q_{22} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}, \end{array} \right. \quad (1.1.10)$$

где $q_{11} = b(\|P(x, t)\|_{C(D)} + L_{1f})$,

$q_{12} = b(\|P(x, t)\|_{C(D)} + \|P(x, t)\|_{C(D)} L_{1f} T + L_{2f})$,

$q_{21} = d_1^{-1} \left[\frac{b}{2} (3 + e^{-1})(L_K + C_0 K_1) + b T L_{K_0} + T \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} + \right.$
 $\left. + e^{-1} T \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} L_{1f} \right]$,

$q_{22} = d_1^{-1} T \left[(1 + b) \frac{T}{2} L_{K_0} \|P(x, t)\|_{C(D)} + e^{-1} \frac{T}{2} \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \times \right.$
 $\times \|P(x, t)\|_{C(D)} + (b L_{K_0} + \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)})(L_{1f} T + L_{2f}) +$
 $\left. + e^{-1} \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} (L_{1f} T + L_{2f}) \right]$.

Суммируя (1.1.10) получим

$$\begin{aligned} & |A[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon](x, t) - A[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon](x, t)| + |B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon](x) - B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon](x)| \leq \\ & \leq q_1 \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + q_2 \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}, \end{aligned}$$

где $q_1 = q_{11} + q_{21}$, $q_2 = q_{12} + q_{22}$.

Теорема 1.1.1. Пусть выполняются условие a -в, $q_0 < 1$ и имеет место неравенство

$$|B(\varphi_0, z_0) - z_0| + |A(\varphi_0, z_0) - \varphi_0| \leq (1 - q_0)r,$$

где $q_0 = \max(q_1, q_2)$, $r = r_1 + r_2$.

Тогда система уравнений (1.1.9) имеет единственное решение в паре (Ω_1, Ω_2) .

Введем следующее обозначение

$$(H_\varepsilon \varphi)(x) \equiv \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp \left(- \int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} [\varphi(x) -$$

$$-\varphi(s)]ds - \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) [\varphi(x) - \varphi(0)]. \quad (1.1.11)$$

Имеет место следующая лемма [6].

Лемма 1.1.1. Пусть выполняются условия а-в и $\varphi(x) \in C^1[0, b]$. Тогда справедлива оценка

$$\|\varepsilon(H_\varepsilon\varphi)(x)\|_{C[0,b]} \leq \varepsilon d_2,$$

где $d_2 = d_1^{-1}(1 + e^{-1})\|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}$.

Теорема 1.1.2. Пусть выполняются условия а-в, $q_0 = \max(q_1, q_2) < 1$ и $\varphi(x) \in C^1[0, b]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$, решение системы уравнений (1.1.9) равномерно сходится к решению системы уравнений (1.1.8). Причем имеет место оценка

$$\|z_\varepsilon(x, t) - z(x, t)\|_{C(D)} + \|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0,b]} \leq (1 - q_0)^{-1} d_2 \varepsilon,$$

$0 < d_2 = \text{const.}$

Доказательство. Воспользуемся подстановками

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) + \eta_\varepsilon(x),$$

$$z_\varepsilon(x, t) = z(x, t) + \mu_\varepsilon(x, t).$$

Тогда из (1.1.9) приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon(x, t) = & \int_0^x P(s, t) \eta_\varepsilon(s) ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t \mu_\varepsilon(s, \tau) d\tau ds + \\ & + \int_0^x [f(s, t, \varphi_\varepsilon(s) + \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau, z_\varepsilon(s, t)) - \\ & - f(s, t, \varphi(s) + \int_0^t z(s, \tau) d\tau, z(s, t))] ds, \\ (\varepsilon + p(x))\eta_\varepsilon(x) + & \int_0^x G(s)\eta_\varepsilon(s) ds = \int_0^x L(x, s)\eta_\varepsilon(s) ds - \\ & - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s)P(s, t) \int_0^t \mu_\varepsilon(s, \tau) d\tau dt ds - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) [f(s, t, \varphi_\varepsilon(s) + \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau, z_\varepsilon(s, t)) - \\
& - f(s, t, \varphi(s) + \int_0^t z(s, \tau) d\tau, z(s, t))] dt ds - \varepsilon[\varphi(x) - \varphi(0)]. \quad (1.1.12)
\end{aligned}$$

Перепишем второе уравнение системы (1.1.12), используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon+p(x)}\right)$, в следующем виде

$$\begin{aligned}
\eta_\varepsilon(x) = & -\frac{1}{\varepsilon+p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)} \left\{ \int_0^s L(s, \xi) \times \right. \\
& \times \eta_\varepsilon(\xi) d\xi - \int_0^x L(x, \xi) \eta_\varepsilon(\xi) d\xi + \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) P(x, \xi) \int_0^t \mu_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau dt d\xi - \\
& - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) P(x, \xi) \int_0^t \mu_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau dt d\xi + \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) \times \\
& \times [f(\xi, t, \varphi_\varepsilon(\xi) + \int_0^t z_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, z_\varepsilon(\xi, t)) - \\
& - f(\xi, t, \varphi(\xi) + \int_0^t z(\xi, \tau) d\tau, z(\xi, t))] dt d\xi - \\
& - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) [f(\xi, t, \varphi_\varepsilon(\xi) + \int_0^t z_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau, z_\varepsilon(\xi, t)) - \\
& - f(\xi, t, \varphi(\xi) + \int_0^t z(\xi, \tau) d\tau, z(\xi, t))] dt d\xi + \\
& \left. + \varepsilon[\varphi(x) - \varphi(s)] \right\} ds + \frac{1}{\varepsilon+p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)} ds\right) \times \\
& \times \left\{ \int_0^x L(x, s) \eta_\varepsilon(s) ds - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) P(s, t) \int_0^t \mu_\varepsilon(s, \tau) d\tau dt ds - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) \left[f(s, t, \varphi_\varepsilon(s) + \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau, z_\varepsilon(s, t)) - \right. \\
& \left. - f(s, t, \varphi(s) + \int_0^t z(s, \tau) d\tau, z(s, t)) \right] dt ds - \varepsilon [\varphi(x) - \varphi(0)] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Учитывая оценки для разности $(B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x) - (B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x)$ и обозначение (1.1.11) для $\mu_\varepsilon(x, t)$ и $\eta_\varepsilon(x)$ имеет место оценка

$$\begin{cases} \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq q_{11} \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + q_{12} \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}, \\ \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} \leq q_{21} \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + q_{22} \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + \\ + \|\varepsilon(H_\varepsilon \varphi)(x)\|_{C[0, b]}. \end{cases} \quad (1.1.13)$$

Из (1.1.13), учитывая лемму 1.1.1 получим

$$\|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} \leq q_0 [\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}] + \varepsilon d_2.$$

Отсюда следует оценка теоремы 1.1.2, что и требовалось доказать.

Теорема 1.1.3. Если выполняются условия теоремы 1.1.2, то для функций $w(x, t)$, $w_\varepsilon(x, t)$ и их производных $w_t(x, t)$, $w_{xt}(x, t)$, $w_{\varepsilon t}(x, t)$, $w_{\varepsilon xt}(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеет место равномерная сходимость $w_\varepsilon(x, t) \rightarrow w(x, t)$, $w_{\varepsilon t}(x, t) \rightarrow w_t(x, t)$, $w_{\varepsilon xt}(x, t) \rightarrow w_{xt}(x, t)$.

Доказательство. Функции $w_{\varepsilon x}(x, t)$, $w_{\varepsilon t}(x, t)$, $w_{\varepsilon tx}(x, t)$ определяются по формулам

$$w_\varepsilon(x, t) = \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t z_\varepsilon(x, \tau) d\tau, \quad (1.1.14)$$

$$w_{\varepsilon t}(x, t) = z_\varepsilon(x, t), \quad (1.1.15)$$

$$\begin{aligned}
w_{\varepsilon xt}(x, t) &= z_{\varepsilon x}(x, t) = P(x, t) \varphi_\varepsilon(x) + P(x, t) \int_0^t z_\varepsilon(x, \tau) d\tau + \\
&+ f(x, t, \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t z_\varepsilon(x, \tau) d\tau, z_\varepsilon(x, t)). \quad (1.1.16)
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$w(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t z(x, \tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned}
w_t(x, t) &= z(x, t), \\
w_{xt}(x, t) &= z_x(x, t) = P(x, t)\varphi(x) + P(x, t) \int_0^t z(x, \tau) d\tau + \\
&+ f(x, t, \varphi(x) + \int_0^t z(x, \tau) d\tau, z(x, t))
\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

и (1.1.14)–(1.1.16) получим оценки

$$\begin{aligned}
|w_\varepsilon(x, t) - w(x, t)| &= |\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)| + \left| \int_0^t [z_\varepsilon(x, \tau) - z(x, \tau)] d\tau \right| \leq \\
&\leq \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + T\|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq T_0(\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}) \leq \\
&\leq T_0(1 - q)^{-1}d_2\varepsilon, \text{ где } T_0 = \max(1, T), \\
|w_{\varepsilon t}(x, t) - w_t(x, t)| &= |z_\varepsilon(x, t) - z(x, t)| = \left| \int_0^x P(s, t)\eta_\varepsilon(s) ds + \right. \\
&+ \int_0^x P(s, t) \int_0^t \mu_\varepsilon(x, \tau) d\tau ds + \int_0^x [f(x, t, \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t z_\varepsilon(x, \tau) d\tau, z_\varepsilon(x, t)) - \\
&- f(x, t, \varphi(x) + \int_0^t z(x, \tau) d\tau, z(x, t))] ds \Big| \leq b\|P(x, t)\|_{C(D)}\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \\
&+ bT\|P(x, t)\|_{C(D)}\|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + bL_{1f}\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + bTL_{1f} \times \\
&\times \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + bL_{2f}\|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq b(\|P(x, t)\|_{C(D)} + L_{1f}) \times \\
&\times \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + b(T\|P(x, t)\|_{C(D)} + TL_{1f} + L_{2f})\|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq \\
&\leq d_3(\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}) \leq (1 - q)^{-1}bd_2d_3\varepsilon, \\
\text{где } d_3 &= \max\left((\|P(x, t)\|_{C(D)} + L_{1f}), (T\|P(x, t)\|_{C(D)} + TL_{1f} + L_{2f})\right), \\
|w_{\varepsilon xt}(x, t) - w_{xt}(x, t)| &= |P(x, t)\eta_\varepsilon(x) + P(x, t) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^t \mu_\varepsilon(x, \tau) d\tau + [f(x, t, \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t z_\varepsilon(x, \tau) d\tau, z_\varepsilon(x, t)) - \\
& - f(x, t, \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t z_\varepsilon(x, \tau) d\tau, z_\varepsilon(x, t))] \leq \|P(x, t)\|_{C(D)} \times \\
& \times \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + T\|P(x, t)\|_{C(D)} \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + \\
& + L_{1f} \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + TL_{1f} \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + L_{2f} \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq \\
& \leq (\|P(x, t)\|_{C(D)} + L_{1f}) \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + (T\|P(x, t)\|_{C(D)} + TL_{1f} + \\
& + L_{2f}) \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq d_4 (\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}) \leq \\
& \leq (1 - q)^{-1} d_2 d_3 \varepsilon.
\end{aligned}$$

Теорема 1.1.3 доказано.

Пример. Пусть $f(x, t, w_t, w) = xw^2(x, t) + xw_t(x, t) + (2 - xt)x -$
 $- [x^3 + 0,2(1 - x)]x^2t^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1, P(x, t) = 0,2(1 - x)t,$
 $\sigma(t) = 0, A(x) = x - 1, C(x) = 1 + x^2, q(x) = T(1 + x^2)x^2.$

Тогда $p(x) = A(x) + C(x) = x(1 + x)|_{x=0} = 0,$

$K(x, s) = 0,1(1 + x^2)(1 - s)|_{x=s} = 0,1(1 + x^2)(1 - x).$

При $C_0 = 1,$ имеем $G(x) = x(1 + x) + 0,1(1 + x^2)(1 - x) \geq d_1 = 0,1.$

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$G(x)$	0,1	0,20	0,32	0,47	0,63	0,81	1,01	1,23	1,47	1,73	2

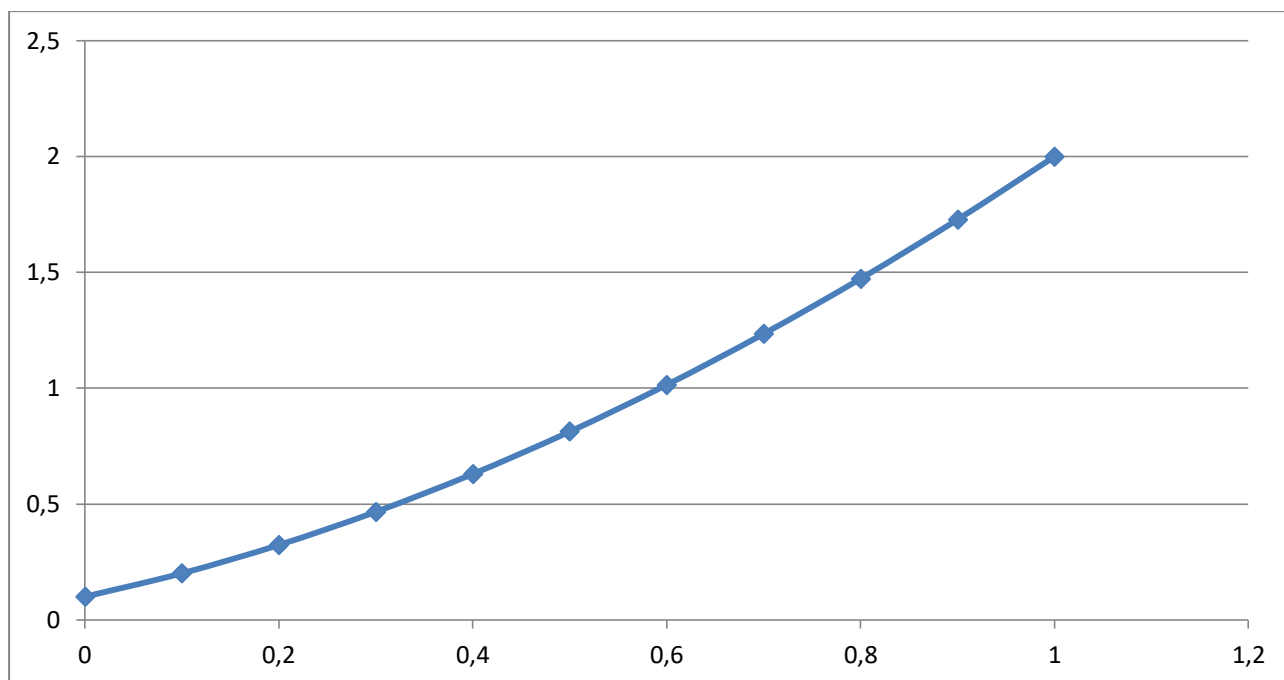


Рис. 1. График функции $G(x)$

1.2. Нелокальная краевая задача для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t \partial x} = P(x, t)w(x, t) + M(x, t)w_t(x, t) + f(x, t), \quad (1.2.1)$$

с условиями

$$w(0, t) = \sigma(t) + \varphi_0, \quad (1.2.2)$$

$$A(x)w(x, 0) + C(x)w(x, T) = q(x). \quad (1.2.3)$$

Известные функции удовлетворяют условиям:

- а) $A(x), C(x), q(x) \in C[0, b]$, $p(x) \equiv A(x) + C(x)$ – неубывающая функция, $p(0) = 0$, $p(x) > 0$, $\forall x \in (0, b]$, φ_0 – неизвестный параметр;
- б) $P(x, t), f(x, t), M(x, t) \in C(D)$, $\sigma(t) \in C^1[0, T]$, $D = [0, b] \times [0, T]$ функции $P(x, t), M(x, t)$ удовлетворяют условию Липшица по первому аргументу;
- в) $G(x) \equiv C_0 p(x) + K(x, x) \geq d_1 > 0$, $K(x, s) \equiv C(x) P_0(s)$,

$P_0(s) = \int_0^T P(s, t)dt$, $K(x, s)$ удовлетворяет условию Липшица по x в области $D_1 = \{(x, s)/0 \leq s \leq x \leq b\}$, при этом выполняется условие согласования $A(0)\sigma(0) + C(0)\sigma(T) = q(0)$.

Используя подстановку

$$w(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t z(x, \tau)d\tau, \quad (1.2.4)$$

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad (1.2.5)$$

из (1.2.1), (1.2.2), получим

$$\begin{aligned} z(x, t) = & \sigma'(t) + \int_0^x P(s, t)\varphi(s)ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t z(s, \tau)d\tau ds + \\ & + \int_0^x M(s, t)z(s, t)ds + \int_0^x f(s, t)ds. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

При $t = T$ обе стороны равенства (1.2.4) умножим на $C(x)$ и учитывая условие (1.2.3), уравнение (1.2.6), получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} p(x)\varphi(x) + \int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds = & q_0(x) - C(x) \int_0^x \int_0^T P(s, t) \times \\ \times \int_0^t z(s, \tau)d\tau dt ds - & C(x) \int_0^x \int_0^T M(s, t)z(s, t)dt ds, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

где $q_0(x) = q(x) - C(x)[\sigma(T) - \sigma(0)] - C(x) \int_0^x \int_0^T f(s, t)dt ds$.

При этом так как $p(0) = A(0) + C(0) = 0$, т. е. $C(0) = -A(0)$, то учитывая условие согласования

$$q_0(0) = q(0) - C(0)[\sigma(T) - \sigma(0)] = q(0) - C(0)\sigma(T) - A(0)\sigma(0) = 0.$$

Действуем оператором $I + C_0J$ на (1.2.7), где I – единичный оператор, $J\varphi(x) = \int_0^x \varphi(s)ds$, $0 < C_0 = \text{const}$.

Тогда получим

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s)ds = \int_0^x L(x, s)\varphi(s)ds - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) \times$$

$$\times P(s, t) \int_0^t z(s, \tau) d\tau dt ds - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) M(s, t) z(s, t) dt ds + g(x),$$

где $G(s) = C(s)p(s) + K(s, s)$, $L(x, s) = K(s, s) - K(x, s) -$
 $-C_0 \int_s^x K(v, s) dv$, $g(x) = q_0(x) + C_0 \int_0^x q_0(s) ds$, $K_0(x, s) = C(x) +$
 $+C_0 \int_s^x C(s) ds$.

Для неизвестных функций $z(x, t)$ и $\varphi(x)$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} z(x, t) &= \sigma'(t) + \int_0^x P(s, t) \varphi(s) ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t z(s, \tau) d\tau ds + \\ &+ \int_0^x M(s, t) z(s, t) ds + \int_0^x f(s, t) ds, \\ p(x) \varphi(x) + \int_0^x G(s) \varphi(s) ds &= \int_0^x L(x, s) \varphi(s) ds - \\ &- \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) P(s, t) \int_0^t z(s, \tau) d\tau dt ds - \\ &- \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) M(s, t) z(s, t) dt ds + g(x). \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений с малым параметром

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(x, t) &= \sigma'(t) + \int_0^x P(s, t) \varphi_\varepsilon(s) ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau ds + \\ &+ \int_0^x M(s, t) z_\varepsilon(s, t) ds + \int_0^x f(s, t) ds, \\ (\varepsilon + p(x)) \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s) \varphi_\varepsilon(s) ds &= \int_0^x L(x, s) \varphi_\varepsilon(s) ds - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) \times P(s, t) \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau dt ds - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) \times \\
& \times M(s, t) z_\varepsilon(s, t) dt ds + \varepsilon \varphi(0) + g(x),
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

где ε малый параметр из интервала $(0, 1)$.

Отсюда, используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon + p(x)}\right)$ систему (1.2.9) представим в виде:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} z_\varepsilon(x, t) = (A[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x, t), \\ \varphi_\varepsilon(x) = (B[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x), \end{cases} \\
& \text{где } (A[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x, t) = \int_0^x P(s, t) \varphi_\varepsilon(s) ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau ds + \\
& + \int_0^x M(s, t) z_\varepsilon(s, t) ds + \int_0^x f(s, t) ds, \\
& (B[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times \\
& \times \left\{ \int_0^s L(s, \xi) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi - \int_0^x L(x, \xi) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi + \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) P(\xi, t) \times \right. \\
& \times \int_0^t z_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau dt d\xi - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) P(\xi, t) \int_0^t z_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau dt d\xi + \\
& + \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) M(\xi, t) z_\varepsilon(\xi, t) dt d\xi - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) M(\xi, t) z_\varepsilon(\xi, t) dt d\xi + \\
& \left. + g(s) - g(x) \right\} ds + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \left\{ \int_0^x L(x, \xi) \times \right. \\
& \times \varphi_\varepsilon(s) ds - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) P(s, t) \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau dt d\xi - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) \times
\end{aligned}$$

$$\times M(s, t) z_\varepsilon(s, t) dt ds - \varepsilon \varphi(0) + g(x) \Big\}.$$

Пусть $\bar{\varphi}_\varepsilon(x), \tilde{\varphi}_\varepsilon(x) \in \Omega_1, \bar{z}_\varepsilon(x, t), \tilde{z}_\varepsilon(x, t) \in \Omega_2$. Оценим разность $(A[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x, t) - (A[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x, t)$. Из (1.2.9) получим

$$\begin{aligned} |(A[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x, t) - (A[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x, t)| &\leq \left| \int_0^x P(s, t) [\bar{\varphi}_\varepsilon(s) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(s)] ds + \right. \\ &+ \int_0^x P(s, t) \int_0^t [\bar{z}_\varepsilon(s, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(s, \tau)] d\tau ds + \int_0^x M(s, t) [\bar{z}_\varepsilon(s, \tau) - \\ &- \tilde{z}_\varepsilon(s, \tau)] ds \Big| \leq b \|P(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \\ &+ (T \|P(x, t)\|_{C(D)} + \|M(x, t)\|_{C(D)}) b \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}. \end{aligned}$$

Для разности $(B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x) - (B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x)$ получим следующие оценки

$$\begin{aligned} 1) \left| \int_0^s L(s, \xi) [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi - \int_0^x L(x, \xi) [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi \right| &= \\ = \left| \int_0^s [L(s, \xi) - L(x, \xi)] [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi - \int_s^x L(x, \xi) [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \right. \\ &- \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi \Big| = \left| \int_0^s [K(s, \xi) - K(x, \xi) - C_0 \int_s^x K(v, \xi) dv] [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \right. \\ &- \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi - \int_s^x [K(\xi, \xi) - K(x, \xi) - C_0 \int_\xi^x K(v, \xi) dv] [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \\ &- \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi \Big| \leq 2b(L_K + C_0 K_1)(x - s) \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]}, \end{aligned}$$

где $0 < L_K$ — коэффициент Липшица функции $K(x, s)$ по переменной x , $K_1 = \max_{D_1} |K(x, s)|$, $D_1 = \{(x, t) / 0 \leq s \leq x \leq b\}$,

$$\begin{aligned}
& 2) \left| \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) P(\xi, t) \int_0^t [\bar{z}_\varepsilon(\xi, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \tau)] d\tau dt d\xi - \right. \\
& \left. - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) P(\xi, t) \int_0^t [\bar{z}_\varepsilon(\xi, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \tau)] d\tau dt d\xi \right| = \\
& = \left| \int_0^s \int_0^T [K_0(x, \xi) - K_0(s, \xi)] P(\xi, t) \int_0^t [\bar{z}_\varepsilon(\xi, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \tau)] d\tau dt d\xi + \right. \\
& \left. + \int_s^x \int_0^T K_0(x, \xi) P(\xi, t) \int_0^t [\bar{z}_\varepsilon(\xi, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \tau)] d\tau dt d\xi \right| \leq (x - s)b \times \\
& \times \frac{T^2}{2} L_{K_0} \|P(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + (x - s) \frac{T^2}{2} \times \\
& \times \|K_0(x, s)\|_{C(D)} \|P(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq (x - s) \times \\
& \times \frac{T^2}{2} (bL_{K_0} + \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)}) \|P(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}, \\
& 3) \left| \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) M(\xi, t) [\bar{z}_\varepsilon(\xi, t) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, t)] dt d\xi - \right. \\
& \left. - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) M(\xi, t) [\bar{z}_\varepsilon(\xi, t) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, t)] dt d\xi \right| = \\
& = \left| \int_0^s \int_0^T [K_0(x, \xi) - K_0(s, \xi)] M(\xi, t) [\bar{z}_\varepsilon(\xi, t) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, t)] dt d\xi + \right. \\
& \left. + \int_s^x \int_0^T K_0(x, \xi) M(\xi, t) [\bar{z}_\varepsilon(\xi, t) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, t)] dt d\xi \right| \leq \\
& \leq (x - s)bTL_{K_0} \|M(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (x-s)T \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \|M(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq \\
& \leq (x-s)T (bL_{K_0} + \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)}) \|M(x, t)\|_{C(D)} \times \\
& \times \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}, \\
4) & \left| \int_0^x L(x, s) [\bar{\varphi}_\varepsilon(s) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(s)] ds \right| = \left| \int_0^x [K(s, s) - K(x, s) - \right. \\
& \left. - C_0 \int_s^x K(v, s) dv] [\bar{\varphi}_\varepsilon(s) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(s)] ds \right| \leq x \frac{b}{2} (L_K + C_0 K_1) \times \\
& \times \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]}, \\
5) & \left| \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) P(s, t) \int_0^t [\bar{z}_\varepsilon(s, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(s, \tau)] d\tau dt ds \right| \leq \\
& \leq x \frac{T^2}{2} \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \|P(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}, \\
6) & \left| \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) M(s, t) [\bar{z}_\varepsilon(s, t) - \tilde{z}_\varepsilon(s, t)] dt ds \right| \leq xT \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \times \\
& \times \|M(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}.
\end{aligned}$$

Из оценок 1)–6) имеем

$$\begin{aligned}
& |(B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x) - (B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x)| = d_1^{-1} \int_0^x \exp \left(- \int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \times \\
& \times \left(\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) ds \left\{ 2b(L_K + C_0 K_1) \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \right. \\
& + [bL_{K_0} + \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)}] \frac{T^2}{2} \|P(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + \\
& \left. + T[bL_{K_0} + \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)}] \|M(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_1^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x G(s) ds \right) \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x G(s) ds \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{b}{2} (L_K + C_0 K_1) \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \frac{T^2}{2} \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \times \right. \\
& \times \|P(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \times \\
& \times \|M(x, t)\|_{C(D)} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \} \leq d_1^{-1} b (L_K + C_0 K_1) \times \\
& \times \left(2 + \frac{e^{-1}}{2} \right) \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + d_1^{-1} T [b L_{K_0} + \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \times \\
& \times (1 + e^{-1})] \left[\frac{T}{2} \|P(x, t)\|_{C(D)} + \|M(x, t)\|_{C(D)} \right] \times \\
& \times \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}.
\end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
& |(A[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x, t) - (A[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x, t)| \leq q_{11} \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \\
& + q_{12} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}, \\
& |(B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x) - (B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x)| \leq q_{21} \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \\
& + q_{22} \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}, \tag{1.2.10}
\end{aligned}$$

где $q_{11} = b \|P(x, t)\|_{C(D)}$, $q_{12} = b (T \|P(x, t)\|_{C(D)} + \|M(x, t)\|_{C(D)})$,

$$q_{21} = d_1^{-1} b \left(2 + \frac{e^{-1}}{2} \right) (L_K + C_0 K_1),$$

$$\begin{aligned}
q_{22} &= d_1^{-1} T \left[\frac{T}{2} \|P(x, t)\|_{C(D)} + \|M(x, t)\|_{C(D)} \right] [b L_{K_0} + \|K_0(x, s)\|_{C(D_1)} \times \\
& \times (1 + e^{-1})].
\end{aligned}$$

Суммируя (1.2.10) получим

$$\begin{aligned}
& |(A[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x, t) - (A[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x, t)| + |(B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x) - \\
& - (B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x)| \leq q_1 \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + q_2 \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)},
\end{aligned}$$

где $q_1 = q_{11} + q_{21}$, $q_2 = q_{12} + q_{22}$.

Теорема 1.2.1. Пусть выполняются условие a -в, $q_0 < 1$ и имеет место неравенство

$$|B(\varphi_0, z_0) - z_0| + |A(\varphi_0, z_0) - \varphi_0| \leq (1 - q_0)r, \quad (1.2.11)$$

где $q_0 = \max(q_1, q_2)$, $r = r_1 + r_2$.

Тогда система уравнений (1.2.9) имеет единственное решение в паре (Ω_1, Ω_2) .

Теорема 1.2.2. Пусть выполняются условия a -в, $q_0 < 1$ и $\varphi(x) \in C^1[0, b]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$, решение системы уравнений (1.2.9) равномерно сходится к решению системы уравнений (1.2.8). Причем имеет место оценка

$$\|z_\varepsilon(x, t) - z(x, t)\|_{C(D)} + \|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0, b]} \leq (1 - q_0)^{-1} d_2 \varepsilon,$$

где $d_2 = d_1^{-1}(1 + e^{-1})\|\varphi'(x)\|_{C[0, b]}$.

Доказательство. Воспользуемся подстановками

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) + \eta_\varepsilon(x),$$

$$z_\varepsilon(x, t) = z(x, t) + \mu_\varepsilon(x, t).$$

Тогда из (1.2.9) приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \mu_\varepsilon(x, t) = \int_0^x P(s, t) \eta_\varepsilon(s) ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t \mu_\varepsilon(s, \tau) d\tau ds + \\ + \int_0^x M(s, t) \mu_\varepsilon(s, t) ds, \\ (\varepsilon + p(x)) \eta_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s) \eta_\varepsilon(s) ds = \int_0^x L(x, s) \eta_\varepsilon(s) ds - \\ - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) P(s, t) \int_0^t \mu_\varepsilon(s, \tau) d\tau dt ds - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) \times \\ \times M(s, t) \mu_\varepsilon(s, t) dt ds - \varepsilon[\varphi(x) - \varphi(0)]. \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Перепишем второе уравнение системы (1.2.12), используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon + p(x)}\right)$, в следующем виде

$$\eta_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)}\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left\{ \int_0^s L(s, \xi) \eta_\varepsilon(\xi) d\xi - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^x L(x, \xi) \eta_\varepsilon(\xi) d\xi + \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) P(\xi, t) \int_0^t \mu_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau dt d\xi - \\
& - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) P(\xi, t) \int_0^t \mu_\varepsilon(\xi, \tau) d\tau dt d\xi + \int_0^x \int_0^T K_0(x, \xi) M(\xi, t) \times \\
& \times \mu_\varepsilon(\xi, \tau) dt d\xi - \int_0^s \int_0^T K_0(s, \xi) M(\xi, t) \mu_\varepsilon(\xi, \tau) dt d\xi + \\
& + \varepsilon [\varphi(x) - \varphi(\xi)] \Big\} ds + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp \left(- \int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) \times \\
& \times \left\{ \int_0^x L(x, \xi) \eta_\varepsilon(s) ds - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) P(s, t) \int_0^t \mu_\varepsilon(s, \tau) d\tau dt ds - \right. \\
& \left. - \int_0^x \int_0^T K_0(x, s) M(s, t) \mu_\varepsilon(s, \tau) dt ds - \varepsilon [\varphi(x) - \varphi(0)] \right\}.
\end{aligned}$$

Учитывая оценки для разности $(B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x) - (B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x)$ относительно $\mu_\varepsilon(x, t)$ и $\eta_\varepsilon(x)$ имеет место оценка

$$\begin{cases} \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq q_{11} \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + q_{12} \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}, \\ \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} \leq q_{21} \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + q_{22} \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + \\ + \|\varepsilon(H_\varepsilon \varphi)(x)\|_{C[0, b]}, \end{cases} \quad (1.2.13)$$

где оператор $(H_\varepsilon \varphi)(x)$ определяется согласно (1.1.11).

Суммируя и учитывая лемму 1.1.1 получим

$$\|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} \leq q_0 [\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}] + \varepsilon d_2.$$

Отсюда следует оценка теоремы 1.2.2, что и требовалось доказать.

Функция $w_\varepsilon(x, t)$ определяется по формуле:

$$w_\varepsilon(x, t) = \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t z_\varepsilon(x, \tau) d\tau \quad (1.2.14)$$

и так как

$$w_{\varepsilon t}(x, t) = z_\varepsilon(x, t), \quad w_t(x, t) = z(x, t), \quad (1.2.15)$$

$$w_{\varepsilon x t}(x, t) = z_{\varepsilon x}(x, t), \quad w_{xt}(x, t) = z_x(x, t), \quad (1.2.16)$$

то из (1.2.14), (1.2.15), (1.2.16) соответственно, получим оценки

$$\begin{aligned} 1) |w_\varepsilon(x, t) - w(x, t)| &\leq |\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)| + \left| \int_0^t [z_\varepsilon(x, \tau) - z(x, \tau)] d\tau \right| \leq \\ &\leq \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + T\|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq T_0(\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}) \leq \\ &\leq T_0(1 - q_0)^{-1}d_2\varepsilon, \text{ где } T_0 = \max(1, T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) |w_{\varepsilon t}(x, t) - w_t(x, t)| &= |z_\varepsilon(x, t) - z(x, t)| = \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq \\ &\leq \|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} \leq (1 - q_0)^{-1}d_2\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) |w_{\varepsilon xt}(x, t) - w_{xt}(x, t)| &= |z_{\varepsilon x}(x, t) - z_x(x, t)| \leq \|P(x, t)\|_{C(D)} \times \\ &\times |\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)| + T\|P(x, t)\|_{C(D)}|z_\varepsilon(x, t) - z(x, t)| + \|M(x, t)\|_{C(D)} \times \\ &\times |z_\varepsilon(x, t) - z(x, t)| \leq \|P(x, t)\|_{C(D)}\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + [\|M(x, t)\|_{C(D)} + \\ &+ T\|P(x, t)\|_{C(D)}]\|\mu_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \leq Q_2[\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \|M(x, t)\|_{C(D)}] \leq \\ &\leq Q_2(1 - q_0)^{-1}d_2\varepsilon, \end{aligned}$$

где $Q_2 = \max(\|P(x, t)\|_{C(D)}, T_0[\|P(x, t)\|_{C(D)} + \|M(x, t)\|_{C(D)}])$.

Теорема 1.2.3. Если выполняются условия теоремы 1.2.2, то для функций $w(x, t), w_\varepsilon(x, t)$ и их производных $w_t(x, t), w_{xt}(x, t), w_{\varepsilon t}(x, t), w_{\varepsilon xt}(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеет место равномерная сходимость $w_\varepsilon(x, t) \rightarrow w(x, t), w_{\varepsilon t}(x, t) \rightarrow w_t(x, t), w_{\varepsilon xt}(x, t) \rightarrow w_{xt}(x, t)$.

Пример. Пусть $P(x, t) = (1 - x)(1 + t)$, $M(x, t) = x^2t^3$, $C_0 = 1$,
 $f(x, t) = -x^2 - t^2 - x^2t - t^3 + x^3 + xt^2 + x^3t + xt^3 - 2x^2t^4$,
 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1, \sigma(t) = t^2, q(x) = 1 + (1 + (1 + x))x^2$,
 $C(x) = 1 + x^2, A(x) = x^3 - 1$. Тогда $p(x) = x^2(1 + x)$,

$$K(x, s) = (1 + x^2) \int_0^1 (1 + t)(1 - s) dt = \frac{3}{2}(1 + x^2)(1 - s),$$

$$K(x, x) = \frac{3}{2}(1 + x^2)(1 - x), G(x) = x^2(1 + x) + \frac{3}{2}(1 + x^2)(1 - x).$$

Точным решением задачи является функция $w(x, t) = x^2 + t^2$.

При этом $G(x) \geq 1,5$, выполняется условия согласования $A(0)\sigma(0) + C(0)\sigma(1) = q(0)$.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$G(x)$	1,5	1,37	1,30	1,26	1,27	1,31	1,39	1,50	1,64	1,81	2

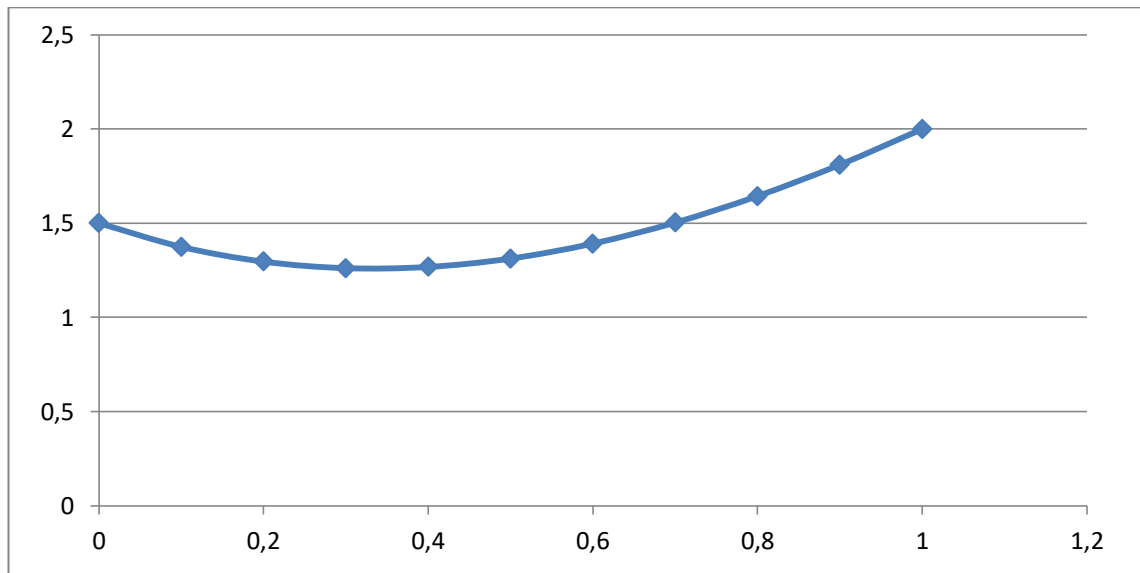


Рис.2. График функции $G(x)$

Замечание 1.1. Если задано более общее линейное дифференциальное уравнение вида

$$w_{xt}(x, t) + a(x, t)w_x(x, t) + m(x, t)w_t(x, t) + c(x, t)w(x, t) = f(x, t), \quad (1.2.17)$$

с условиями (1.1.2), (1.1.3) при выполнении требований:

а) $a(x, t) \in C^{1,0}(D)$, $c(x, t) \in C^{1,1}(D)$, $A(x)$, $C(x)$, $q(x) \in C[0, b]$,

$a(x, t)|_{x=0} = 0$;

б) $m(x, t) \in C^{0,1}(D)$, $f(x, t) \in C(D)$, $\sigma(t) \in C^1[0, T]$,

$D = [0, b] \times [0, T]$;

в) $\sigma(0) = 0$, $C(0)\sigma(T) = q(0)$,

то применяя метод функции Римана задача сводится к линейному интегральному уравнению Вольтерра третьего рода [54]

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds = \mu(x) + B(x)\varphi_0,$$

где $K(x,s) \equiv C(x)[m(s,0)R(x,T,s,0) + R_s(x,T,s,0)]$,

$$\begin{aligned} \mu(x) \equiv & q(x) - C(x)[R(x,T,0,T)\sigma(T) + \int_0^T R_\tau(x,T,0,\tau)\sigma(\tau)d\tau + \\ & + \int_0^x ds \int_0^T R(x,T,s,\tau)f(s,\tau)d\tau], \quad p(x) \equiv A(x) + C(x)R(x,T,x,0), \end{aligned}$$

$B(x) \equiv 2C(x)[R(x,T,0,T) - R(x,T,0,0)]$, $R(x,t,s,\tau)$ – функция Римана удовлетворяющее уравнению $R_{xt} - (aR)_x - (mR)_t - cR = 0$ и условиям $R(s,t,s,\tau) = \exp\left(\int_\tau^t a(s,\tau')d\tau'\right)$, $R(x,\tau,s,\tau) = \exp\left(\int_s^x m(s',\tau)ds'\right)$.

Так как $a(0,t) = 0$, то $R(0,\tau,0,\tau) = 1$, $R_\tau(0,T,0,\tau) = 0$, $R(0,T,0,T) = 1$. Тогда $B(0) = 0$, $p(0) = A(0) + C(0) = 0$ и если учесть, что $C(0)\sigma(T) = q(0)$, то $\mu(0) = 0$.

Решение задачи представляется соотношением:

$$\begin{aligned} w(x,t) = & R(x,t,x,0)\varphi(x) + R(x,t,0,t)\sigma(t) + 2[R(x,t,0,t) - \\ & - R(x,t,0,0)]\varphi_0 + \int_0^t R_\tau(x,t,0,\tau)\sigma(\tau)d\tau + \int_0^x [m(s,0)R(x,t,s,0) + \\ & + R_s(x,t,s,0)]\varphi(s)ds + \int_0^x ds \int_0^t R(x,t,s,\tau)f(s,\tau)d\tau \equiv (Q\varphi)(x,t). \end{aligned}$$

Имеет место следующая оценка [54]

$$\|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0,b]} \leq d_{12}\varepsilon, \quad 0 < d_{12} = \text{const},$$

$\varphi_\varepsilon(x)$ – решение регуляризованного уравнения

$$\begin{aligned} (\varepsilon + p(x))\varphi_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s)\varphi_\varepsilon(s)ds = & \int_0^x L(x,s)\varphi_\varepsilon(s)ds + g(x) + \\ & + (\varepsilon + B_0(x))\varphi(0), \end{aligned}$$

где $G(x) = C_0p(x) + K(x,x) \geq d_1 > 0$, $L(x,s) = K(s,s) - K(x,s) -$

$$-C_0 \int_s^x K(v, s) dv, \quad g(x) = \mu(x) + C_0 \int_0^x \mu(s) ds, \quad B_0(x) = B(x) + \\ + C_0 \int_0^x B(s) ds, \quad 0 < C_0 = \text{const}.$$

Следовательно, решение задачи (1.2.10), (1.1.2), (1.1.3) единственно в паре $C(D), C[0, b]$.

Замечание 1.2. Из задачи (1.2.1)-(1.2.3) при $M(x, t) = 0$, $P(x, t) = a_0 = \text{const}$, получим следующую задачу

$$w_{xt}(x, t) + a_0 w(x, t) = f(x, t), \quad (1.2.18)$$

$$A(x)w(x, 0) + C(x)w(x, T) = q(x),$$

$$w(0, t) = \sigma(t) + \varphi_0, \quad (1.2.19)$$

$$C(0)\sigma(T) + q(0) = 0.$$

Относительно $A(x)$, $C(x)$, $q(x)$, $\sigma(t)$, φ_0 выполняются условия а-в.

В (1.2.18), (1.2.19) произведя обозначение $w(x, 0) = \varphi(x)$. Рассмотрим задачу

$$w_{xt}(x, t) + a_0 w(x, t) = f(x, t), \quad (1.2.20)$$

$$w(x, 0) = \varphi(x),$$

$$w(0, t) = \sigma(t) + \varphi_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0 \quad (1.2.21)$$

Тогда решение задач (1.2.20), (1.2.21) определяется по методу Римана в виде

$$w(x, t) = R(x, t, x, 0)\varphi(x) + R(x, t, 0, t)\sigma(t) - \int_0^x R_s(x, t, s, 0)\varphi(s)ds - \\ - \int_0^t R_\tau(x, t, 0, \tau)\sigma(\tau)d\tau + \int_0^x \int_0^t R(x, t, s, \tau)f(s, \tau)d\tau ds, \quad (1.2.22)$$

где $R(x, t, s, \tau)$ - функция Римана определяется в виде [13, с 262]

$$R(x, t, s, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{[\Gamma(j+1)]^2} (a_0(s-x)(\tau-t))^j.$$

Для определения $\varphi(x)$ при $t = T$ умножим на $C(x)$ обе части уравнения (1.2.22). Тогда, учитывая условие (1.2.19), получим

$$[A(x) - C(x)]\varphi(x) + C(x) \int_0^x R_s(x, T, s, 0) \varphi(s) ds = q(x) + C(x) [\sigma(T) - \int_0^T R_\tau(x, T, 0, \tau) \sigma(\tau) d\tau + \int_0^x \int_0^T R(x, T, s, \tau) f(s, \tau) d\tau ds]. \quad (1.2.23)$$

Используя обозначения:

$$K(x, s) \equiv C(x)R_s(x, T, s, 0), \quad p(x) \equiv A(x) - C(x)$$

$\mu(x) \equiv \sigma(t)C(x) + q(x) - C(x) \int_0^T R_\tau(x, T, 0, \tau) \sigma(\tau) d\tau$, из (1.2.23) получим интегральное уравнение

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x K(x, s)\varphi(s) ds = \mu(x). \quad (1.2.24)$$

При $x = 0$, $R_\tau(0, T, 0, \tau) = 0$. Тогда из условия согласования следует, что $\mu(0) \equiv \sigma(t)C(0) + q(0) - C(0) \int_0^T R_\tau(0, T, 0, \tau) \sigma(\tau) d\tau = 0$.

Действуем оператором $I + C_0 J$ на (1.2.24), где I – единичный оператор, $J\varphi(x) = \int_0^x \varphi(s) ds$, и получим уравнение

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s) ds = \int_0^x L(x, s)\varphi(s) ds + g(x),$$

где $G(s) = C_0 p(s) + K(s, s)$, $L(x, s) = K(s, s) - K(x, s) - C_0 \int_s^x K(v, s) dv$, $g(x) = \mu(x) + C_0 \int_0^x \mu(s) ds$.

Регуляризованное решение задачи (1.2.18)–(1.2.19) находим из системы интегральных уравнений

$$w_\varepsilon(x, t) = \varphi_\varepsilon(x) + \sigma(t) - \int_0^x R_s(x, t, s, 0) \varphi_\varepsilon(s) ds + \int_0^t R_\tau(x, t, 0) \sigma(\tau) d\tau + \int_0^x \int_0^t R(x, t, s, \tau) f(s, \tau) d\tau ds,$$

$$(\varepsilon + p(x))\varphi_\varepsilon(x) + \int_0^x G(\xi)\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi = \int_0^x L(x, \xi)\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi + g(x) + \varepsilon\varphi(0),$$

где $\varepsilon \in (0,1)$.

При этом имеет место оценки

$$\|w_\varepsilon(x, t) - w(x, t)\|_{C(D)} \leq d_4 \|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0, b]},$$

$$\|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0, b]} \leq d_3 \varepsilon, \quad 0 < d_3, d_4 = \text{const}.$$

1.3. Регуляризация уравнения Бенджамина–Бона–Махони с нелокальными краевыми условиями

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} w_{xxt}(x, t) + a_1 w_t(x, t) + a_2 w_x(x, t) + \\ + a_3 w(x, t)w_x(x, t) = f(x, t), \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0, \\ w_x(0, t) &= \psi, \\ A(x)w(x, 0) &= C(x)w(x, T) + q(x), \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

где $a_i = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$, ψ – неизвестный параметр, известные функции $A(x)$, $C(x)$, $q(x)$, $f(x, t)$ подчиняются условиям:

$$a) \quad f(x, t) \in C(D), \quad D = [0, b] \times [0, T], \quad A(x), C(x), q(x) \in C^2[0, b],$$

$$C(0) = 0, \quad q^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \quad G(x) = A'(x) - C'(x) \geq d_1,$$

$0 < d_1 = \text{const}$, $p(x) = A(x) - C(x)$, $p(0) = 0$, $p(x)$ – неубывающая функция, $p(x) > 0$, $\forall x \in (0, b]$.

Произведем подстановку

$$w(x, t) = \int_0^x u(s, t)ds. \quad (1.3.3)$$

Тогда из (1.3.1)–(1.3.2) получим задачу

$$u_{xt}(x, t) + a_2 u(x, t) = f(x, t) - a_1 \int_0^x u_t(s, t) ds -$$

$$-a_3 u(x, t) \left(\int_0^x u(s, t) ds \right), \quad (1.3.4)$$

$$u(0, t) = \psi,$$

$$A(x) \int_0^x u(s, 0) ds = C(x) \int_0^x u(s, T) ds + q(x). \quad (1.3.5)$$

Продифференцируем второе условие (1.3.5)

$$A'(x) \int_0^x \varphi(s) ds + A(x) \varphi(x) = C'(x) \int_0^x u(s, T) ds +$$

$$+ C(x) u(x, T) + q'(x). \quad (1.3.6)$$

Используя функцию Римана [13, с.262]

$$R(x, t, s, \tau) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(a_2(s-x)(\tau-t))^p}{[\Gamma(p+1)]^2} \quad (1.3.7)$$

дифференциального уравнения

$$u_{xt}(x, t) + a_2 u(x, t) = 0,$$

интегро-дифференциальное уравнение (1.3.4) с условиями Гурса

$$u(0, t) = \psi,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (1.3.8)$$

приведем к уравнению

$$u(x, t) = \varphi(x) + (1 - R(x, t, 0, 0))\psi - \int_0^x R_s(x, t, s, 0) \varphi(s) ds -$$

$$- \int_0^t R_\tau(x, t, 0, \tau) \psi d\tau + \int_0^x \int_0^t R(x, t, s, \tau) [f(s, \tau) - a_1 \int_0^s u_\tau(\xi, \tau) d\xi -$$

$$- a_3 u(s, \tau) \int_0^s u(\xi, \tau) d\xi] d\tau ds. \quad (1.3.9)$$

Проинтегрируем (1.3.9) от 0 до x

$$\begin{aligned}
\int_0^x u(s, t) ds &= \int_0^x \varphi(s) ds + x\psi - \int_0^x R(s, t, 0, 0)\psi ds - \\
&- \int_0^x \int_s^x R_s(\xi, t, s, 0)\varphi(s) d\xi ds - \int_0^x \int_0^t R_\tau(s, t, 0, \tau)\psi d\tau ds + \\
&+ \int_0^x ds \int_s^x d\xi \int_0^t R(\xi, t, s, \tau)[f(s, \tau) - a_1 \int_0^s u_\tau(\eta, \tau) d\eta - \\
&- a_3 u(s, \tau) \int_0^s u(\eta, \tau) d\eta] d\tau.
\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Умножим обе стороны уравнения (1.3.9) на $C(x)$ и положим $t = T$. Тогда учитывая (1.3.6), (1.3.8) получим

$$\begin{aligned}
&[A(x) - C(x)]\varphi(x) + C(x) \int_0^x R_s(x, T, s, 0)\varphi(s) ds = q'(x) - \\
&- A'(x) \int_0^x \varphi(s) ds - C'(x) \int_0^x u(s, T) ds - C(x)(1 - R(x, T, 0, 0))\psi - \\
&- C(x) \int_0^T R_\tau(x, T, 0, \tau)\psi d\tau + C(x) \int_0^x \int_0^T R(x, T, s, \tau)[f(s, \tau) - \\
&- a_1 \int_0^s u_\tau(\eta, \tau) d\eta - a_3 u(s, \tau) \int_0^s u(\eta, \tau) d\eta] d\tau ds.
\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Далее, полагая $t = T$ в (1.3.10), подставим полученное выражение в (1.3.11)

$$\begin{aligned}
&[A(x) - C(x)]\varphi(x) + C(x) \int_0^x R_s(x, T, s, 0)\varphi(s) ds = q'(x) - A'(x) \times \\
&\times \int_0^x \varphi(s) ds + C'(x) \int_0^x \varphi(s) ds + C'(x)x\psi - C'(x) \int_0^x R(s, T, 0, 0)\psi ds - \\
&- C'(x) \int_0^x \int_s^x R_\xi(\xi, T, s, 0)\varphi(s) d\xi ds - C'(x) \int_0^x \int_0^T R_\tau(s, T, 0, \tau)\psi d\tau ds +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C'(x) \int_0^x \int_s^x \int_0^T R(\xi, T, s, \tau) [f(s, \tau) - a_1 \int_0^s u_\tau(\eta, \tau) d\eta - a_3 u(s, \tau) \times \\
& \times \int_0^s u(\eta, \tau) d\eta] d\tau d\xi ds + C(x) (1 - R(x, T, 0, 0)) \psi - \\
& - C(x) \int_0^T R_\tau(x, T, 0, \tau) \psi d\tau + C(x) \int_0^x \int_0^T R(x, T, s, \tau) [f(s, \tau) - \\
& - a_1 \int_0^s u_\tau(\eta, \tau) d\eta - a_3 u(s, \tau) \int_0^s u(\eta, \tau) d\eta] d\tau ds. \tag{1.3.12}
\end{aligned}$$

Продифференцируем (1.3.9) по t . Тогда

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) = & -R_t(x, t, 0, \tau) \psi - \int_0^x R_{st}(x, t, s, 0) \varphi(s) ds - \\
& - \int_0^t R_{\tau t}(x, t, 0, \tau) \psi d\tau + \int_0^x [f(s, t) - a_1 \int_0^s u_t(\xi, t) d\xi - \\
& - a_3 u(s, t) \int_0^s u(\xi, t) d\xi] ds + \int_0^x \int_0^t R_t(x, t, s, \tau) \times \\
& \times [f(s, \tau) - a_1 \int_0^s u_t(\xi, \tau) d\xi - a_3 u(s, \tau) \int_0^s u(\xi, \tau) d\xi] d\tau ds. \tag{1.3.13}
\end{aligned}$$

Производим подстановку

$$u(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t z(x, \tau) d\tau, \tag{1.3.14}$$

с учетом равенства $\psi = u(0, 0) = \varphi(0)$, уравнения (1.3.12) и (1.3.13) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
z(x, t) = & -R_t(x, t, 0, 0) \varphi(0) - \int_0^x R_{st}(x, t, s, 0) \varphi(s) ds - \\
& - \int_0^t R_{\tau t}(x, t, 0, \tau) \varphi(0) d\tau + \int_0^x [f(s, t) - a_1 \int_0^s z(\xi, t) d\xi -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_3[\varphi(s) + \int_0^t z(s, \tau) d\tau] \int_0^s [\varphi(\xi) + \int_0^t z(\xi, \tau) d\tau] d\xi] ds + \\
& + \int_0^x \int_0^t R_t(x, t, s, \tau) [f(s, \tau) - a_1 \int_0^s z(\xi, t) d\xi - a_3 [\varphi(s) + \\
& + \int_0^\tau z(s, \sigma) d\sigma] \int_0^s [\varphi(\xi) + \int_0^\tau z(\xi, \sigma) d\sigma] d\tau] ds.
\end{aligned}$$

Применяя подстановку (1.3.14), уравнение (1.3.12) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
p(x)\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s)ds &= \int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds + q'(x) + C'(x)x\varphi(0) - \\
& - C'(x) \int_0^x R(s, T, 0, 0) \varphi(0)ds - C'(x) \int_0^x \int_0^T R_\tau(s, T, 0, \tau) \varphi(0)d\tau ds + \\
& + C'(x) \int_0^x \int_s^x \int_0^T R(\xi, T, s, \tau) [f(s, \tau) - a_1 \int_0^s z(\eta, \tau) d\eta - a_3 [\varphi(s) + \\
& + \int_0^\tau z(s, \sigma) d\sigma] \int_0^s [\varphi(\eta) + \int_0^\tau z(\eta, \sigma) d\sigma] d\eta] d\tau d\xi ds + C(x) \times \\
& \times (1 - R(x, T, 0, 0))\varphi(0) - C(x) \int_0^T R_\tau(x, T, 0, \tau) \varphi(0) d\tau + \\
& + C(x) \int_0^x \int_0^T R(x, T, s, \tau) [f(s, \tau) - a_1 \int_0^s z(\eta, \tau) d\eta - \\
& - a_3 [\varphi(s) + \int_0^\tau z(s, \sigma) d\sigma] \int_0^s [\varphi(\eta) + \int_0^\tau z(\eta, \sigma) d\sigma] d\eta] d\tau ds, \\
\text{где } K(x, s) &= C(x)R_s(x, T, s, 0) - C'(x) \int_s^x R_\xi(\xi, T, s, 0) d\xi + A'(x) - \\
& - C'(x) - A'(s) + C'(s), \quad G(x) = A'(x) - C'(x).
\end{aligned}$$

Тогда для определения неизвестных функций получим систему

$$\begin{cases} z(x, t) \equiv (F[\varphi, z])(x, t), \\ p(x)\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s)ds \equiv (B[\varphi, z])(x) + m(x)\varphi(0), \end{cases} \quad (1.3.5)$$

$$\begin{aligned} \text{где } (F[\varphi, z])(x, t) = & -R_t(x, t, 0, 0)\varphi(0) - \int_0^x R_{st}(x, t, s, 0)\varphi(s)ds - \\ & - \int_0^t R_{\tau t}(x, t, 0, \tau)\psi d\tau + \int_0^x [f(s, t) - a_1 \int_0^s z(\xi, t)d\xi - a_3[\varphi(s) + \\ & + \int_0^t z(s, \tau)d\tau] \int_0^s [\varphi(\xi) + \int_0^t z(\xi, \tau)d\tau]d\xi]ds + \int_0^x \int_0^t R_t(x, t, s, \tau) \times \\ & \times [f(s, \tau) - a_1 \int_0^s z(\xi, t)d\xi - a_3[\varphi(s) + \int_0^\tau z(s, \sigma)d\sigma] \times \\ & \times \int_0^s [\varphi(\xi) + \int_0^\tau z(\xi, \sigma)d\sigma]]d\tau ds, \\ (B[\varphi, z])(x) = & \int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds + q'(x) + C'(x) \int_0^x \int_s^x \int_0^T R(\xi, T, s, \tau) \times \\ & \times [f(s, \tau) - a_1 \int_0^s z(\eta, \tau)d\eta - a_3[\varphi(s) + \int_0^\tau z(s, \sigma)d\sigma] \int_0^s [\varphi(\eta) + \\ & + \int_0^\tau z(\eta, \sigma)d\sigma]d\eta]d\tau d\xi ds + C(x) \int_0^x \int_0^T [f(s, \tau) - a_1 \int_0^s z(\eta, \tau)d\eta - \\ & - a_3[\varphi(s) + \int_0^\tau z(s, \sigma)d\sigma] \int_0^s [\varphi(\eta) + \int_0^\tau z(\eta, \sigma)d\sigma]]d\tau ds, \\ m(x) = & xC'(x) - C'(x) \int_0^x R(s, T, 0, 0)ds - C'(x) \int_0^x \int_0^T R_\tau(x, T, 0, \tau) d\tau ds + \\ & + C(x)(1 - R(x, T, 0, 0)) - C(x) \int_0^T R_\tau(x, T, 0, \tau)d\tau. \end{aligned}$$

Пусть ε малый параметр из интервала $(0,1)$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} z_\varepsilon(x, t) \equiv (F[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x, t), \\ (\varepsilon + p(x))\varphi_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s)\varphi_\varepsilon(s)ds \equiv (B[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x) + \\ + (\varepsilon + m(x))\varphi(0). \end{cases} \quad (1.3.16)$$

Перепишем второе уравнение системы (1.3.16), используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon+p(x)}\right)$, в следующем виде

$$\begin{cases} z_\varepsilon(x, t) \equiv (F[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x, t), \\ \varphi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times \\ \times [(B[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(s) - (B[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x)] ds + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \times \\ \times \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) [(B[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x) + (\varepsilon + m(x))\varphi(0)]. \end{cases} \quad (1.3.17)$$

Пусть

$$\bar{\varphi}_\varepsilon(x), \tilde{\varphi}_\varepsilon(x) \in \Omega_1 = \{\varphi(x) \in C^1[0, b] / |\varphi(x)| \leq r_1 = \text{const}\},$$

$$\bar{z}_\varepsilon(x, t), \tilde{z}_\varepsilon(x, t) \in \Omega_2 = \{z(x, t) \in C(D) / |z(x, t)| \leq r_2 = \text{const}\}.$$

Оценим разности:

$$\begin{aligned} |(F[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x, t) - (F[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x, t)| &\leq N_1 \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \\ + N_2 \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{где } N_1 &= \max_D \left[\int_0^x |R_{st}(x, t, s, 0)| ds + \int_0^t |R_{\tau t}(x, t, 0, \tau)| d\tau \right] + \\ + 2|a_3| \max_D \left\{ \int_0^x \int_0^t |R_t(x, t, s, \tau)| d\tau ds \right\} &b(r_1 + r_2 T) + 2|a_3| b^2(r_1 + r_2 T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 &= \max_D \left[\int_0^x \int_0^t |R_t(x, t, s, \tau)| d\tau ds \right] \left\{ b|a_1| + 2|a_3|b(r_1T + T^2) + |a_1| \frac{b^2}{2} + \right. \\
&\quad \left. + |a_3| \left\{ bT \left(\frac{b}{2} + T \right) + \frac{b^2}{2} T(1 + T) \right\} \right\}, \\
1) \quad &\left| \int_0^x K(x, \xi) [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi - \int_0^s K(s, \xi) [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi \right| \leq \\
&\leq \int_0^s |K(x, \xi) - K(s, \xi)| |\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)| d\xi + \int_s^x |K(x, \xi) - K(\xi, \xi)| \times \\
&\quad \times |\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)| d\xi \leq (x - s) L_K b \| \bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x) \|_{C[0, b]}, \\
2) \quad &\left| C'(s) \int_0^s \int_\xi^s d\mu \int_0^T R(\mu, T, \xi, \tau) \left\{ a_1 \int_0^\xi (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \tau)) d\eta + \right. \right. \\
&\quad \left. + a_3 [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \sigma) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \sigma)) d\sigma] \int_0^\xi [\bar{\varphi}_\varepsilon(\eta) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\eta) + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \sigma) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \sigma)) d\sigma] d\eta \right\} d\tau ds - C'(x) \int_0^x \int_\xi^x d\mu \int_0^T R(\mu, T, \xi, \tau) \times \\
&\quad \times \left\{ a_1 \int_0^\xi (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \tau)) d\eta + a_3 [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \sigma) - \right. \\
&\quad \left. - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \sigma)) d\sigma] \int_0^\xi [\bar{\varphi}_\varepsilon(\eta) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\eta) + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \sigma) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \sigma)) d\sigma] d\eta \right\} d\tau ds \Big| = \\
&= \left| [C'(s) - C'(x)] \int_0^s \int_\xi^s d\mu \int_0^T R(\mu, T, \xi, \tau) \left\{ a_1 \int_0^\xi (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \tau)) d\eta + \right. \right. \\
&\quad \left. + a_3 [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \sigma) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \sigma)) d\sigma] \int_0^\xi [\bar{\varphi}_\varepsilon(\eta) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\eta) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \sigma) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \sigma)) d\sigma] d\eta \Big\} d\tau ds - C'(x) \int_s^x \int_\xi^x d\mu \int_0^T R(\mu, T, \xi, \tau) \times \\
& \times \left\{ a_1 \int_0^\xi (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \tau)) d\eta + a_3 [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \sigma) - \right. \\
& \left. - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \sigma)) d\sigma] \int_0^\xi [\bar{\varphi}_\varepsilon(\eta) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\eta) + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \sigma) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \sigma)) d\sigma] d\eta \Big\} d\tau ds \Big| \leq \\
& \leq (x-s) \|C''(x)\|_{C[0,b]} b \int_0^s \int_0^T |R(\mu, T, \xi, \tau)| d\tau d\xi \{ |a_1| b \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \\
& - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + |a_3| [\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + Tb \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \\
& - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}] [\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + T \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}] \} + \\
& + (x-s) \|C'(x)\|_{C[0,b]} \int_\xi^x \int_0^{t_0} |R(\mu, t_0, \xi, \tau)| d\tau d\mu \{ |a_1| b \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \\
& - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + |a_3| [\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}] \times \\
& \times Tb [\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + T \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}] \} \leq \\
& \leq (x-s) [\|C''(x)\|_{C[0,b]} + \|C'(x)\|_{C[0,b]}] \int_0^x \int_0^{t_0} |R(\mu, t_0, \xi, \tau)| d\tau d\mu \times \\
& \times \{ (|a_3| + b) \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + [(|a_3| + b)T + |a_1|b] \times \\
& \times \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} \} \leq (x-s) N_3 [\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \\
& + \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}], \quad N_3 = (\|C'(x)\|_{C[0,b]} + \|C''(x)\|_{C[0,b]}) N_5, \\
& N_5 = \max_D \left\{ \int_0^x \int_0^t |R(\mu, t_0, x, \tau)| d\tau d\mu \right\} \{ (|a_3| + b), (|a_3| + b)T + |a_1|b \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) & \left| C(s) \int_0^s \int_0^T \left\{ a_1 \int_0^\xi [\bar{z}_\varepsilon(\eta, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \tau)] d\eta + a_3 [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \right. \right. \\
& + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\xi, \sigma) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \sigma)) d\sigma \left. \int_0^\xi [\bar{\varphi}_\varepsilon(\eta) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\eta) + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\xi, \sigma) - \right. \\
& - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \sigma)) d\sigma \left. \right\} d\tau d\xi - C(x) \int_0^x \int_0^T \left\{ a_1 \int_0^\xi [\bar{z}_\varepsilon(\eta, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \tau)] d\eta + \right. \\
& + a_3 [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\xi, \sigma) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \sigma)) d\sigma \left. \int_0^\xi [\bar{\varphi}_\varepsilon(\eta) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\eta) + \right. \\
& + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\xi, \sigma) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \sigma)) d\sigma \left. \right\} d\tau d\xi \Big| = |[C(s) - C(x)] \times \\
& \times \int_0^s \int_0^T \left\{ a_1 \int_0^\xi (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \tau)) d\eta + a_3 [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \right. \\
& + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\xi, \sigma) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \sigma)) d\sigma \left. \int_0^\xi [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\xi, \sigma) - \right. \\
& - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \sigma)) d\sigma \left. \right\} d\tau d\xi - C(x) \int_s^x \int_0^T \left\{ a_1 \int_0^\xi (\bar{z}_\varepsilon(\eta, \tau) - \tilde{z}_\varepsilon(\eta, \tau)) d\eta + \right. \\
& + a_3 [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) + \int_0^\tau (\bar{z}_\varepsilon(\xi, \sigma) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \sigma)) d\sigma \left. \int_0^\xi [\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] + \right. \\
& + \int_0^\xi (\bar{z}_\varepsilon(\xi, \sigma) - \tilde{z}_\varepsilon(\xi, \sigma)) d\sigma \left. \right\} d\tau d\xi \Big| \leq (x - s) \|C'(x)\|_{C[0,b]} bT \times \\
& \times \{ |a_1| b \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + |a_3| [\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \\
& + T \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}] b [\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +T\|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}]\} + (x - s)\|C(x)\|_{C[0, b]}T\{|a_1|b \times \\
& \times \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)} + |a_3|[\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \\
& +T\|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}]b[\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \\
& +T\|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}]\} \leq (x - s)[\|C'(x)\|_{C[0, b]} + \|C(x)\|_{C[0, b]}] \times \\
& \times (1 + b)T\{(|a_3| + b)\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + [|a_1|b + (|a_3| + b)T] \times \\
& \times \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}\} \leq (x - s)N_4[\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \\
& +\|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}],
\end{aligned}$$

$$N_4 = (\|C(x)\|_{C[0, b]} + \|C'(x)\|_{C[0, b]})(N_6 + 2|a_3|\{(1 + T)(r_1 + Tr_2)b\}),$$

$$\begin{aligned}
N_6 = \max\{(1 + b)T(|a_3| + b), (1 + b)T[|a_1|b + (|a_3| + b)T]\} + \\
+ 2|a_3|\{(1 + T)(r_1 + Tr_2)b\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |(B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(s) - (B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x) - (B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(s) - (B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x)| \leq \\
& \leq (x - s)(N_3 + N_4)[\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}].
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
& |(B[\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{z}_\varepsilon])(x) - (B[\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon])(x)| \leq x(N_7 + N_8)\{\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0, b]} + \\
& +\|\bar{z}_\varepsilon(x, t) - \tilde{z}_\varepsilon(x, t)\|_{C(D)}\},
\end{aligned}$$

$$N_7 = 2\|C'(x)\|_{C[0, b]}N_5 + L_K b, \quad N_8 = \|C(x)\|_{C[0, b]}N_6 + L_K b.$$

Из (1.3.17) учитывая выше полученные оценки имеем

$$|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)| = \left[\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times (x-s)(N_3 - N_4)ds + \frac{x}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) (N_7 + N_8) \Bigg] \times \\
& \times [\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \|\bar{z}_\varepsilon(x,t) - \tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}] \leq \\
& \leq [d_1^{-1}(N_3 + N_4) + e^{-1}(N_7 + N_8)][\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \\
& + \|\bar{z}_\varepsilon(x,t) - \tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \|\bar{z}_\varepsilon(x,t) - \tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)} \leq \\
& \leq q[\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \|\bar{z}_\varepsilon(x,t) - \tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}], \quad (1.3.18)
\end{aligned}$$

$$q = N_1 + N_2 + d_1^{-1}(N_3 + N_4) + e^{-1}(N_7 + N_8).$$

Если $q < 1$, то можно показать [73, с.392] существования единственного решения системы (1.3.17) в паре (Ω_1, Ω_2) .

Теорема 1.3.1. Пусть имеет место условие а), тогда, если $q < 1$, то решение системы (1.3.16) равномерно сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению системы (1.3.15), причем имеет место оценка

$$\|\bar{z}_\varepsilon(x,t) - \tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)} + \|\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} \leq N_9 \varepsilon,$$

$$0 < N_9 = \text{const}.$$

Доказательство. С помощью подстановки

$$\theta_\varepsilon(x,t) = z_\varepsilon(x,t) - z(x,t), \quad \vartheta_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x),$$

из (1.3.17) получим

$$\theta_\varepsilon(x,t) = (F[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x,t) - (F[\varphi, z])(x,t),$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_\varepsilon(x) = & -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} [(B[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(s) - \\
& - (B[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x) - (B[\varphi, z])(s) + (B[\varphi, z])(x)] ds + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \times \\
& \times \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \{[(B[\varphi_\varepsilon, z_\varepsilon])(x) - (B[\varphi, z])(x)] ds + \\
& + \varepsilon(H_\varepsilon \varphi)(x),
\end{aligned}$$

где

$$(H_\varepsilon \varphi)(x) \equiv \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp \left(- \int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{\varphi(x) - \varphi(s)}{\varepsilon + p(s)} ds -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp \left(- \int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) [\varphi(x) - \varphi(0)].$$

Используя (1.3.18) получим

$$\|\vartheta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \|\theta_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)} \leq q(\|\vartheta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \|\theta_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}) +$$

$$+ \|\varepsilon(H_\varepsilon \varphi)(x)\|_{C[0,b]} \text{ или при } q < 1, \|\vartheta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \|\theta_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)} \leq$$

$$\leq (1 - q)^{-1} \|(H_\varepsilon \varphi)(x)\|_{C[0,b]}, \text{ откуда в силу оценки леммы}$$

$$1.1.1: \|\varepsilon(H_\varepsilon \varphi)(x)\|_{C[0,b]} \leq N_{10}\varepsilon, 0 < N_{10} = const, \text{ следует утверждение}$$

$$\text{теоремы 1.3.1.}$$

Теорема 1.3.1 доказано.

Регуляризованное решение задачи (1.3.1), (1.3.2) определим по правилу

$$w_\varepsilon(x,t) = \int_0^x u_\varepsilon(s,t) ds,$$

$$u_\varepsilon(x,t) = \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t z_\varepsilon(x,\tau) d\tau.$$

Причем, при выполнении условия теоремы 1.3.1 имеет место оценка

$$\|w_\varepsilon(x,t) - w(x,t)\|_{C(D)} \leq (1 - q)^{-1} b(1 + T) \|\varepsilon(H_\varepsilon \varphi)(x)\|_{C[0,b]}.$$

Так как

$$1) w(x,t) = \int_0^x u(s,t) ds = \int_0^x \left(\varphi(s) + \int_0^t z(s,\tau) d\tau \right) ds,$$

$$w_\varepsilon(x,t) = \int_0^x u_\varepsilon(s,t) ds = \int_0^x \left(\varphi_\varepsilon(s) + \int_0^t z_\varepsilon(s,\tau) d\tau \right) ds,$$

то

$$|w_\varepsilon(x,t) - w(x,t)| \leq b \|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0,b]} +$$

$$+bT\|z_\varepsilon(x, t) - z(x, t)\|_{C(D)} \rightarrow 0, \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$2) \ w_x(x, t) = u(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t z(x, \tau) d\tau,$$

$$w_{\varepsilon x}(x, t) = u_\varepsilon(x, t) = \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t z_\varepsilon(x, \tau) d\tau,$$

$$|w_{\varepsilon x}(x, t) - w_x(x, t)| \leq b\|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0, b]} +$$

$$+T\|z_\varepsilon(x, t) - z(x, t)\|_{C(D)} \rightarrow 0, \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$3) \ w_t(x, t) = \int_0^x u_t(s, t) d\tau = \int_0^x z(s, \tau) ds, \quad u_t(x, t) = z(x, t),$$

$$w_{t\varepsilon}(x, t) = \int_0^x z_\varepsilon(s, t) ds,$$

$$|w_{t\varepsilon}(x, t) - w_t(x, t)| \leq b\|z_\varepsilon(x, t) - z(x, t)\|_{C(D)} \leq$$

$$\leq b(\|z_\varepsilon(x, t) - z(x, t)\|_{C(D)} + \|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0, b]}) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$4) \ w_{xxt}(x, t) = z_x(x, t), \quad w_{xxt\varepsilon}(x, t) = z_{x\varepsilon}(x, t),$$

$$z_x(x, t) = -R_{tx}(x, t, 0, 0)\varphi(0) - R_{st}(x, t, x, 0)\varphi(x) -$$

$$- \int_0^x R_{stx}(x, t, s, 0) \varphi(s) ds - \int_0^t R_{\tau tx}(x, t, 0, 0) \varphi(0) d\tau -$$

$$- \int_0^x \int_0^t R_{tx}(x, t, s, \tau) [f(s, \tau) - a_1 \int_0^s z(\xi, t) d\xi - a_3 [\varphi(s) +$$

$$+ \int_0^\tau z(s, \sigma) d\sigma] \int_0^s [\varphi(s) + \int_0^\tau z(s, \sigma) d\sigma] d\tau ds + \int_0^t R_t(x, t, x, \tau) \times$$

$$\times [f(x, \tau) - a_1 \int_0^x z(\xi, t) d\xi - a_3 [\varphi(x) + \int_0^\tau z(x, \sigma) d\sigma] \int_0^x [\varphi(\xi) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\tau z(x, \sigma) d\sigma \int_0^x [\varphi(\xi) + \int_0^\tau z(\xi, \sigma) d\sigma] d\tau + [f(x, t) - a_1 \int_0^x z(s, t) ds - \\
& - a_3 [\varphi(x) + \int_0^t z(x, \tau) d\tau] \int_0^x [\varphi(s) + \int_0^t z(s, \tau) d\tau] ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{\varepsilon x}(x, t) = & -R_{tx}(x, t, 0, 0)\varphi_\varepsilon(0) - R_{st}(x, t, x, 0)\varphi_\varepsilon(x) - \\
& - \int_0^x R_{stx}(x, t, s, 0)\varphi_\varepsilon(s) ds - \int_0^t R_{\tau tx}(x, t, 0, 0)\varphi_\varepsilon(0) d\tau - \\
& - \int_0^x \int_0^t R_{tx}(x, t, s, \tau) [f(s, \tau) - a_1 \int_0^s z_\varepsilon(\xi, t) d\xi - a_3 [\varphi_\varepsilon(s) + \\
& + \int_0^\tau z_\varepsilon(s, \sigma) d\sigma] \int_0^s [\varphi(s) + \int_0^\tau z_\varepsilon(s, \sigma) d\sigma] d\tau ds + \int_0^t R_t(x, t, x, \tau) \times \\
& \times [f(x, \tau) - a_1 \int_0^x z_\varepsilon(\xi, t) d\xi - a_3 [\varphi_\varepsilon(x) + \int_0^\tau z_\varepsilon(x, \sigma) d\sigma] \int_0^x [\varphi_\varepsilon(\xi) + \\
& + \int_0^\tau z_\varepsilon(\xi, \sigma) d\sigma] d\tau + [f(x, t) - a_1 \int_0^x z_\varepsilon(s, t) ds - a_3 [\varphi_\varepsilon(x) + \\
& + \int_0^t z_\varepsilon(x, \tau) d\tau] \int_0^x [\varphi_\varepsilon(s) + \int_0^t z_\varepsilon(s, \tau) d\tau] ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|z_{\varepsilon x}(x, t) - z_x(x, t)| & \leq \bar{N} \|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0, b]} + \\
& + \tilde{N} \|z_\varepsilon(x, t) - z(x, t)\|_{C(D)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|w_{xxt\varepsilon}(x, t) - w_{xxt}(x, t)| & \leq |z_{x\varepsilon}(x, t) - z_t(x, t)| \leq \\
& \leq \bar{N} \|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0, b]} + \tilde{N} \|z_\varepsilon(x, t) - z(x, t)\|_{C(D)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1.3.1 функции $w_\varepsilon(x, t)$, $w_{t\varepsilon}(x, t)$, $w_{xxt\varepsilon}(x, t)$ равномерно сходятся, соответственно, к функциям $w(x, t)$, $w_t(x, t)$, $w_{xxt}(x, t)$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

1.4. Регуляризация интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

В этом параграфе метод регуляризации, изложенный в предыдущих параграфах распространяется для линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с неубывающей коэффициентной функцией вне интеграла и непрерывным ядром, который на диагонали обращается в нуль в некоторых точках отрезка.

1.4.1. Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds = g(x), \quad (1.4.1)$$

где известные функции $p(x)$, $K(x,s)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям:

a) $K(x,s) \in C(D_1)$, $D_1 = \{(x,s)/0 \leq s \leq x \leq b\}$, $K(x,x) \geq 0$, $K(x,s)$

является липшицевой по x ;

б) $p(x)$, $g(x) \in C[0,b]$, $p(0) = g(0) = 0$, $C_0 p(x) + K(x,x) \geq d_1 > 0$,
 $p(x)$ – неубывающая функция, $p(x) > 0$, $\forall x \in (0,b]$.

Действуем оператором $I + C_0 J$, где I – единичный оператор, J – оператор Вольтерра $(J\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(s)ds$. Тогда из (1.4.1) получим уравнение

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s)ds = \int_0^x L(x,s)\varphi(s)ds + \mu(x), \quad (1.4.2)$$

где $G(x) = C_0 p(x) + K(x,x)$, $L(x,s) = K(s,s) - K(x,s) -$

$-C_0 \int_s^x K(v,s)dv$, $\mu(x) = g(x) + C_0 \int_0^x g(s)ds$, $0 < C_0 = \text{const}$.

Уравнение (1.4.2) является интегральным уравнением Вольтерра третьего рода и эквивалентно [43, с.23] исходному уравнению (1.4.1).

Изучим вопросы регуляризации уравнения (1.4.2). Пусть ε – малый параметр из интервала $(0,1)$. Рассмотрим уравнение вида

$$\begin{aligned} (\varepsilon + p(x))\varphi_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s)\varphi_\varepsilon(s)ds &= \int_0^x L(x,s)\varphi_\varepsilon(s)ds + \\ &+ \mu(x) + \varepsilon\varphi_\delta(0), \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

где величина $\varphi_\delta(0)$, такая что

$$|\varphi_\delta - \varphi(0)| \leq \delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.4.4)$$

Уравнение (1.4.3) представим, используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon + p(x)}\right)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x) = & -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times \\ & \times \left\{ \int_0^s L(s, \xi) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi - \int_0^x L(x, \xi) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi + \mu(x) - \mu(s) \right\} ds + \\ & + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \left\{ \int_0^x L(x, \xi) \varphi_\varepsilon(s) ds + \mu(x) + \varepsilon \varphi_\delta(0) \right\}. \end{aligned}$$

Через H_ε обозначим оператор, имеющий вид

$$\begin{aligned} (H_\varepsilon \varphi)(x) \equiv & \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} [\varphi(x) - \\ & - \varphi(s)] ds - \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) [\varphi(x) - \varphi(0)]. \quad (1.4.5) \end{aligned}$$

Имеет место следующая лемма [6].

Лемма 1.4.1. Если $\varphi(x) \in C^\gamma[0, b]$, $0 < \gamma \leq 1$ и выполняются условия *a-b*, то для оператора $\varepsilon(H_\varepsilon \varphi)(x)$ справедлива оценка

$$\|\varepsilon(H_\varepsilon \varphi)(x)\|_C \leq d_1^{-\gamma} d_0 (d_3 + d_4) \varepsilon^\gamma, \quad (1.4.6)$$

где $0 < d_0 = \text{const}$, $d_3 = \int_0^\infty \sigma^\gamma e^{-\sigma} d\sigma$, $d_4 = \sup_{\sigma \geq 0} (\sigma^\gamma e^{-\sigma})$.

Теорема 1.4.1. Пусть выполняются условия *a-b* и уравнение (1.4.2) имеет решение $\varphi(x) \in C^\gamma[0, b]$, $0 < \gamma \leq 1$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$, решение уравнение (1.4.3) равномерно сходится к решению уравнения (1.4.2). Причем имеет место оценка

$$\|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0, b]} \leq d_6 [d_5 \varepsilon^\gamma + \delta(\varepsilon)],$$

$$d_5 = d_1^{-(1+\gamma)} d_0 (d_3 + d_4), \quad d_6 = \exp(d_1^{-1} (2 + e^{-1}) (L_K + C_0 K_1) b),$$

$0 < L_K$ – коэффициент Липшица функции $K(x, s)$ по переменной x ,
 $K_1 = \max_{D_1} |K(x, s)|$, $D_1 = \{(x, s) / 0 \leq s \leq x \leq b\}$.

Доказательство. Используя подстановку

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) + \eta_\varepsilon(x), \quad (1.4.7)$$

из (1.4.3) получим уравнение

$$(\varepsilon + p(x))\eta_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s)\eta_\varepsilon(s)ds = \int_0^x L(x, s)\eta_\varepsilon(s)ds - \\ - \varepsilon\varphi(x) + \varepsilon\varphi_\delta(0). \quad (1.4.8)$$

Перепишем уравнение (1.4.8), используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon + p(x)}\right)$, в следующем виде

$$\eta_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times \\ \times \left\{ \int_0^s L(s, \xi)\eta_\varepsilon(\xi)d\xi - \int_0^x L(x, \xi)\eta_\varepsilon(\xi)d\xi \right\} ds + \\ + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \int_0^x L(x, s)\eta_\varepsilon(s)ds - \\ - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) (\varphi_\delta - \varphi(0)) + \varepsilon(H_\varepsilon\varphi)(x). \quad (1.4.9)$$

Так как

$$\left| \int_0^s L(s, \xi)\eta(\xi)d\xi - \int_0^x L(x, \xi)\eta(\xi)d\xi \right| \leq 2(L_K + C_0K_1)(x - s) \int_0^x |\eta(\xi)|d\xi,$$

то из (1.4.9) получим

$$|\eta_\varepsilon(x)| \leq d_1^{-1}(2 + e^{-1})(L_K + C_0K_1) \int_0^x |\eta_\varepsilon(\xi)|d\xi + \\ + \|\varepsilon(H_\varepsilon\varphi)(x)\|_{C[0, b]} + \delta(\varepsilon).$$

В силу неравенства Гронуолло-Беллмана [20, с.108] имеем

$$|\eta_\varepsilon(x)| \leq \left[d_1^{-(1+\gamma)} d_0 (d_3 + d_4) \varepsilon^\gamma + \delta(\varepsilon) \right] d_6.$$

Теорема доказано.

Теорема 1.4.2. Пусть выполняются условия *a-б* и уравнение (1.4.1) имеет решение $\varphi(x) \in C[0, b]$. Тогда, при $\varepsilon \rightarrow 0$, решение уравнения (1.4.4) равномерно сходится к решению уравнения (1.4.1) и

$$\|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0, b]} \leq \left[4e^{-1} \|\varphi(x)\|_{C[0, b]} d_1^{-1} \varepsilon^{1-\beta} + \omega_\varphi(\varepsilon^\beta) + \delta(\varepsilon) \right] d_6,$$

где $d_6 = \exp(d_1^{-1}(2 + e^{-1})(L_K + C_0 K_1)b)$,

$$\omega_\varphi(\varepsilon^\beta) = \sup_{|x-v| \leq \varepsilon^\beta} |\varphi(x) - \varphi(v)|, \quad x, v \in [0, b].$$

Доказательство теоремы 1.4.2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.4.1, используя оценку [6]:

$$\|\varepsilon(H_\varepsilon \varphi)(x)\|_{C[0, b]} \leq 4e^{-1} \|\varphi(x)\|_{C[0, b]} d_1^{-1} \varepsilon^{1-\beta} + \omega_\varphi(\varepsilon^\beta),$$

где $\omega_\varphi(\varepsilon^\beta) = \sup_{|x-v| \leq \varepsilon^\beta} |\varphi(x) - \varphi(v)|, \quad x, v \in [0, b]$.

1.4.2. Пусть для известных непрерывных функций $p(x), K(x, s), g(x)$, выполняются условия *a-б* для заданной функции $N(x, s, \varphi)$ имеет место условие

$$\text{в) } N(x, s, \varphi) \in C^{1,0,0}(D \times R^1), \quad N(x, x, \varphi) = 0, \quad |N(x, s, \varphi) - \\ - N(x, s, \varphi_0) - N(v, s, \varphi) + N(v, s, \varphi_0)| \leq L_N(x - v)|\varphi - \varphi_0|,$$

$$0 \leq s \leq v \leq x \leq b, \quad 0 < L_N = \text{const}, \quad x \geq v.$$

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x N_0(x, s, \varphi(s))ds = g(x), \quad (1.4.10)$$

где $N_0(x, s, \varphi(s)) \equiv K(x, s)\varphi(s) + N(x, s, \varphi(s))$.

Уравнение (1.4.10) эквивалентно уравнению

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s)ds = \int_0^x M(x, s, \varphi(s))ds + \mu(x), \quad (1.4.11)$$

где $G(x) = C_0 p(x) + K(x, x)$, $\mu(x) = g(x) + C_0 \int_0^x g(s)ds$,

$$\begin{aligned} M(x, s, \varphi(s)) = & -C_0 \int_s^x N(v, s, \varphi(s))dv - N(x, s, \varphi(s)) + \\ & + [[K(s, s) - K(x, s)] - C_0 \int_s^x K(v, s)dv]\varphi(s). \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} (\varepsilon + p(x))\varphi_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s)\varphi_\varepsilon(s)ds = & \int_0^x M(x, s, \varphi_\varepsilon(s))ds + \\ & + \varepsilon\varphi_\delta(0) + \mu(x), \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

величина $\varphi_\delta(0)$ такая, что имеет место (1.4.4).

Уравнение (1.4.13), используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon+p(x)}\right)$, приведем к виду

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x) = & -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times \\ & \times \left\{ \int_0^s M(s, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi))d\xi - \int_0^x M(x, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi))d\xi + \mu(s) - \mu(x) \right\} ds + \\ & + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \left\{ \int_0^x M(x, s, \varphi_\varepsilon(s))ds + \mu(x) + \right. \\ & \left. + \varepsilon\varphi_\delta(0) \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 1.4.3. Пусть выполняются условия *a-в* и уравнение (1.4.10) имеет решение $\varphi(x) \in C^\gamma[0, b]$, $0 < \gamma \leq 1$. Тогда, при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение уравнения (1.4.13) равномерно сходится к решению уравнения (1.4.11), причем

$$\|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0,b]} \leq d_1^{-(1+\gamma)} d_0(d_3 + d_4)\varepsilon^\gamma d_7 + \delta(\varepsilon)d_7,$$

$$d_7 = \exp(K_2 d_1^{-1}(2 + e^{-1})), \quad K_2 = 2[(L_K + C_0 K_0) + L_N(1 + bC_0)],$$

$0 < d_0 = \text{const}$, d_3, d_4 — определены в пункте 1.4.1.

Доказательство. Используя подстановку

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) + \eta_\varepsilon(x), \quad (1.4.14)$$

из (1.4.13) получим уравнение

$$\begin{aligned} (\varepsilon + p(x))\eta_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s)\eta_\varepsilon(s)ds = \int_0^x [M(x, s, \varphi_\varepsilon(s)) - \\ - M(x, s, \varphi(s))]ds - \varepsilon(\varphi(x) - \varphi_\delta(0)). \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon+p(x)}\right)$ уравнение (1.4.15) приведем к виду

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times \\ \times \left\{ \int_0^s [M(s, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) - M(s, \xi, \varphi(\xi))]d\xi - \int_0^x [M(x, s, \varphi_\varepsilon(s)) - \right. \\ \left. - M(x, s, \varphi(s))]d\xi \right\} ds + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \times \\ \times \left\{ \varphi_\delta(0) - \varphi(0) + \int_0^x [M(x, s, \varphi_\varepsilon(s)) - M(x, s, \varphi(s))]ds \right\} + \\ + \varepsilon(H_\varepsilon \varphi)(x). \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Из (1.2.12) при условий *a-v* получим оценки

$$\begin{aligned} 1) \left| \int_0^x [N(x, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) - N(x, \xi, \varphi(\xi))]d\xi - \int_0^s [N(s, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) + \right. \\ \left. + N(s, \xi, \varphi(\xi))]d\xi \right| = \left| \int_0^s [N(x, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) - N(x, \xi, \varphi(\xi)) - N(s, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) + \right. \\ \left. + N(s, \xi, \varphi(\xi))]d\xi \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + N(s, \xi, \varphi(\xi))] d\xi + \int_s^x [N(x, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) - N(x, \xi, \varphi(\xi))] d\xi \Big| \leq \\
& \leq L_N(x-s) \int_0^s |\varphi_\varepsilon(\xi) - \varphi(\xi)| d\xi + \left| \int_s^x [N(x, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) - \right. \\
& \left. - N(x, \xi, \varphi(\xi)) - N(\xi, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) + N(\xi, \xi, \varphi(\xi))] d\xi \right| \leq \\
& \leq L_N(x-s) \int_0^s |\varphi_\varepsilon(\xi) - \varphi(\xi)| d\xi + L_N(x-\xi) \int_s^x (x-\xi) \times \\
& \times |\varphi_\varepsilon(\xi) - \varphi(\xi)| d\xi \leq 2L_N(x-s) \int_0^s |\eta_\varepsilon(\xi)| d\xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) & \left| C_0 \int_0^x \int_\xi^x [N(v, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) - N(v, \xi, \varphi(\xi))] dv d\xi - \right. \\
& \left. - C_0 \int_0^s \int_\xi^s [N(v, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) - N(v, \xi, \varphi(\xi))] dv d\xi \right| = \\
& = \left| C_0 \int_0^s \int_\xi^x [N(v, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) - N(v, \xi, \varphi(\xi))] dv d\xi + \right. \\
& + C_0 \int_s^x \int_\xi^x [N(v, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) - N(v, \xi, \varphi(\xi))] dv d\xi - \\
& \left. - C_0 \int_0^s \int_\xi^s [N(v, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) - N(v, \xi, \varphi(\xi))] dv d\xi \right| = \\
& = \left| C_0 \int_0^s \int_s^x [N(v, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) - N(v, \xi, \varphi(\xi))] dv d\xi + \right. \\
& + C_0 \int_s^x \int_s^x [N(v, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) + N(v, \xi, \varphi(\xi))] dv d\xi \Big| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_0 \int_0^s \int_s^x |N(v, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) - N(v, \xi, \varphi(\xi)) - N(\xi, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) + \\
&+ N(\xi, \xi, \varphi(\xi))| dv d\xi + C_0 \int_s^x \int_\xi^x |N(v, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) + N(v, \xi, \varphi(\xi)) - \\
&- N(\xi, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) + N(\xi, \xi, \varphi(\xi))| dv d\xi \leq C_0 L_N \int_0^s \int_s^x (v - \xi) \times \\
&\times |\varphi_\varepsilon(\xi) - \varphi(\xi)| dv d\xi + C_0 L_N \int_s^x \int_\xi^x (v - \xi) |\varphi_\varepsilon(\xi) - \varphi(\xi)| dv d\xi \leq \\
&\leq 2C_0 b L_N (x - s) \int_0^x |\eta_\varepsilon(\xi)| d\xi.
\end{aligned}$$

Учитывая данные оценки, из (1.4.16) получим

$$|\eta_\varepsilon(x)| \leq d_1^{-1}(2 + e^{-1})K_2 \int_0^x |\eta_\varepsilon(s)| ds + |\varepsilon(H_\varepsilon \varphi)(x)| + \delta(\varepsilon).$$

Тогда в силу неравенства Гронуолло-Беллмана и леммы 1.4.1 имеем

$$|\eta_\varepsilon(x)| \leq \left(d_1^{-(1+\gamma)} d_0 (d_3 + d_4) \varepsilon^\gamma + \delta(\varepsilon) \right) \exp(d_1^{-1}(2 + e^{-1})K_2).$$

Теорема 1.4.3 доказано.

Теорема 1.4.4. Пусть выполняются условия *a-b* и уравнение (1.4.10) имеет решение $\varphi(x) \in C[0, b]$. Тогда, при $\varepsilon \rightarrow 0$, решение уравнения (1.4.15) равномерно сходится к решению уравнения (1.4.11) и

$$\|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0, b]} \leq [4e^{-1}\|\varphi(x)\|_{C[0, b]} d_1^{-1} \varepsilon^{1-\beta} + \omega_\varphi(\varepsilon^\beta) + \delta(\varepsilon)] d_5,$$

где $d_5 = \exp(K_3 d_1^{-1}(2 + e^{-1}))$, $\omega_\varphi(\varepsilon^\beta) = \sup_{|x-v| \leq \varepsilon^\beta} |\varphi(x) - \varphi(v)|$,

$x, v \in [0, b]$.

ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

В этой главе рассматриваются вопросы численного решения нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений Вольтера третьего рода.

2.1. Разностная схема для линейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями

Из уравнения (1.1.1) при $f(x, t, w(x, t), w_t(x, t)) \equiv f(x, t)$ получим уравнения

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t \partial x} = P(x, t)w(x, t) + f(x, t), \quad (2.1.1)$$

с условиями

$$w(0, t) = \sigma(t) + \varphi_0, \quad (2.1.2)$$

$$A(x)w(x, 0) + C(x)w(x, T) = q(x). \quad (2.1.3)$$

Известные функции удовлетворяют условиям:

а) $A(x), C(x) \in C^2[0, b]$, $q(x) \in C^1[0, b]$, $p(x) = A(x) + C(x)$ – неубывающая функция, $p(0) = 0$, $p(x) > 0$, $\forall x \in (0, b]$;

б) $P(x, t), f(x, t) \in C^{1,0}(D)$, $\sigma(t) \in C^1[0, T]$, $\sigma(0) = 0$, $C(0)\sigma(T) = q(0)$,
 $D = [0, b] \times [0, T]$, φ_0 – неизвестный параметр;

в) $G(x) \equiv C_0 p(x) + K(x, x) \geq d_1 > 0$, $d_1 = \text{const}$, $K(x, s) \equiv C(x)P_0(s)$,

$$P_0(s) = \int_0^T P(s, \tau) d\tau, 0 \leq s \leq x, D_1 = \{(x, s) / 0 \leq s \leq x \leq b\}.$$

В разделе 1.1 показано, что задача (2.1.1)–(2.1.3) сводится к системе интегральных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t z(x, y) dy, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \\ z(x, t) = \sigma_0(t) + \int_0^x P(s, t) \varphi(s) ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t z(s, y) dy ds + \\ + \int_0^x f(s, t) ds, \\ p(x) \varphi(x) + \int_0^x G(s) \varphi(s) ds = \int_0^x [K(s, s) - K(x, s)] \varphi(s) ds - \\ - C_0 \int_0^x \int_s^x K(v, s) dv \varphi(s) ds - \int_0^x K(s, s) (1 + C_0(x - s)) \times \\ \times \int_0^T z(s, y) dy ds + Q(x), \end{array} \right. \quad (2.1.4)$$

$$\text{где } Q(x) = \int_0^x \int_0^T C(s) f(s, t) dt ds + C_0 \int_0^x (x - s) \int_0^T C(s) f(s, t) dt ds - g(x),$$

$$\sigma_0 = \sigma'(t), \quad g(x) = q(x) + C_0 \int_0^x q(s) ds.$$

Регуляризация систем интегральных уравнений (2.1.4) построена в следующем виде

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x, t) &= \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t z_\varepsilon(x, y) dy, \\ z_\varepsilon(x, t) &= \sigma_0(t) + \int_0^x P(s, t) \varphi_\varepsilon(s) ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t z_\varepsilon(s, y) dy ds + \\ &+ \int_0^x f(s, t) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon + p(x))\varphi_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s)\varphi_\varepsilon(s)ds = \int_0^x [K(s, s) - K(x, s)]\varphi_\varepsilon(s)ds - \\
& - C_0 \int_0^x \int_s^x K(v, s) dv \varphi_\varepsilon(s)ds - \int_0^x K(s, s)(1 + C_0(x - s)) \times \\
& \times \int_0^T z_\varepsilon(s, y)dyds + \varepsilon\varphi(0) + Q(x), \tag{2.1.5}
\end{aligned}$$

где ε малый параметр из интервала $(0; 1)$.

Третье уравнение системы (2.1.5) используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon + p(x)}\right)$ представим в виде:

$$\begin{aligned}
w_\varepsilon(x, t) &= \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t z_\varepsilon(x, y)dy, \\
z_\varepsilon(x, t) &= \sigma_0(t) + \int_0^x P(s, t)\varphi_\varepsilon(s)ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t z_\varepsilon(s, y)dyds + \\
&+ \int_0^x f(s, t)ds, \\
\varphi_\varepsilon(x) &= -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times \\
&\times \left\{ \int_0^s [K(\xi, \xi) - K(s, \xi)] \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi - C_0 \int_0^s \left(\int_\xi^s K(v, \xi) dv \right) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi - \right. \\
&- \int_0^x [K(\xi, \xi) - K(x, \xi)] \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi + C_0 \int_0^x \left(\int_\xi^x K(v, \xi) dv \right) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi + \\
&+ \int_0^x K(\xi, \xi)(1 + C_0(x - \xi)) \int_0^T z_\varepsilon(\xi, y) dy d\xi - \int_0^s K(\xi, \xi)(1 + C_0(s - \xi)) \times \\
&\times \int_0^T z_\varepsilon(\xi, y) dy d\xi + Q(s) - Q(x) \Big\} ds + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \times
\end{aligned}$$

$$\times \left\{ \int_0^s [K(s, s) - K(x, s)] \varphi_\varepsilon(s) ds - C_0 \int_0^x \left(\int_s^x K(v, s) dv \right) \varphi_\varepsilon(s) ds - \int_0^x K(s, s) (1 + C_0(x - s)) \int_0^T z_\varepsilon(s, y) dy ds + \varepsilon \varphi(0) + Q(x) \right\}. \quad (2.1.6)$$

На отрезке $[0, b]$ и $[0, T]$ введем равномерные сетки $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0..n, b = nh\}$, $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0..1, T = n_0\tau\}$, n_0 -натуральные числа. Пространство сеточных функций $z_i^j = z(x_i, t_j)$, $(x_i, t_j) \in \omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ обозначим через $C_{h,\tau}$ с нормой

$$\|z_i^j\|_{C_{h,\tau}} = \max_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n_0}} |z_i^j|,$$

пространство сеточных функций $\varphi_i = \varphi(x_i)$ обозначим через C_h с нормой

$$\|\varphi_i\|_{C_h} = \max_{0 \leq i \leq n} |\varphi_i|.$$

Применяя квадратурную формулу правых прямоугольников для интегралов в (2.1.6), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} w_{\varepsilon,i}^j &= \varphi_{\varepsilon,i} + \tau \sum_{p=1}^j z_{\varepsilon,i}^p, \\ z_{\varepsilon,i}^j &= \sigma_0^j + h \sum_{k=1}^i P_k^j \varphi_{\varepsilon,k} + h \sum_{k=1}^i P_k^j \tau \sum_{p=1}^j z_{\varepsilon,k}^p + h \sum_{k=1}^i f_k^j, \\ \varphi_{\varepsilon,i} &= -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} [h \sum_{l=1}^{k-1} [K_{l,l} - K_{k,l}] \varphi_{\varepsilon,l} - \\ &- C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \varphi_{\varepsilon,l} - h \sum_{l=1}^{i-1} [K_{l,l} - K_{i,l}] \varphi_{\varepsilon,l} + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \times \\ &\times \varphi_{\varepsilon,l} + h \sum_{l=1}^{i-1} K_{l,i} (1 + C_0(x_i - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_{\varepsilon,l}^j - h \sum_{l=1}^{k-1} K_{l,l} (1 + C_0 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (x_k - x_l))z_{\varepsilon,l}^m + Q_k - Q_i] + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \left[h \sum_{k=1}^{i-1} [K_{k,k} - \right. \\
& \left. - K_{i,k}] \varphi_{\varepsilon,k} - C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \varphi_{\varepsilon,k} - h \sum_{k=1}^{i-1} K_{k,k} (1 + C_0(x_i - x_k)) \times \right. \\
& \left. \times \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_{\varepsilon,k}^j + \varepsilon \varphi_{h,0} + Q_i\right], \tag{2.1.7}
\end{aligned}$$

$$\text{где } Q_i = g_i - h \sum_{k=1}^i \tau \sum_{j=1}^{n_0} C_k f_k^j - C_0 h \sum_{k=1}^i (x_i - x_k) \tau \sum_{j=1}^{n_0} C_k f_k^j,$$

$$g_i = q_i + C_0 h \sum_{k=1}^i q_k.$$

Величину $\varphi_{0,h}$ выбираем в виде $\varphi_{0,h} = \frac{hK_{11} + Q_1}{p_1 + hG_1}$, где $Q_1 = hC(x_1) \int_0^T f(x_1, t) dt - q(x_1) - C_0 h q(x_1)$ для которой, учитывая, $Q(x_0) = Q(0) = 0$, что из условия *a-в* следуют оценки

$$\begin{aligned}
|\varphi_{0,h}| &= \left| \frac{Q(x_1) - Q(x_0)}{p(x_1) + hG(x_1)} \right| \leq \left| \frac{Q(x_1) - Q(x_0)}{p(x_1) - p(x_0) + hG(x_1)} \right| \leq \\
&\leq \frac{h \|Q'(x)\|_{C[0,b]}}{h|p'(\bar{x}) + G(x_1)|} \leq \frac{\|Q'(x)\|_{C[0,b]}}{\min_{x \in [0,b]} |G(x)|} \leq \frac{N_1}{d_1},
\end{aligned}$$

$$N_1 = \max_{x \in [0,b]} \|Q'(x)\|_{C[0,b]}.$$

Так как $\varphi_1 = \varphi_{0,h} + R_1^0$, R_1^0 – остаточный член интеграла, то

$$\begin{aligned}
|\varphi_{0,h} - \varphi_0| &= \left| \frac{hK_{11} + Q(x_1)}{p(x_1) + hG(x_1)} - \varphi(x_0) \right| \leq |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| + |R_1| \leq \\
&\leq h \| \varphi'(x) \|_{C[0,b]} + |R_1^0|, \text{ где } |R_1^0| \leq |R_{11}| + |R_{12}| + |R_{13}| + |R_{14}|.
\end{aligned}$$

$$\text{При этом } |R_{11}| = \left| \int_{x_0}^{x_1} [G(\xi) \varphi(\xi) - G(x_1) \varphi(x_1)] d\xi \right| \leq \frac{h^2}{2} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \|G'(x)\|_{C[0,b]} + \|G(x)\|_{C[0,b]} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h^2}{2} \leq [\|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \times \\ & \times \|G'(x)\|_{C[0,b]} + \|G(x)\|_{C[0,b]} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}] \frac{h^2}{2} = d_{13} \frac{h^2}{2}, \end{aligned}$$

где $d_{13} = \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \|G'(x)\|_{C[0,b]} + \|G(x)\|_{C[0,b]} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}$.

Оценки для R_{1i} , $i = 2, 3, 4$ получаем аналогично, т.е. $|R_{1i}| \leq K_i h$, $0 < K_i = \text{const}$, $i = 2, 3, 4$.

Тогда

$$|\varphi_{0,h} - \varphi_0| \leq h \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + d_4 \frac{h^2}{2} + h \sum_{i=2}^4 K_i \leq h N_2,$$

где $N_2 = \frac{d_4}{2d_1} + \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \sum_{i=2}^4 K_i$.

Лемма 2.1.1. При выполнении условий a -в и связи $\varepsilon = O(h^\alpha)$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$\left| \int_0^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi - h \sum_{l=1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right| \leq C_1 \frac{h}{\varepsilon^2}, \quad i = 0..n, \quad 0 < C_1 = \text{const}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi - h \sum_{l=1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right| \leq \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left| \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} - \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right| d\xi \leq \\ & \leq \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left| \frac{G(\xi) - G_l}{\varepsilon + p(\xi)} \right| d\xi + \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left| \frac{G_l [p_l - p(\xi)]}{(\varepsilon + p(\xi))(\varepsilon + p_l)} \right| d\xi \leq \\ & \leq \left[\frac{1}{\varepsilon} \|G'(x)\|_{C[0,b]} + \frac{\|G(x)\|_{C[0,b]}}{\varepsilon^2} \|p'(x)\|_{C[0,b]} \right] \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} (x_l - \xi) d\xi \leq \\ & \leq \frac{b}{2} [\varepsilon \|G'(x)\|_{C[0,b]} + \|G(x)\|_{C[0,b]} \|p'(x)\|_{C[0,b]}] \frac{h}{\varepsilon^2} \leq C_1 \frac{h}{\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

где $C_1 = \frac{b}{2} [\varepsilon \|G'(x)\|_{C[0,b]} + \|G(x)\|_{C[0,b]} \|p'(x)\|_{C[0,b]}]$.

Лемма 2.1.2. Если функция $\varphi(x) \in C^1[0, b]$ и выполняются условия a -в, то справедлива оценка

$$\|H_\varepsilon^h[\varphi_i]\|_{C_h} \leq d_1^{-1} (d_4 d_5 + e^{-1}) \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]},$$

где действие оператора H_ε^h на сеточную функцию $w_0, w_1, \dots, w_n$ определяется по формуле

$$\begin{aligned}
H_\varepsilon^h[\varphi_i] &= \frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} [\varphi_i - \varphi_k] - \\
&\quad - \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) [\varphi_i - \varphi_0], \\
d_4 &= \max_{x \in [0, b]} |G(x)|, \quad d_5 = \sup \left| \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp\left(-\frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i}\right) \right|.
\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
|H_\varepsilon^h[\varphi_i]| &= \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} [\varphi_k - \varphi_i] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) [\varphi_i - \varphi_0] \right| \leq d_4 \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \times \\
&\quad \times \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \frac{h}{\varepsilon + p_k} \|\varphi'(x)\|_{C[0, b]} + \frac{x_i}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \times \\
&\quad \times \|\varphi'(x)\|_{C[0, b]} \leq d_1^{-1} d_4 \|\varphi'(x)\|_{C[0, b]} \left| \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \exp\left(-\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \right| + \|\varphi'(x)\|_{C[0, b]} d_1^{-1} \left| \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp\left(-\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \right| \leq \\
&\leq d_1^{-1} (d_4 d_5 + e^{-1}) \|\varphi'(x)\|_{C[0, b]}.
\end{aligned}$$

Лемма 2.1.3. Пусть выполняются условия a -в и $\varphi(x) \in C^1[0, b]$. Тогда найдется такое число $0 < N_4$, что для остаточного члена $\tilde{R}_i = (H_\varepsilon \varphi)(x_i) - H_\varepsilon^h[\varphi_i]$ имеет место оценка

$$\tilde{R}_i = \|(H_\varepsilon \varphi)(x_i) - H_\varepsilon^h[\varphi_i]\|_{C_h} \leq N_4 h + N_5 \frac{h}{\varepsilon}, \quad 0 < N_4, \quad N_5 = \text{const},$$

где

$$(H_\varepsilon \varphi)(x_i) = \frac{1}{\varepsilon + p_i} \int_0^{x_i} \exp\left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} [\varphi(x) - \varphi(s)] -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-\int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) [\varphi(x_i) - \varphi(0)], \quad i = 0..n.$$

Доказательство. Остаточный член определяется в следующем виде

$$(H_\varepsilon \varphi)(x_i) - H_\varepsilon^h[\varphi_i] = \tilde{R}_i,$$

$$\tilde{R}_i = (H_\varepsilon \varphi)(x_i) - H_\varepsilon^h[\varphi_i] = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \int_0^{x_i} \exp\left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \times$$

$$\times \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} (\varphi_i - \varphi(s)) ds - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-\int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \times$$

$$\times (\varphi_i - \varphi_0) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times$$

$$\times (\varphi_i - \varphi_k) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) (\varphi_i - \varphi_0).$$

Разбивая остаточный член на суммы выражений, имеем оценки

$$|\tilde{R}_i| \leq |\tilde{R}_{1,i}| + |\tilde{R}_{2,i}| + |\tilde{R}_{3,i}| + |\tilde{R}_{4,i}|,$$

$$1) |\tilde{R}_{1,i}| = \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} (\varphi_k - \right.$$

$$\left. - \varphi(s)) ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times$$

$$\times \int_{x_k}^{x_{k+1}} (s - x_k) ds \leq d_4 \frac{h}{2} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{h}{\varepsilon + p_i} \leq$$

$$\leq d_1^{-1} d_4 \frac{h}{2} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \left| \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp\left(-\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} d_1^{-1} d_4 d_5 \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} h, \quad d_4, d_5 - \text{определены в лемме 2.1.2,}$$

$$\begin{aligned} 2) |\tilde{R}_{2,i}| &= \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{G_k}{\varepsilon + p_k} - \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \right) (\varphi_k - \varphi_i) ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \times \\ &\times \frac{h}{\varepsilon^2} C_1 (x_i - x_k) \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \leq d_1^{-1} \frac{h}{\varepsilon} C_1 \times \\ &\times \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp\left(-\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \leq \\ &\leq d_1^{-1} d_5 C_1 \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

$$C_1 = [\varepsilon \|G'(x)\|_{C[0,b]} + \|G(x)\|_{C[0,b]} \|p'(x)\|_{C[0,b]}],$$

$$\begin{aligned} 3) |\tilde{R}_{3,i}| &= \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\exp\left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \right] \frac{G(s)(\varphi(s) - \varphi_i)}{\varepsilon + p(s)} ds \right| \leq \\ &\leq \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \frac{d_4}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \times \\ &\times \left[1 - \exp\left(h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} - \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \right] \times \\ &\times \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_i - s) ds \leq \frac{1}{2} d_4 T_4 \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} h \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} d_1^{-1} d_4 \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} T_4 h \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times \\
&\times \exp \left(- \frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) h \leq \frac{1}{2} d_1^{-1} d_4 d_5 h T_4 \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}, \\
T_4 &= \sup \left| 1 - \exp \left(h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} - \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \right|, \\
4) |\tilde{R}_{4,i}| &= \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \left(\exp \left(- \int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) - \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \right) \right| \times \\
&\times (\varphi_i - \varphi_0) \leq \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \right| \times \\
&\times \left| \exp \left(h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} - \int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) - 1 \right| x_i \leq d_1^{-1} \varepsilon \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \times \\
&\times C_1 \frac{h}{\varepsilon^2} \left| \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(- \frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \right| \leq d_1^{-1} C_1 e^{-1} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$|\tilde{R}_i| \leq N_4 h + N_5 \frac{h}{\varepsilon},$$

$$\begin{aligned}
&\text{где } N_4 = \frac{1}{2} d_1^{-1} d_4 d_5 (1 + T_4) \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}, \quad N_5 = d_1^{-1} C_1 (d_5 + e^{-1}) \times \\
&\times \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}.
\end{aligned}$$

Лемма 2.1.3 доказана.

Введем следующие обозначения

$$q_0 = P_0 + M_0, \quad P_0 = bP(x, t) \max(1, T), \quad M_0 = \max(T_{12}, T_{13}),$$

$$d_4 = \max_{[0,b]} |G(x)|, \quad T_{12} = d_1^{-1} (d_4 d_5 + e^{-1}) K_2 b,$$

$$d_5 = \sup \left| \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(- \frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \right|,$$

$$K_2 = K_1 + C_0 K_0, \quad K_1 = \max_{D_1} |K'_x(x, s)|, \quad K_0 = \max_{D_1} |K(x, s)|,$$

$$T_{13} = d_1^{-1} T[d_4 d_5 (1 + 2bC_0) + e^{-1}(1 + C_0 b) \|K(x, x)\|_{C[0, b]}].$$

Теорема 2.1.1. При выполнении условий a -в, $q_0 < 1$ и $\varepsilon = O(h^\alpha)$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, решение системы (2.1.7) при $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$, равномерно сходится к точному решению задачи (2.1.1)-(2.1.3), причем имеет место оценка

$$|w_{\varepsilon, i}^j - w_i^j| < M_1 \tau + M_2 h + M_3 h^\alpha + M_4 h^{1-\alpha} + M_5 h^{2-\alpha},$$

$$0 < M_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, 5}.$$

Доказательство. К третьему уравнению системы (2.1.4) в обе части прибавляя $\varepsilon \varphi(x)$ и используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon + p(x)}\right)$ эту систему представим в следующем виде:

$$w(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t z(x, y) dy,$$

$$z(x, y) = \sigma_0(t) + \int_0^x P(s, t) \varphi(s) ds + \int_0^x P(s, t) \int_0^t z(s, y) dy ds + \\ + \int_0^x f(s, t) ds,$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times \\ \times \left\{ \int_0^s [K(\xi, \xi) - K(s, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^s \left(\int_{\xi}^s K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \right. \\ \left. - \int_0^x [K(\xi, \xi) - K(x, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^x \left(\int_{\xi}^x K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^x K(\xi, \xi) (1 + C_0(x - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - \int_0^s K(\xi, \xi) (1 + C_0(s - \xi)) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi + Q(s) - Q(x) \Big\} ds - \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp \left(- \int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) \times \\
& \times \left\{ \int_0^x [K(s, s) - K(x, s)] \varphi(s) ds - C_0 \int_0^x \left(\int_s^x K(v, s) dv \right) \varphi(s) ds - \right. \\
& \left. - \int_0^x K(s, s) (1 + C_0(x - s)) \int_0^T z(s, y) dy ds + \varepsilon \varphi(x) + Q(x) \right\}. \quad (2.1.8)
\end{aligned}$$

Полагая $x = x_i$, $t = t_j$, $i = 1..n$, $j = 1..n_0$ в (2.1.8), применим формулу правых прямоугольников для интегралов. Тогда получим систему

$$\left\{ \begin{aligned}
w_i^j &= \varphi_i + \tau \sum_{p=1}^j z_i^p + R_{i,j}^*, \\
z_i^j &= \sigma_0^j + h \sum_{k=1}^i P_k^j \varphi_k + h \sum_{k=1}^i P_k^j \tau \sum_{p=1}^j z_k^p + h \sum_{k=1}^i f_k^j + R_{i,j}^0, \\
\varphi_i &= -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{G_k}{\varepsilon + P_k} \{ h \sum_{l=1}^{k-1} [K_{l,l} - K_{k,l}] \varphi_l - \\
& - C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \varphi_l - h \sum_{l=1}^{i-1} [K_{l,l} - K_{i,l}] \varphi_l + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \varphi_l + \\
& + h \sum_{l=1}^{i-1} K_{l,l} (1 + C_0(x_i - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_l^j - h \sum_{l=1}^{k-1} K_{l,l} (1 + C_0(x_k - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_l^j + \\
& + Q_k - Q_i \} + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \{ h \sum_{k=1}^{i-1} [K_{k,k} - K_{k,l}] \varphi_k - \\
& - C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \varphi_k - h \sum_{k=1}^{i-1} K_{k,k} (1 + C_0(x_i - x_k)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_k^j + \\
& + \varepsilon \varphi_{h,0} + Q_i \} + R_i^1,
\end{aligned} \right. \quad (2.1.9)$$

где $R_{i,j}^*$, $R_{i,j}^0$, R_i^1 – остаточные члены интегралов.

Введем вектор погрешности $\eta_{\varepsilon,i}^h = \varphi_\varepsilon(x_i) - \varphi(x_i) = \varphi_{\varepsilon,i} - \varphi_i$,
 $i = 1..n$, $\mu_{\varepsilon,i}^j = z_\varepsilon(x_i, t_j) - z(x_i, t_j) = z_{\varepsilon,i}^j - z_i^j$, $j = 1..n_0$, $i = 1..n$.
Тогда из (2.1.7) и (2.1.9) получим

$$\begin{aligned}
w_{\varepsilon,i}^j - w_i^j &= \eta_{\varepsilon,i}^h + \tau \sum_{p=1}^j \mu_{\varepsilon,i}^p + R_{i,j}^*, \\
\mu_{\varepsilon,i}^j &= h \sum_{k=1}^i P_k^j \eta_{\varepsilon,k} + h \sum_{k=1}^i P_k^j \tau \sum_{p=1}^j \mu_{\varepsilon,k}^p - R_{i,j}^0, \\
\eta_{\varepsilon,i} &= -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \left\{ h \sum_{l=1}^{k-1} [K_{l,l} - K_{k,l}] \eta_{\varepsilon,l}^h - \right. \\
&\quad - C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \eta_{\varepsilon,l}^h - h \sum_{l=1}^{i-1} [K_{l,l} - K_{i,l}] \eta_{\varepsilon,l}^h + \\
&\quad + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \eta_{\varepsilon,l}^h + h \sum_{l=1}^{i-1} K_{l,l} (1 + C_0(x_i - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} \mu_{\varepsilon,l}^j - \\
&\quad - h \sum_{l=1}^{k-1} K_{l,l} (1 + C_0(x_k - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} \mu_{\varepsilon,l}^j + \varepsilon(\varphi(x_l) - \varphi(x_i)) \left. \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \left\{ h \sum_{k=1}^{i-1} [K_{k,k} - K_{i,k}] \eta_{\varepsilon,k}^h - \right. \\
&\quad - C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \eta_{\varepsilon,k}^h - h \sum_{k=1}^{i-1} K_{k,k} (1 + C_0(x_i - x_k)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} \mu_{\varepsilon,k}^j + \\
&\quad + \varepsilon(\varphi_i - \varphi_0) \left. \right\} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) (\varphi_0 - \varphi_{h,0}) - R_i^1. \quad (2.1.10)
\end{aligned}$$

Произведя оценки из (2.1.10) получим

$$\begin{aligned}
|w_{\varepsilon,i}^j - w_i^j| &\leq |\varphi_{\varepsilon,i} - \varphi_i| + \tau \sum_{p=1}^j |z_{\varepsilon,i}^p - z_i^p| + |R_{i,j}^*| \leq \|\eta_{\varepsilon,i}\|_{C_h} + \\
&\quad + T \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} + |R_{i,j}^*| \leq \|\eta_{\varepsilon,i}\|_{C_h} + T \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} + M_1^0 \tau, \quad (2.1.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{где } R_{i,j}^* = \int_0^{t_j} z(x_i, v) dv - \tau \sum_{p=1}^j z_i^p, \quad M_1^0 = \frac{T}{2} \|z_t(x, t)\|_{C(D)}, \\
& |z_{\varepsilon,i}^j - z_i^j| = \left| h \sum_{k=1}^i P_k^j \eta_{\varepsilon,k}^h + h \sum_{k=1}^i P_k^j \tau \sum_{p=1}^j \mu_{\varepsilon,k}^p - R_{i,j}^0 \right| \leq \\
& \leq \|P(x, t)\|_{C(D)} h \sum_{k=1}^i |\eta_{\varepsilon,k}^h| + \|P(x, t)\|_{C(D)} h \sum_{k=1}^i \tau \sum_{p=1}^j |\mu_{\varepsilon,k}^p| + |R_{i,j}^0| \leq \\
& \leq T_0 \left(\|\eta_{\varepsilon,k}^h\|_{C_h} + \|\mu_{\varepsilon,k}^m\|_{C_{h,\tau}} \right) + \left| \int_0^{x_i} P(s, t_j) \varphi(s) ds - h \sum_{k=1}^i P(x_k, t_j) \varphi_k \right| + \\
& + \left| \int_0^{x_i} P(s, t_j) \int_0^{t_j} z(x_k, y) dy ds - h \sum_{k=1}^i P_k^j \tau \sum_{p=1}^j z_k^p \right| + \\
& + \left| \int_0^{x_i} f(s, t_j) ds - h \sum_{k=1}^i f_k^j \right| \leq T_0 \left(\|\eta_{\varepsilon,k}^h\|_{C_h} + \|\mu_{\varepsilon,k}^m\|_{C_{h,\tau}} \right) + \\
& + \left| \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} P(s, t_j) [\varphi(s) - \varphi(x_k)] ds \right| + \left| \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} [P(s, t_j) - \right. \\
& \left. - P(x_k, t_j)] \varphi(x_k) ds \right| + \left| \int_0^{x_i} P(s, t_j) \left[\int_0^{t_j} z(x_k, y) dy - \tau \sum_{p=1}^j z_k^p \right] ds \right| + \\
& + \left| \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} [P(s, t_j) - P(x_k, t_j)] \tau \sum_{p=1}^j z_k^p ds \right| + \left| \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(s, t_j) - \right. \\
& \left. - f(x_k, t_j)] ds \right| \leq T_0 \left(\|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} \right) + \frac{b}{2} \|P(x, t)\|_{C(D)} \times \\
& \times \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} h + \frac{b}{2} \|P_x(x, t)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} h + \frac{Tb}{2} \|P(x, t)\|_{C(D)} \times \\
& \times \|z_t(x, t)\|_{C(D)} \tau + \frac{T}{2} b \|P_x(x, t)\|_{C(D)} \|z(x, t)\|_{C(D)} h + \frac{b}{2} \|f_x(x, t)\|_{C(D)} h \leq
\end{aligned}$$

$$\leq P_0 \left(\|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} \right) + M_2 h + M_3 \tau, \quad (2.1.12)$$

$$\begin{aligned} \text{где } R_{i,j}^0 = & \int_0^x P(s, t_j) \varphi(s) ds - h \sum_{k=1}^i P_k^j \varphi_k + \int_0^x P(s, t_j) \int_0^t z(s, y) dy ds - \\ & - h \sum_{k=1}^i P_k^j \tau \sum_{p=1}^j z_k^p + \int_0^{x_i} f(s, t_j) ds - h \sum_{k=1}^i f_k^j, \end{aligned}$$

$$P_0 = b \|P(x, t)\|_{C(D)} \max(1, T),$$

$$\begin{aligned} M_2 = & \frac{b}{2} \|P(x, t)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \frac{b}{2} \|P_x(x, t)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} + \\ & + T \frac{b}{2} \|P_x(x, t)\|_{C(D)} \|z(x, t)\|_{C(D)} + \frac{b}{2} \|f_x(x, t)\|_{C(D)}, \end{aligned}$$

$$M_3 = T \frac{b}{2} \|P(x, t)\|_{C(D)} \|z_t(x, t)\|_{C(D)}.$$

$$\begin{aligned} |\varphi_{\varepsilon,i} - \varphi_i| = & \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times \right. \\ & \times \left\{ h \sum_{l=1}^{k-1} [K_{l,l} - K_{k,l}] \eta_{\varepsilon,l}^h - C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \eta_{\varepsilon,l}^h - h \sum_{l=1}^{i-1} [K_{l,l} - K_{i,l}] \times \right. \\ & \times \eta_{\varepsilon,l}^h + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \eta_{\varepsilon,l}^h + h \sum_{l=1}^{i-1} K_{l,l} (1 + C_0(x_i - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} \mu_{\varepsilon,l}^j - \\ & - h \sum_{l=1}^{k-1} K_{l,l} (1 + C_0(x_k - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} \mu_{\varepsilon,l}^j + \varepsilon (\varphi(x_l) - \varphi(x_i)) \} + \\ & + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \left\{ h \sum_{k=1}^{i-1} [K_{k,k} - K_{i,k}] \eta_{\varepsilon,k}^h - \right. \\ & - C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \eta_{\varepsilon,k}^h - h \sum_{k=1}^{i-1} K_{k,k} (1 + C_0(x_i - x_k)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} \mu_{\varepsilon,k}^j + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon(\varphi_i - \varphi_{h,0})\} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) (\varphi_0 - \varphi_{h,0}) - R_i^1 \Big| \leq \\
& \leq d_1^{-1} d_4 \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \frac{h}{\varepsilon + p_k} \left[2K_2 h \sum_{l=1}^{i-1} |\eta_{\varepsilon,l}^h| + \right. \\
& \left. + (1 + 2bC_0) \|K_{l,l}\|_{C_{h,\tau}} h \sum_{l=1}^{i-1} \tau \sum_{j=1}^{n_0} |\mu_{\varepsilon,l}^j| \right] + \frac{(x_i - x_0)}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \times \\
& \times \left[K_2 h \sum_{k=1}^{i-1} |\eta_{\varepsilon,k}^h| + (1 + C_0 b) \|K_{k,k}\|_{C_{h,\tau}} h \sum_{k=1}^{i-1} \tau \sum_{j=1}^{n_0} |\mu_{\varepsilon,k}^j| \right] + |\varepsilon(H_\varepsilon^h[\varphi_i])| + \\
& + |\varphi_0 - \varphi_{h,0}| + |R_i^1| \leq d_1^{-1} d_4 \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp\left(-\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \times \\
& \times \left[2bK_2 \|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + bT(1 + 2C_0 b) \|K_{l,l}\|_{C_{h,\tau}} \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} \right] \frac{h}{\varepsilon} + d_1^{-1} \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times \\
& \times \exp\left(-\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \left[bK_2 \|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + bT(1 + C_0 b) \|K_{k,k}\|_{C_{h,\tau}} \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} \right] + \\
& + |\varepsilon(H_\varepsilon^h[\varphi_i])| + hN_2 + |R_i^1| \leq [2bK_2 \|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + bT(1 + C_0 b) \|K_{l,l}\|_{C_{h,\tau}} \times \\
& \times \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}}] d_1^{-1} d_4 d_5 \frac{h}{\varepsilon} + d_1^{-1} e^{-1} [bK_2 \|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + bT(1 + C_0 b) \|K_{k,k}\|_{C_{h,\tau}} \times \\
& \times \|\mu_{\varepsilon,i}^m\|_{C_{h,\tau}}] + \varepsilon |(H_\varepsilon^h[\varphi_i])| + hN_2 + |R_i^1| \leq d_1^{-1} b(d_4 d_5 + e^{-1}) K_2 \times \\
& \times \|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + \frac{bT}{d_1} [d_4 d_5 (1 + 2bC_0) + e^{-1} (1 + bC_0)] \|K_{k,k}\|_{C_{h,\tau}} \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} + \\
& + \varepsilon |(H_\varepsilon^h[\varphi_i])| + hN_2 + |R_i^1| \leq T_{12} \|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + T_{13} \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} + \varepsilon |(H_\varepsilon^h[\varphi_i])| + \\
& + |R_i^1| \leq M_0 \left(\|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} \right) + \varepsilon |(H_\varepsilon^h[\varphi_i])| + hN_2 + |R_i^1|,
\end{aligned}$$

где $M_0 = \max(T_{12}, T_{13})$, $T_{12} = d_1^{-1} (d_4 d_5 + e^{-1}) K_2 b$, $d_4 = \max_{x \in [0, b]} |G(x)|$,

$$d_5 = \sup \left| \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(- \frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \right|, \quad K_2 = K_1 + C_0 K_0,$$

$$K_1 = \max_{D_1} |K_x(x, s)|, \quad K_0 = \max_{D_1} |K(x, s)|, \quad T_{13} = d_1^{-1} T [d_4 d_5 (1 + 2bC_0) + e^{-1} (1 + bC_0) \|K(x, x)\|_{C[0, b]}].$$

Тогда, учитывая лемму 2.1.2, получим

$$\|\eta_{\varepsilon, i}^h\|_{C_h} \leq M_0 \left(\|\eta_{\varepsilon, i}^h\|_{C_h} + \|\mu_{\varepsilon, i}^j\|_{C_{h, \tau}} \right) + M_4 h^\alpha + N_2 h + |R_i^1|. \quad (2.1.13)$$

Запишем остаточный член R_i^1 в развернутом виде

$$\begin{aligned} R_i^1 = & -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \left\{ \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^s [K(\xi, \xi) - \right. \right. \\ & \left. \left. - K(s, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^s \left(\int_\xi^s K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_\xi^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^{x_i} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_i - \xi)) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - \int_0^s K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_k - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi \right] ds + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \right] \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times \right. \\ & \left. \times \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_\xi^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_\xi^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^{x_i} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_i - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - \int_0^{x_k} K(\xi, \xi) (1 + C_0 \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (x_k - \xi) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi \Big] ds + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - \right. \\
& \left. - \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \right] \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - \right. \\
& \left. - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + \right. \\
& \left. + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^{x_i} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_i - \xi)) \times \right. \\
& \left. \times \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - \int_0^{x_k} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_k - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi \right] ds + \\
& + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{(G(s) - G_k)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - \right. \\
& \left. - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - \right. \\
& \left. - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^{x_i} K(\xi, \xi) \times \right. \\
& \left. \times (1 + C_0(x_i - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - \int_0^{x_k} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_k - \xi)) \times \right. \\
& \left. \times \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi \right] ds + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \left[\frac{G_k}{\varepsilon + p(s)} - \right. \\
& \left. - \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right] \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \varphi(\xi) d\xi - h \sum_{l=1}^k [K_{l,l} - K_{k,l}] \varphi_l + C_0 h \sum_{l=1}^k h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \varphi_l + \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - \\
& - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - h \sum_{l=1}^i [K_{l,l} - K_{i,l}] \varphi_l + \\
& + C_0 h \sum_{l=1}^i h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \varphi_l + \int_0^{x_i} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_i - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - \\
& - \int_0^{x_k} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_k - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi + h \sum_{l=1}^i K_{l,l} (1 + C_0 \times \\
& \times (x_i - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_i^j - h \sum_{l=1}^i K_{l,l} (1 + C_0(x_i - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_l^j \Big] ds + \\
& + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} \right) \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - \right. \\
& - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - h \sum_{l=1}^k [K_{l,l} - K_{k,l}] \varphi_l + \\
& + C_0 h \sum_{l=1}^k h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \varphi_l + \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - \\
& - C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - h \sum_{l=1}^i [K_{l,l} - K_{i,l}] \varphi_l + \\
& + C_0 h \sum_{l=1}^i h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \varphi_l + \int_0^{x_i} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_i - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - \\
& - \int_0^{x_k} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_k - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi + h \sum_{l=1}^i K_{l,l} (1 + C_0 \times \\
& \times (x_i - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_i^j - h \sum_{l=1}^k K_{l,l} (1 + C_0(x_k - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_l^j \Big] ds \Big\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \int_0^{x_i} \exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} (\varphi_i - \varphi(s)) ds + \\
& + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \exp \left(- \int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) (\varphi_i - \varphi_0) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \times \\
& \times h \sum_{k=1}^i \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} (\varphi_i - \varphi_k) ds - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \times \\
& \times \exp \left(- \int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) (\varphi_i - \varphi_0) - \frac{1}{\varepsilon + p_i} \left[\exp \left(- \int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) - \right. \\
& \left. - \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \right] \left[\int_0^{x_i} [K(s, s) - K(x_i, s)] \varphi(s) ds + \right. \\
& + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_s^{x_i} K(v, s) dv \right) \varphi(s) ds + \int_0^{x_i} K(s, s) (1 + C_0(x_i - s)) \times \\
& \times \int_0^T z(s, y) dy ds + g_i - \varepsilon \varphi_i \Big] + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \left[\int_0^{x_i} [K(s, s) - \right. \\
& \left. - K(x_i, s)] \varphi(s) ds - C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_s^{x_i} K(v, s) dv \right) \varphi(s) ds - h \sum_{k=1}^i [K_{k,k} - K_{i,k}] \varphi_k + \right. \\
& + C_0 h \sum_{k=1}^i h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \varphi_k + \int_0^{x_i} K(s, s) (1 + C_0(x_i - x_k)) \int_0^T z(s, y) dy ds - \\
& \left. - h \sum_{k=1}^i K_{k,k} (1 + C_0(x_i - x_k)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_k^j + C_0 \int_0^{x_i} g(s) ds - C_0 h \sum_{k=1}^i g_i \right].
\end{aligned}$$

Разбивая остаточный член R_i^1 на суммы выражений, имеем оценки

$$|R_i^1| = \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\int_0^s [K(\xi, \xi) - K(s, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^s \left(\int_s^s K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \right. \\
& - \int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_\xi^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi + \\
& + \int_0^{x_k} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_i - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - \int_0^s K(\xi, \xi) (1 + C_0 \times \\
& \times (s - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi \left. \right] ds \leq \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \times \\
& \times \frac{(x_k - s)}{\varepsilon + p_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\frac{3}{2} b K_2 r_0 + \left(1 + \frac{3}{2} C_0 b \right) T \|K(x, x)\|_{C[0, b]} \times \right. \\
& \times \|z(x, t)\|_{C(D)} \left. \right] ds \leq \left[\frac{3}{2} b K_2 r_0 + T \left(1 + \frac{3}{2} C_0 b \right) r_1 K_3 \right] \frac{h}{\varepsilon} \times \\
& \times \int_0^{x_i} \exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) ds \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \leq \\
& \leq d_5 \left[\frac{3}{2} b K_2 r_0 + T \left(1 + \frac{3}{2} C_0 b \right) r_1 K_3 \right] \frac{h}{\varepsilon}, \\
& r_0 = \max_{[0, b]} |\varphi(x)|, \quad r_1 = \max_D |z(x, t)|, \quad K_3 = \max_{[0, b]} K(x, x); \\
& |R_i^2| = \left| - \frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - \right. \right. \\
& - \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \left. \right] \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \times \right. \\
& \times \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_\xi^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -K(x_i, \xi)]\varphi(\xi)d\xi + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi)dv \right) \varphi(\xi)d\xi + \int_0^{x_i} K(\xi, \xi) \times \\
& \times (1 + C_0(x_i - \xi)) \int_0^T z(\xi, y)dyd\xi - \int_0^{x_k} K(\xi, \xi)(1 + C_0(x_k - \xi)) \times \\
& \times \int_0^T z(\xi, y)dyd\xi \Bigg] ds \Bigg| \leq d_4 \sum_{k=1}^i \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \times \\
& \times \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{\varepsilon + p(s)} \left| \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi - \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - 1 \right| ds \times \\
& \times \left[\frac{3}{2} bK_2 r_0 + \left(1 + \frac{3}{2} C_0 b \right) r_1 K_3 \right] \leq \frac{d_4 d_5}{d_1} \left[\frac{3}{2} bK_2 r_0 + \left(1 + \frac{3}{2} C_0 b \right) r_1 K_3 \right] \frac{h}{\varepsilon}, \\
& d_5 = \sup \left| \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(- \frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \right|; \\
& |R_i^3| = \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \right] \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)]\varphi(\xi)d\xi - \right. \right. \\
& \left. \left. - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi)dv \right) \varphi(\xi)d\xi - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)]\varphi(\xi)d\xi + \right. \right. \\
& \left. \left. + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi)dv \right) \varphi(\xi)d\xi + \int_0^{x_i} K(\xi, \xi)(1 + C_0(x_i - \xi)) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \int_0^T z(\xi, y)dyd\xi - \int_0^{x_k} K(\xi, \xi)(1 + C_0(x_k - \xi)) \int_0^T z(\xi, y)dyd\xi \right] ds \right| \leq \\
& \leq d_4 \sum_{k=1}^i \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{ds}{\varepsilon + p(s)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left| \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi - h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) - 1 \right| \left[\frac{3}{2} b K_2 r_0 + \right. \\
& \left. + T \left(1 + \frac{3}{2} C_0 b \right) r_1 K_3 \right] \leq \frac{d_4 d_6}{d_1} \frac{h}{\varepsilon} \left[\frac{3}{2} b K_2 r_0 + T \left(1 + \frac{3}{2} C_0 b \right) r_1 K_3 \right] \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(- \frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \leq d_1^{-1} d_4 d_5 d_6 \times \\
& \times \left[\frac{3}{2} b K_2 r_0 + T \left(1 + \frac{3}{2} C_0 b \right) r_1 K_3 \right] \frac{h}{\varepsilon}, \\
& d_6 = \sup \left| \exp \left(\int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi - h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) - 1 \right|; \\
& |R_i^4| = \left| - \frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(- h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{(G(s) - G_k)}{\varepsilon + p(s)} \times \right. \\
& \times \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \right. \\
& - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi + \\
& + \int_0^{x_i} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_i - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - \int_0^{x_k} K(\xi, \xi) \times \\
& \times (1 + C_0(x_k - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi \left. \right] ds \Bigg| \leq \frac{1}{2} \|G'(x)\|_{C[0, b]} \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \exp \left(- h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{(x_i - x_k) h^2}{\varepsilon + p_i} \left[\frac{3}{2} b K_2 r_0 + T r_1 K_3 \times \right. \\
& \times \left. \left(1 + \frac{3}{2} C_0 b \right) \right] \leq \frac{1}{2} d_1^{-1} \|G'(x)\|_{C[0, b]} \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times \\
& \times \exp \left(- \frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \left[\frac{3}{2} b K_2 r_0 + T \left(1 + \frac{3}{2} C_0 b \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times r_1 K_3] \frac{h^2}{\varepsilon} \leq \frac{1}{2} d_1^{-1} d_5 \|G'(x)\|_{C[0,b]} \left[\frac{3}{2} b K_2 r_0 + T \left(1 + \frac{3}{2} C_0 b \right) r_1 K_3 \right] \frac{h^2}{\varepsilon}; \\
& |R_i^5| = \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi,) - \right. \right. \\
& \left. \left. - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - h \sum_{l=1}^k [K_{l,l} - K_{k,l}] \varphi_l - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \varphi(\xi) d\xi + h \sum_{l=1}^i [K_{l,l} - K_{i,l}] \varphi_l + \int_0^{x_i} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_i - \xi)) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - \int_0^{x_k} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_k - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - \right. \right. \\
& \left. \left. - h \sum_{l=1}^i K_{l,l} (1 + C_0(x_i - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_l^j + h \sum_{l=1}^k K_{l,l} (1 + C_0(x_k - x_l)) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_l^j \right] ds \right| \leq \frac{1}{\varepsilon + p_i} d_4 \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \times \\
& \times \frac{1}{\varepsilon + p_k} \left\| \int_0^{x_k} [K(x_i, \xi,) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + h \sum_{l=1}^i [K_{k,l} - K_{i,l}] \varphi_l - \right. \\
& \left. - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + h \sum_{l=k+1}^i [K_{l,l} - K_{i,l}] \varphi_l + \right. \\
& \left. + \int_0^{x_k} K(\xi, \xi) C_0(x_i - x_k) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi + h \sum_{l=1}^k K_{l,l} C_0(x_k - x_i) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_l^j + \right. \\
& \left. + \int_0^{x_i} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_i - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - h \sum_{l=k+1}^i K_{l,l} (1 + C_0 \times \right. \\
& \left. \times (x_i - x_l)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_l^j \right\| ds \leq \frac{d_4}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{h}{\varepsilon + p_k} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} |[K(x_i, \xi) - K(x_k, \xi) + K_{k,l} - K_{i,l}] \varphi(\xi)| d\xi + \right. \\
& + \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left| [K_{k,l} - K_{i,l}] [\varphi_l - \varphi(\xi)] \right| d\xi + \sum_{l=k+1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} |[K_{l,l} - K_{i,l} - \\
& - K(\xi, \xi) + K(x_i, \xi)] \varphi(\xi)| d\xi + \sum_{l=k+1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} |[K_{l,l} - K_{i,l}] [\varphi_l - \varphi(\xi)]| d\xi + \\
& + \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} |[K(\xi, \xi) - K_{l,l}] C_0(x_i - x_k)| \int_0^T |z(\xi, y)| dy d\xi + \\
& + \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} |K_{l,l}| C_0(x_i - x_k) \left\| \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_l^j - \int_0^T z(\xi, y) dy \right\| d\xi + \\
& + \sum_{l=k+1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} |[K(\xi, \xi) - K_{l,l}]| (1 + C_0(x_i - \xi)) \times \\
& \times \int_0^T |z(\xi, y)| dy d\xi + \sum_{l=k+1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} |K(\xi, \xi)| (1 + C_0(x_i - x_l)) \times \\
& \times \left\| \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_l^j - \int_0^T z(\xi, y) dy \right\| d\xi \leq \frac{d_4}{\varepsilon + p_k} \sum_{k=1}^i \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \times \\
& \times \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_k} h [(3b \|K_s(x, s)\|_{C(D_1)} r_0 + b \|K'(x, x)\|_{C[0,b]} r_0) \frac{h}{2} + \\
& + b K_1 \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} h + (1 + (1 + b) C_0) T \|K'(x, x)\|_{C[0,b]} r_1 h + \\
& + (1 + (1 + b) C_0) \frac{T}{2} \|z_t(x, t)\|_{C(D)} \tau] \leq \frac{d_4}{d_1} \sum_{k=1}^i \exp \left(-\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times \\
& \times \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \left[(3b \|K_s(x, s)\|_{C(D_1)} r_0 + b K_3 r_0) \frac{h}{2} + b K_3 \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} h + \right. \\
& \left. + (1 + (1 + b) C_0) T \|K'(x, x)\|_{C[0,b]} r_1 h + (1 + (1 + b) C_0) \frac{T}{2} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \|z_t(x, t)\|_{C(D)} \tau] \leq d_1^{-1} d_4 d_5 [(3b \|K_s(x, s)\|_{C(D_1)} r_0 + b K_3 r_0) \frac{h}{2} + \\
& + b K_1 \|\varphi'(x)\|_{C[0, b]} h + (1 + (1 + b) C_0) T \|K'(x, x)\|_{C[0, b]} r_1 h + \\
& + (1 + (1 + b) C_0) \frac{T}{2} \|z_t(x, t)\|_{C(D)} \tau];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|R_i^6| &= \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times \right. \\
&\times \left[C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - C_0 h \sum_{l=1}^k h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \varphi_l - \right. \\
&- C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi + C_0 h \sum_{l=1}^i h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \varphi_l \left. \right] ds \Big| \leq \\
&\leq \frac{d_4}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{h}{\varepsilon + p_k} \times \\
&\times \left| \left[C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{x_k}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - C_0 h \sum_{l=1}^k h \sum_{m=k+1}^i K_{m,l} \varphi_l \right] + \right. \\
&+ C_0 h \sum_{l=k+1}^i \left| h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \varphi_l + \int_{x_k}^{x_i} \left(\int_{x_l}^{x_i} K(v, \xi) \varphi(\xi) dv - \right. \right. \\
&- \left. \left. \int_{\xi}^{x_l} K(v, \xi) \varphi(\xi) dv \right) d\xi \right| \Big| \leq \frac{d_4}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \times \\
&\times \frac{h}{\varepsilon + p_k} \left[C_0 \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} \sum_{m=k+1}^i \int_{x_{m-1}}^{x_m} |[K_{m,l} - K(v, \xi)] \varphi_l| dv d\xi + \right. \\
&+ C_0 \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} \sum_{m=k+1}^i \int_{x_{m-1}}^{x_m} |[K(v, \xi) [\varphi(\xi) - \varphi_l]| dv d\xi +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_0 \sum_{l=k+1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} \sum_{m=l+1}^i \int_{x_{m-1}}^{x_m} |[K_{m,l} - K(v, \xi)]\varphi_l| dv d\xi + \\
& + C_0 \sum_{l=k+1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \sum_{m=l+1}^i \int_{x_{m-1}}^{x_m} |K_{m,l}[\varphi(\xi) - \varphi_l]| dv d\xi + C_0 \sum_{l=k+1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} |K(v, \xi) \times \\
& \times \varphi(\xi)| dv d\xi] \leq d_4 \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{h}{\varepsilon + p_i} \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_k} C_0 b \times \\
& \times \left[(K_1 + \|K_s(x, s)\|_{C(D_1)}) r_0 h + K_0 \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} h + \frac{1}{2} K_0 r_0 h \right] \leq \\
& \leq d_1^{-1} d_4 d_5 C_0 b \left[(K_1 + \|K_s(x, s)\|_{C(D_1)}) r_0 + K_0 \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \frac{1}{2} K_0 r_0 \right] \frac{h^2}{\varepsilon}; \\
& |R_i^7| = \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) G_k \left[\frac{1}{\varepsilon + p_k} - \frac{1}{\varepsilon + p(s)} \right] \times \right. \\
& \times \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \right. \\
& - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi + \\
& + \int_0^{x_i} K(\xi, \xi) (1 + C_0(x_i - \xi)) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi - \int_0^{x_k} K(\xi, \xi) \times \\
& \times \left. \left. \left(1 + C_0(x_k - \xi) \right) \int_0^T z(\xi, y) dy d\xi \right] ds \right| \leq d_4 \left[\frac{3}{2} b K_2 r_0 + T \left(1 + \frac{3}{2} C_0 b \right) \times \right. \\
& \times r_1 K_3 \|p'(x)\|_{C[0,b]} \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{1}{\varepsilon + p_i} (x_i - x_k) \times \\
& \times \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x_k - s)}{(\varepsilon + p_k)(\varepsilon + p(s))} ds \leq \frac{1}{2} d_1^{-1} d_4 \|p'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h^2}{\varepsilon^2} \left[\frac{3}{2} b K_2 r_0 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +T\left(1+\frac{3}{2}C_0b\right)r_1K_3\left]\sum_{k=1}^i\left(\frac{(x_i-x_k)d_1}{\varepsilon+p_i}\right)\exp\left(-\frac{(x_i-x_k)d_1}{\varepsilon+p_i}\right)\leq\right. \\
& \leq\frac{1}{2}d_1^{-1}d_4d_5\left[\frac{3}{2}bK_2r_0+T\left(1+\frac{3}{2}C_0b\right)r_1K_3\right]\|p'(x)\|_{C[0,b]}\frac{h^2}{\varepsilon^2}; \\
& |R_i^8|=\left|\frac{1}{\varepsilon+p_i}\left[\exp\left(-\int_0^{x_i}\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)-\exp\left(-h\sum_{k=1}^i\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\right)\right]\times\right. \\
& \times\left[\int_0^{x_i}[K(s,s)-K(x_i,s)]\varphi(s)ds+C_0\int_0^{x_i}\left(\int_s^{x_i}K(v,s)dv\right)\varphi(s)ds+\right. \\
& \left.+\int_0^{x_i}K(s,s)(1+C_0(x_i-s))\int_0^Tz(s,y)dyds\right]\leq\frac{1}{\varepsilon+p_i}\times \\
& \times\exp\left(-h\sum_{k=1}^i\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\right)\left|\exp\left(h\sum_{k=1}^i\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}-\int_0^{x_i}\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)-1\right|\times \\
& \times(x_i-x_0)b[(\|K_x(x,s)\|_{C(D_1)}+C_0\|K(x,s)\|_{C(D_1)})r_0+T(1+C_0b)\times \\
& \times K_3r_1\|z(x,t)\|_{C(D)}]\leq d_1^{-2}\exp\left(-h\theta_1\frac{x_id_1}{\varepsilon+p_i}\right)\exp\left(-h\theta_2\sum_{k=1}^i\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\right)\times \\
& \times\left(-h\sum_{k=1}^i\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\right)C_1\frac{x_id_1}{\varepsilon+p_i}\frac{h}{\varepsilon}d_7C_1[bC_0(K_0+K_1)r_0+(1+C_0b)TK_3r_1]\leq \\
& \leq\frac{d_1^{-2}e^{-2}}{\theta_1\theta_2}C_1[bC_0(K_0+K_1)r_0+(1+C_0b)TK_3r_1]\frac{h}{\varepsilon}, \quad \theta_1+\theta_2=1, \\
& 0<\theta_1<1, \quad d_7=\sup\left|\exp\left(-\theta\sum_{k=1}^i\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}-\theta\int_0^{x_i}\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\right|, \\
& 0<\theta<1, \\
& |R_i^9|=\left|\frac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{k=1}^i\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\right)\left[\int_0^{x_i}[K(s,s)-K(x_i,s)]\varphi(s)ds-\right.\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_s^{x_i} K(v, s) dv \right) \varphi(s) ds - h \sum_{k=1}^i [K_{k,k} - K_{i,k}] \varphi_k + \\
& + C_0 h \sum_{k=1}^i h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \varphi_k + \int_0^{x_i} K(s, s) (1 + C_0(x_i - s)) \int_0^T z(s, y) dy ds - \\
& - \sum_{k=1}^i K_{k,k} (1 + C_0(x_i - x_k)) \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_l^j \Bigg| \leq \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \times \\
& \times \left[\sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} |K(s, s) - K(x_i, s)| |\varphi(\xi) - \varphi(x_l)| ds + \left| \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} [K(s, s) - \right. \right. \\
& \left. \left. - K(x_i, s) - K_{k,k} + K_{i,k}] \varphi(x_k) ds \right| + \left| C_0 \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \times \right. \right. \\
& \left. \times [\varphi_k - \varphi(s)] ds + \left| C_0 \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} [h \sum_{m=l+1}^i K_{m,k} - \int_s^{x_i} K(v, s) dv] \varphi(s) ds \right| + \right. \\
& \left. + \left| \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} K(s, s) (1 + C_0(x_i - s)) \left[\int_0^T z(s, y) dy - \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_i^j \right] ds \right| + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [K(s, s) - K_{k,k}] \left[(1 + C_0(x_i - s) + C_0 |K_{k,k}| (x_k - s)) \right] ds \times \right. \\
& \left. \times \tau \sum_{j=1}^{n_0} z_l^j \right] \leq \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{l=1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) [\|K_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0, b]} \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_i - s) (x_k - s) ds + [2\|K_x(x, s)\|_{C(D_1)} + \|K_s(x, s)\|_{C(D_1)}] r_0 \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - s) ds + b C_0 \|K(x, s)\|_{C(D_1)} \|\varphi'(x)\|_{C[0, b]} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - s) ds + \left| C_0 \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\sum_{m=k+1}^i K_{m,k} - \int_{x_k}^{x_i} K(v, s) dv - \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_s^{x_k} K(v, s) dv \right] \varphi(s) ds \right| + (1 + C_0 b) K_3 \|z_t(x, t)\|_{C(D)} \sum_{l=1}^{i-1} \tau^2 \frac{T}{2} + \\
& + [(1 + C_0 b) \|K'(x, x)\|_{C[0,b]} + C_0 K_3] r_1 T \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - s) ds \Bigg] \leq \\
& \leq d_1^{-1} \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(- \frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \left[\frac{b}{2} K_1 \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \right. \\
& + (b K_1 + \frac{1}{2} \|K_s(x, s)\|_{C(D)}) r_0 + C_0 K_0 \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \\
& + \frac{T}{2} K_3 (1 + C_0 b) \|z_t(x, t)\|_{C(D)} \tau + h \frac{T}{2} \|z(x, t)\|_{C(D)} [(1 + \\
& + C_0 b) \|K'(x, x)\|_{C[0,b]} + C_0 K_3] \leq d_1^{-1} e^{-1} \left[\frac{b}{2} K_1 \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \right. \\
& + \left(b \|K_x(x, s)\|_{C(D_1)} + \frac{1}{2} \|K_s(x, s)\|_{C(D_1)} \right) r_0 + \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \times \\
& \times C_0 K_0 + \frac{T}{2} K_3 (1 + C_0 b) \|z_t(x, t)\|_{C(D)} \tau + h \frac{T}{2} \|z(x, t)\|_{C(D)} \times \\
& \times [(1 + C_0 b) \|K'(x, x)\|_{C[0,b]} + C_0 K_3]; \\
& |R_i^{10}| = \left| \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \left[C_0 \int_0^{x_i} g(s) ds - C_0 h \sum_{k=1}^i g_k \right] \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) C_0 \|g'(x)\|_{C[0,b]} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_l - s) ds \leq \\
& \leq d_1^{-1} C_0 \|g'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h}{2} \left| \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(- \frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \right| \leq \frac{1}{2} e^{-1} d_1^{-1} C_0 \times \\
& \times \|g'(x)\|_{C[0,b]} h.
\end{aligned}$$

В итоге, учитывая лемму 2.1.2, получим

$$|R_i| \leq M_{11}h + M_{12}\tau + M_{13}\frac{h}{\varepsilon} + M_{14}\frac{h^2}{\varepsilon},$$

$$\begin{aligned} \text{где } M_{11} = & N_2 + d_1^{-1}d_4d_5 \left[\frac{b}{2}r_0(3\|K_s(x, s)\|_{C(D_1)} + K_3) \right] + bK_1 \times \\ & \times \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + (1 + (1 + b)C_0)T\|K'(x, x)\|_{C[0,b]}r_1 + d_1^{-1}e^{-1} \times \\ & \times \left[\frac{K_1}{2}\|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \left(bK_1 + \frac{1}{2}\|K_s(x, t)\|_{C(D_1)} \right) r_0 + C_0K_0\|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \right. \\ & + \frac{T}{2}\|z(x, t)\|_{C(D)} + [(1 + C_0b)\|K'(x, x)\|_{C[0,b]} + C_0K_3] + \frac{1}{2}d_1^{-1}C_0e^{-1} \times \\ & \times \|g'(x)\|_{C[0,b]}, \end{aligned}$$

$$M_{12} = d_1^{-1}\frac{T}{2}[d_4d_5(1 + (1 + b)C_0) + K_3(1 + bC_0)]\|z_t(x, t)\|_{C(D)},$$

$$\begin{aligned} M_{13} = & (d_5 + d_1^{-1}d_4d_5(1 + d_6)) \left[\frac{3}{2}bK_2r_0 + T \left(1 + \frac{3}{2}C_0b \right) r_1K_3 \right] + \\ & + d_1^{-2}e^{-2}\theta_1^{-1}\theta_2^{-1}C_1[bC_0(K_0 + K_1)r_0 + T(1 + C_0b)r_1K_3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{14} = & \frac{1}{2}d_1^{-1}d_5\|G'(x)\|_{C[0,b]} \left[\frac{3}{2}bK_2r_0 + T \left(1 + \frac{3}{2}C_0b \right) K_3r_1 \right] + \\ & + d_1^{-1}d_4d_5C_0b \left[(K_1 + \|K_s(x, s)\|_{C(D_1)})r_0 + K_0 \left(\|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \frac{1}{2}r_0 \right) \right]; \end{aligned}$$

$$M_{15} = \frac{1}{2}d_1^{-1}d_4d_5\|p'(x)\|_{C[0,b]} \left[\frac{3}{2}bK_2r_0 + T \left(1 + \frac{3}{2}C_0b \right) K_3r_1 \right].$$

Тогда из (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), приходим к неравенствам

$$|w_{\varepsilon,i}^j - w_i^j| \leq \|\eta_{\varepsilon,i}\|_{C_h} + T\|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} + M_1\tau,$$

$$\|\mu_{\varepsilon,k}^j\|_{C_{h,\tau}} \leq P_0 \left(\|\eta_{\varepsilon,k}^h\|_{C_h} + \|\mu_{\varepsilon,k}^j\|_{C_{h,\tau}} \right) + M_2h + M_3\tau,$$

$$\|\eta_{\varepsilon,k}^h\|_{C_h} \leq M_0 \left(\|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} \right) + M_4h^\alpha + (N_2 + M_{11})h +$$

$$+M_{12}\tau + M_{13}\frac{h}{\varepsilon} + M_{14}\frac{h^2}{\varepsilon}.$$

Суммируя последнее два неравенства получим

$$\begin{aligned} \|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} &\leq q_0 \left(\|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} \right) + \varepsilon d_1^{-1}(d_4 d_5 + e^{-1}) \times \\ &\times \|\varphi_i\|_{C_h} + (M_{10} + N_4 + M_{11})h + M_{12}\tau + \left(M_{13} + M_{15}\frac{h}{\varepsilon} \right) \frac{h}{\varepsilon} + M_{14}\frac{h^2}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} &\leq (1 - q_0)^{-1} [\varepsilon d_1^{-1}(d_4 d_5 + e^{-1}) \|\varphi_i\|_{C_h} + \\ &+ (M_{10} + N_4 + M_{11})h + M_{12}\tau + \left(M_{13} + M_{15}\frac{h}{\varepsilon} \right) \frac{h}{\varepsilon} + M_{14}\frac{h^2}{\varepsilon}, \\ \|w_{\varepsilon,i}^j - w_i^j\| &\leq \|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + T \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} + M_1\tau \leq b_0 \left(\|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} + \|\mu_{\varepsilon,i}^j\|_{C_{h,\tau}} \right) + \\ &+ M_1\tau, \quad b_0 = \max(1, T). \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка теоремы 2.1.1.

Вычисление приближенного решения нелокальной краевой задачи (1.2.18)–(1.2.19) рассмотренной в замечании 1.2 из раздела 1.2, при известных функциях

$$f(x, t) = 1 + t^2 + x(x + 2)e^t, \sigma(t) = t^2, a_0 = 1, q(x) = (3 - e)x^2 + ex^4 - 1, A(x) = 1, C(x) = 1 - x^2 \text{ показывает, что погрешность}$$

$$|\varphi_i - \varphi_{\varepsilon,i}| \leq 0.32658, \quad |w_i^j - w_{\varepsilon,i}^j| \leq 0.32658 \text{ при шаге } h = \tau = 0.1,$$

$$|\varphi_i - \varphi_{\varepsilon,i}| \leq 0.23155, \quad |w_i^j - w_{\varepsilon,i}^j| \leq 0.2165 \text{ при шаге } h = \tau = 0.02,$$

$$|\varphi_i - \varphi_{\varepsilon,i}| \leq 0.14968, \quad |w_i^j - w_{\varepsilon,i}^j| \leq 0.1493 \text{ при шаге } h = \tau = 0.005.$$

Значения $\varphi_{\varepsilon,i}$, $i = 1..n$, $w_{\varepsilon,i}$, $i = 1..n$, $j = 1..n_0$ вычислены по методу (2.1.7), который для задачи (1.2.18), (1.2.19) имеет вид

$$\begin{aligned}
w_{\varepsilon,i}^j &= \varphi_{\varepsilon,i} + \sigma_j - h \sum_{k=1}^i R_s(x_i, t_j, x_k, 0) \varphi_{\varepsilon,k} + \tau \sum_{p=1}^j R_\tau(x_i, t_j, 0, t_p) \sigma_j + \\
&+ h \sum_{k=1}^i \tau \sum_{p=1}^j R(x_i, t_j, x_k, t_p) f_k^p, \\
\varphi_{\varepsilon,i} &= -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \left[h \sum_{l=1}^{k-1} [K_{l,l} - K_{k,l}] \varphi_{\varepsilon,l} - \right. \\
&- C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \varphi_{\varepsilon,l} - h \sum_{l=1}^{i-1} [K_{l,l} - K_{i,l}] \varphi_{\varepsilon,l} + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \times \\
&\times \varphi_{\varepsilon,l} + \mu_k - \mu_i \left. \right] + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \left[h \sum_{k=1}^{i-1} [K_{k,k} - K_{i,k}] \varphi_{\varepsilon,k} - \right. \\
&- C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{l=k+1}^i K_{l,k} \varphi_{\varepsilon,k} + \mu_i + \varepsilon \varphi_{h,0} \left. \right], \quad i = 1..n.
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

При этом значения погрешности $w_i^j - w_{\varepsilon,i}^j$ вычислено согласно формуле

$$w_i^j - w_{\varepsilon,i}^j = \varphi_i - \varphi_{\varepsilon,i} - h \sum_{k=1}^i R_\xi(x_i, t_j, x_k, 0) [\varphi(x_k) - \varphi_\varepsilon(x_k)].$$

Ниже приведены таблицы значений точного решения, приближенного решения вычисленного согласно (2.1.14) и допущенных погрешностей при $h = \tau = 0.02$

x_i	φ_i	$\varphi_{\varepsilon,i}$	погрешность
0.1	1.01000	1.22654	0.21654
0.2	1.04000	1.21296	0.17296
0.3	1.09000	1.20406	0.11406
0.4	1.16000	1.21214	0.05214
0.5	1.25000	1.24487	0.00513
0.6	1.36000	1.30535	0.05465
0.7	1.49000	1.39399	0.09601
0.8	1.64000	1.50993	0.13007
0.9	1.81000	1.65195	0.15805
1	2.00000	1.81888	0.18112

φ_i – точное решение уравнения (1.2.25), $\varphi_{\varepsilon,i}$ – приближенное решение.

Таблица отклонений приближенного решения $w_{\varepsilon,i}^j$, $i = 1..n$, $j = 1..n_0$ задачи (1.2.18), (1.2.19) от точного решения $w(x, t) = 1 + t^2 + x^2 e^t$, при $h = \tau = 0.02$ имеет вид

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
x_1	0.21650	0.21647	0.21644	0.21641	0.21639	0.21638	0.21636	0.21635	0.21634	0.21633
x_2	0.17290	0.17284	0.17278	0.17273	0.17269	0.17266	0.17263	0.17261	0.17259	0.17257
x_3	0.11397	0.11389	0.11381	0.11375	0.11370	0.11365	0.11361	0.11358	0.11356	0.11353
x_4	0.05204	0.05195	0.05187	0.05179	0.05173	0.05168	0.05164	0.05160	0.05157	0.05155
x_5	0.00524	0.00534	0.00542	0.00550	0.00556	0.00561	0.00565	0.00569	0.00572	0.00575
x_6	0.05474	0.05484	0.05492	0.05499	0.05505	0.05510	0.05514	0.05517	0.05520	0.05522
x_7	0.09609	0.09617	0.09624	0.09630	0.09635	0.09640	0.09643	0.09646	0.09649	0.09651
x_8	0.13014	0.13020	0.13025	0.13030	0.13034	0.13037	0.13040	0.13042	0.13044	0.13046
x_9	0.15809	0.15813	0.15816	0.15820	0.15822	0.15824	0.15826	0.15828	0.15829	0.15830
x_{10}	0.18114	0.18115	0.18117	0.18118	0.18119	0.18119	0.18120	0.18121	0.18121	0.18121

2.2. Численное решение интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

2.2.1. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds = g(x), \quad (2.2.1)$$

где известные функции $p(x)$, $K(x, s)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям

а) $p(x), g(x) \in C^1[0, b]$, $K(x, s) \in C^{1,1}(D)$, $D = \{(x, \xi)/0 \leq \xi \leq x \leq b\}$,

$p(0) = g(0) = 0$, $0 \leq K(x, x)$, $0 \leq x \leq b$, $p(x)$ – неубывающая функция, $p(x) > 0$, $\forall x \in (0, x]$;

б) $C_0 p(x) + K(x, x) \geq d_1$, $0 < d_1$, $C_0 = const$.

Преобразовав уравнение (2.2.1) как в разделе 1.4 приводим к виду

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s)ds = \int_0^x [K(s, s) - K(x, s)]\varphi(s) ds -$$

$$-C_0 \int_0^x \left(\int_s^x K(v, s) dv \right) \varphi(s) ds + \mu(x), \quad (2.2.2)$$

где $G(s) = C_0 p(s) + K(s, s)$, $\mu(x) = g(x) + C_0 \int_0^x g(s) ds$.

Рассмотрим уравнение с малым параметром

$$\begin{aligned} (\varepsilon + p(x))\varphi_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s)\varphi_\varepsilon(s)ds = \int_0^x [K(s, s) - K(x, s)]\varphi_\varepsilon(s) ds - \\ - C_0 \int_0^x \left(\int_s^x K(v, s) dv \right) \varphi_\varepsilon(s) ds + \mu(x) + \varepsilon\varphi_h(0), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

которое представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^s [K(\xi, \xi) - \right. \\ \left. - K(s, \xi)]\varphi_\varepsilon(\xi) d\xi - C_0 \int_0^s \left(\int_\xi^s K(v, \xi) dv \right) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi - \int_0^x [K(\xi, \xi) - \right. \\ \left. - K(x, \xi)]\varphi_\varepsilon(\xi) d\xi + C_0 \int_0^x \left(\int_\xi^x K(v, \xi) dv \right) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi + \mu(s) - \mu(x) \right] ds + \\ + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \left[\int_0^x [K(s, s) - K(x, s)]\varphi_\varepsilon(s) ds - \right. \\ \left. - C_0 \int_0^x \left(\int_s^x K(v, s) dv \right) \varphi_\varepsilon(s) ds + \mu(x) + \varepsilon\varphi_h(0) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

На отрезке $[0, b]$ введем равномерную сетку $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0..n, b = nh\}$, n – натуральное число. Пространство сеточных функций $\varphi_i = \varphi(x_i)$ обозначим через C_h , с нормой

$$\|\varphi_i\|_{C_h} = \max_{0 \leq i \leq n} \varphi_i.$$

Используя квадратурную формулу правых прямоугольников для интегралов в (2.2.4), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_{\varepsilon,i} = & -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \left[h \sum_{l=1}^{k-1} [K_{l,l} - K_{k,l}] \times \right. \\
& \times \varphi_{\varepsilon,l} - C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \varphi_{\varepsilon,l} - h \sum_{l=1}^{i-1} [K_{l,l} - K_{i,l}] \varphi_{\varepsilon,l} + \\
& + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \varphi_{\varepsilon,l} + \mu_k - \mu_i \left. \right] + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \times \\
& \times \left[h \sum_{k=1}^{i-1} [K_{k,k} - K_{i,k}] \varphi_{\varepsilon,k} - C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{l=k+1}^i K_{l,k} \varphi_{\varepsilon,k} + \mu_i + \varepsilon \varphi_{h,0} \right], \\
& i = 1..n.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

где $K_{i,k} = K(x_i, x_k)$, $\varphi_{\varepsilon,i} = \varphi_{\varepsilon}(x_i)$, $\mu_i = \mu(x_i)$, $p_i = p(x_i)$, $x_i = ih$,

$k = 1..i$, $i = 1..n$.

Величину $\varphi_{0,h}$ выбираем в виде $\varphi_{0,h} = \frac{\mu_1}{p_1 + hG_1}$, для которой из условия *a-b* следуют оценки:

$$|\varphi_{0,h} - \varphi(0)| \leq N_2 h, \quad |\varphi_{0,h}| \leq \frac{N_1}{d_1}, \quad 0 < N_1, \quad N_2 = \text{const.}$$

В самом деле

$$\begin{aligned}
|\varphi_{0,h}| &= \left| \frac{\mu(x_1)}{p(x_1) + hG(x_1)} \right| = \left| \frac{\mu(x_1) - \mu(x_0)}{p(x_1) - p(x_0) + hG(x_1)} \right| \leq \\
&\leq \frac{h|\mu'(x)|}{h[|p'(x)| + |G(x)|]} \leq \frac{N_1}{d_1}, \quad N_1 = \max_{x \in [0,b]} |\mu'(x)|; \\
|\varphi_{0,h} - \varphi_0| &= \left| \frac{\mu(x_1)}{p(x_1) + hG(x_1)} - \varphi(x_0) \right| \leq |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| + \\
&+ |R_1| \leq h\|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + |R_1|.
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
|R_1| &= \left| \int_{x_0}^{x_1} G(s)\varphi(s)ds - hG(x_1)\varphi(x_1) \right| + \left| \int_0^x g(s)ds - hg(x_1) \right| + \\
&+ \left| \int_0^{x_1} [K(s, s) - K(x, s)]\varphi(s)ds \right| + \left| C_0 \int_0^{x_1} \left(\int_s^{x_1} K(v, s) dv \right) \varphi(s)ds \right| \leq \\
&\leq [\|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \|G'(x)\|_{C[0,b]} + \|G(x)\|_{C[0,b]} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}] \frac{h^2}{2} + \\
&+ \|g'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h^2}{2} + (L_K + C_0 K_1) \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \frac{h^2}{2}, \text{ то}
\end{aligned}$$

$$|\varphi_{0,h} - \varphi_0| \leq N_2 h,$$

где $N_2 = \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \frac{h}{2} [N_0 + \|g'(x)\|_{C[0,b]} + (L_K + C_0 K_1) \times$
 $\times \|\varphi(x)\|_{C[0,b]}],$

$$N_0 = \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \|G'(x)\|_{C[0,b]} + \|G(x)\|_{C[0,b]} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}.$$

Теорема 2.2.1. При выполнении условий а-б и $\varepsilon = O(h^\alpha)$ для всех $0 < \alpha \leq 1/2$, решение системы (2.2.5), при $h \rightarrow 0$, равномерно сходится к φ_i – точному решению уравнения (2.2.1), причем имеет место оценка

$$\|\varphi_{\varepsilon,i} - \varphi_i\|_{C_h} \leq M_1 h^\alpha + M_2 h^{1-\alpha} + M_3 h^{2-\alpha},$$

$$0 < M_j = \text{const}, j = 1, 2, 3.$$

Доказательство. Из (2.2.2), прибавляя в обе части $\varepsilon\varphi(x)$ имеем

$$\begin{aligned}
(\varepsilon + p(x))\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s)ds &= \int_0^x [K(s, s) - K(x, s)]\varphi(s)ds - \\
&- C_0 \int_0^x \left(\int_s^x K(v, s)dv \right) \varphi(s)ds + \mu(x) + \varepsilon\varphi(x). \tag{2.2.6}
\end{aligned}$$

Используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon+p(x)}\right)$ уравнение (2.2.6) представим в следующем виде

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = & -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^s [K(\xi, \xi) - \right. \\
& -K(s, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^s \left(\int_{\xi}^s K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^x [K(\xi, \xi) - \\
& -K(x, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^x \left(\int_{\xi}^x K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi + \mu(s) - \mu(x) + \\
& \left. + \varepsilon(\varphi(s) - \varphi(x)) \right] ds + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \left[\int_0^x [K(s, s) - \right. \\
& -K(x, s)] \varphi(s) ds - C_0 \int_0^x \left(\int_s^x K(v, s) dv \right) \varphi(s) ds + \mu(s) + \varepsilon \varphi(x) \left. \right]. \quad (2.2.7)
\end{aligned}$$

Полагая $x = x_i$, $i = 1..n$ в (2.2.7), применим формулу правых прямоугольников для интегралов в уравнении (2.2.7). Тогда получим систему

$$\begin{aligned}
\varphi_i = & \frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \left[h \sum_{l=1}^{k-1} [K_{l,l} - K_{k,l}] \varphi_l - \right. \\
& - C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \varphi_l - h \sum_{l=1}^{i-1} [K_{l,l} - K_{i,l}] \varphi_l + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \varphi_l + \\
& \left. + \mu_k - \mu_i + \varepsilon(\varphi_k - \varphi_i) \right] + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \left[h \sum_{k=1}^{i-1} [K_{k,k} - \right. \\
& - K_{i,k}] \varphi_k - C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{l=k+1}^i K_{l,k} \varphi_k + \varepsilon \varphi_i + \mu_i \left. \right] + R_i, \quad i = 1..n, \quad (2.2.8)
\end{aligned}$$

где R_i – сумма всех остаточных членов интегралов.

Введем вектор погрешности $\eta_{\varepsilon,i}^h = \varphi_{\varepsilon}(x_i) - \varphi(x_i) = \varphi_{\varepsilon,i} - \varphi_i$, $i = 1..n$. Действие оператора H_{ε}^h на сеточную функцию $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ определяется по формуле

$$H_\varepsilon^h[\varphi_i] = \frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} [\varphi_i - \varphi_k] -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) [\varphi_i - \varphi_0], \quad i = 1..n.$$

Тогда из (2.2.5) и (2.2.8) получим

$$\eta_{\varepsilon,i}^h = -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times$$

$$\times \left[h \sum_{l=1}^{k-1} [K_{l,l} - K_{k,l}] \eta_{\varepsilon,i}^h - C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \eta_{\varepsilon,i}^h - \right.$$

$$\left. - h \sum_{l=1}^{i-1} [K_{l,l} - K_{i,l}] \eta_{\varepsilon,i}^h + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \eta_{\varepsilon,i}^h \right] +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \left[h \sum_{k=1}^{i-1} [K_{k,k} - K_{i,k}] \eta_{\varepsilon,k}^h - \right.$$

$$\left. - C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{l=k+1}^i K_{l,k} \eta_{\varepsilon,k}^h + \varepsilon H_\varepsilon^h[\varphi_i] \right] + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \times$$

$$\times \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) (\varphi_{h,0} - \varphi_0) + R_i, \quad i = 1..n. \quad (2.2.9)$$

Отсюда проведя оценки получим

$$|\eta_{\varepsilon,i}^h| = \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times \right.$$

$$\times \left[h \sum_{l=1}^{k-1} [K_{l,l} - K_{k,l}] \eta_{\varepsilon,i}^h - C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \eta_{\varepsilon,i}^h - \right.$$

$$\left. - h \sum_{l=1}^{i-1} [K_{l,l} - K_{i,l}] \eta_{\varepsilon,i}^h + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \eta_{\varepsilon,i}^h \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \left[h \sum_{k=1}^{i-1} [K_{k,k} - K_{i,k}] \eta_{\varepsilon,k}^h - \right. \right. \\
& \left. \left. - C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i K_{m,l} \eta_{\varepsilon,l}^h + \varepsilon (\varphi_{h,0} - \varphi_0) \right] \right| + |\varepsilon H_\varepsilon^h(\varphi_i)| + \\
& + |R_i| \leq T_{12} h \sum_{l=1}^{i-1} |\eta_{\varepsilon,l}^h| + N_2 h + \varepsilon |H_\varepsilon^h(\varphi_i)| + |R_i|, \quad i = 1..n,
\end{aligned}$$

где $T_{12} = (L_K + C_0 K_1) d_1^{-1} (d_4 d_5 + e^{-1})$, $d_4 = \max_{x \in [0,b]} |G(x)|$,

$$d_5 = \sup \left| \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(- \frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \right|,$$

$$N_2 = \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \frac{h}{2} [N_0 + \|g'(x)\|_{C[0,b]} + (L_K + C_0 K_1) \|\varphi(x)\|_{C[0,b]}].$$

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла-Беллмана [5, с.21] и учитывая оценку лемма 2.1.2, имеем

$$\begin{aligned}
|\eta_{\varepsilon,i}^h| & \leq (N_2 h + \varepsilon |H_\varepsilon^h[\varphi_i]| + |R_i|) \exp(T_{12} b) \leq \\
& \leq (N_2 h + \varepsilon N_9 + |R_i|) \exp(T_{12} b),
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

где $N_9 = d_1^{-1} (d_4 d_5 + e^{-1}) \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}$.

Остаточный член R_i , определяется в виде

$$\begin{aligned}
R_i = & - \frac{1}{\varepsilon + p_i} \left\{ \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^s [K(\xi, \xi) - \right. \right. \\
& \left. \left. - K(s, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^s \left(\int_\xi^s K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - \right. \right. \\
& \left. \left. - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_\xi^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi \right] ds +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \right] \times \\
& \times \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \times \right. \\
& \times \varphi(\xi) d\xi - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \times \\
& \times \varphi(\xi) d\xi \left. \right] ds + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - \right. \\
& - \exp \left(- h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \left. \right] \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - \right. \\
& - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + \\
& + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi \left. \right] ds + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(- h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \times \\
& \times \left[\frac{(G(s) - G_k)}{\varepsilon + p(s)} + \frac{G_k}{\varepsilon + p(s)} - \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right] \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - \right. \\
& - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + \\
& + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi \left. \right] ds + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(- h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \times \\
& \times \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h \sum_{l=1}^{k-1} [K_{l,l} - K_{k,l}] \varphi_l + C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \varphi_l + \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \times \\
& \times \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - h \sum_{l=1}^{i-1} [K_{l,l} - K_{i,l}] \varphi_l + \\
& + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \varphi_l \Big] ds \Big\} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \int_0^{x_i} \exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \times \\
& \times \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} (\varphi_i - \varphi(s)) ds - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^i \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times \\
& \times (\varphi_i - \varphi_k) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \exp \left(- \int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) (\varphi_i - \varphi_0) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \times \\
& \times \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) (\varphi_i - \varphi_0) + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \left[\exp \left(- \int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) - \right. \\
& \left. - \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \right] \left[\int_0^{x_i} [K(s, s) - K(x_i, s)] \varphi(s) ds + \right. \\
& \left. + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_s^{x_i} K(v, s) dv \right) \varphi(s) ds \right] + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \times \\
& \times \left[\int_0^{x_i} [K(s, s) - K(x_i, s)] \varphi(s) ds - C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_s^{x_i} K(v, s) dv \right) \varphi(s) ds - \right. \\
& \left. - h \sum_{k=1}^i [K_{k,k} - K_{i,k}] \varphi_k + C_0 h \sum_{k=1}^i h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \varphi_k + C_0 \int_0^{x_i} g(s) ds - \right. \\
& \left. - C_0 h \sum_{k=1}^i g_i \right].
\end{aligned}$$

Разбивая остаточный член на суммы выражений, имеем оценки

$$|R_i| \leq |R_{1,i}| + |R_{2,i}| + |R_{3,i}| + |R_{4,i}| + |R_{5,i}| + |R_{6,i}| + |R_{7,i}| +$$

$$+|R_{8,i}| + |R_{9,i}| + |R_{10,i}| + |R_{11,i}|,$$

$$\begin{aligned}
|R_{1,i}| = & \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^s [K(\xi, \xi) - \right. \right. \\
& -K(s, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^s \left(\int_{\xi}^s K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - \\
& -K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi \left. \right] ds \Big| \leq \frac{1}{\varepsilon + p_i} \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^s [K(x_k, \xi) - K(s, \xi)] \times \right. \right. \\
& \times \varphi(\xi) d\xi - \int_s^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_s^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \times \\
& \times \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^s K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi \left. \right] ds \Big| \leq \frac{1}{\varepsilon + p_i} \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[L_K(x_k - s) \int_0^s |\varphi(\xi)| d\xi + \right. \\
& + L_K \int_s^{x_k} |\varphi(\xi)| (x_k - \xi) d\xi + C_0 K_1(x_k - s) \int_0^s |\varphi(\xi)| d\xi + C_0 K_1 \times \\
& \times \int_s^{x_k} |\varphi(\xi)| (x_k - \xi) d\xi \left. \right] ds \leq \frac{h}{\varepsilon + p_i} 2(L_K + C_0 K_1) b r_0 \times \\
& \times \left[\sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right] \leq \frac{h}{\varepsilon} 2(L_K + C_0 K_1) b r_0 \times \\
& \times \int_0^{x_i} \exp\left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) ds \left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \leq 2(L_K + C_0 K_1) b r_0 \frac{h}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

где $0 < L_K$ - коэффициент Липшица функции $K(x, s)$ по переменной x
 $K_1 = \max_{D_1} |K(x, s)|$, $D_1 = \{(x, s) / 0 \leq s \leq x \leq b\}$, $r_0 = \max_{x \in [0, b]} |\varphi(x)|$;

$$\begin{aligned}
|R_{2,i}| = & \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\exp \left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - \right. \right. \\
& - \exp \left(-\int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left. \int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - \right. \\
& - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + \\
& \left. + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi \right] ds \Big| \leq 2br_0(L_K + C_0K_1)d_1^{-1}d_4 \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \exp \left(-\int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{(x_i - x_k)h}{\varepsilon + p_i} \left| \exp \left(\int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi - \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - 1 \right| \leq 2br_0(L_K + C_0K_1)d_1^{-1}d_4 \frac{h}{\varepsilon} \times \\
& \times \left| 1 - \exp \left(\int_s^{x_k} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \right| \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times \\
& \times \exp \left(-\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \leq 2br_0(L_K + C_0K_1)d_1^{-1}d_4 \frac{h}{\varepsilon}, \quad d_4 = \max_{x \in [0, b]} |G(x)|, \\
d_5 = & \sup \left| \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(-\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \right|; \\
|R_{3,i}| = & \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\exp \left(-\int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \right] \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \times \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \times \\
& \times \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi \Bigg] ds \Bigg| \leq 2br_0(L_K + C_0K_1)d_4 \frac{h}{\varepsilon} \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \Bigg| 1 - \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi - \right. \\
& \left. - h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \Bigg| \leq 2br_0(L_K + C_0K_1) \frac{d_4 d_6}{d_1} \frac{h}{\varepsilon} \sum_{k=1}^i \exp \left(- \frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times \\
& \times \frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \leq 2br_0(L_K + C_0K_1)d_1^{-1}d_4d_5d_6 \frac{h}{\varepsilon}, \\
& d_6 = \sup \left| 1 - \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi - h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \right|; \\
& |R_{4,i}| = \left| - \frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(- h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{(G(s) - G_k)}{\varepsilon + p(s)} \times \right. \\
& \times \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \right. \\
& \left. \left. - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \times \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi \right] ds \right| \leq \\
& \leq br_0(L_K + C_0K_1) \|G'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h^2}{\varepsilon} \sum_{k=1}^i \exp \left(- h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \leq \\
& \leq br_0(L_K + C_0K_1) \|G'(x)\|_{C[0,b]} d_1^{-1} \frac{h^2}{\varepsilon} \sum_{k=1}^i \exp \left(- \frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \leq br_0(L_K + C_0K_1)\|G'(x)\|_{C[0,b]}d_1^{-1}d_5\frac{h^2}{\varepsilon}; \\
|R_{5,i}| &= \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) G_k \left(\frac{1}{\varepsilon + p(s)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\varepsilon + p_k} \right) \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \times \right. \right. \\
& \quad \times \varphi(\xi) d\xi - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \times \\
& \quad \times \varphi(\xi) d\xi \left. \right] ds \Big| \leq 2br_0d_4(L_K + C_0K_1) \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \times \\
& \quad \times \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\|p'(x)\|_{C[0,b]}(x_k - s)}{(\varepsilon + p_k)(\varepsilon + p(s))} ds \leq b^2r_0d_1^{-1}d_4\|p'(x)\|_{C[0,b]} \times \\
& \quad \times (L_K + C_0K_1) \frac{h^2}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^i \exp\left(-\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \left(\frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \right) \leq b^2r_0d_1^{-1} \times \\
& \quad \times (L_K + C_0K_1)d_4d_5\|p'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h^2}{\varepsilon^2}; \\
|R_{6,i}| &= \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \left[\int_0^{x_k} [K(\xi, \xi) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - h \sum_{l=1}^k [K_{l,l} - K_{k,l}] \varphi_l - \int_0^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \times \right. \right. \\
& \quad \times \varphi(\xi) d\xi + h \sum_{l=1}^i [K_{l,l} - K_{i,l}] \varphi_l \left. \right] ds \Big| \leq \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \times \\
& \quad \times \frac{G_k}{\varepsilon + p_i} \frac{1}{\varepsilon + p_k} \left[\int_0^{x_k} [K(x_i, \xi) - K(x_k, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + h \sum_{l=1}^i [K_{k,l} - K_{i,l}] \varphi_l - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| - \int_{x_k}^{x_i} [K(\xi, \xi) - K(x_i, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + h \sum_{l=k+1}^i [K_{l,l} - K_{i,l}] \varphi_l \right] ds \Big| \leq \\
& \leq d_4 \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{1}{\varepsilon + p_i} \frac{1}{\varepsilon + p_k} \left[\sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} [K(x_i, \xi) - \right. \\
& - K(x_k, \xi) + K(x_k, x_i) - K(x_i, x_l)] \varphi(x_l) d\xi - \sum_{l=k+1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} [K(\xi, \xi) - \\
& - K(x_i, \xi)] [\varphi(\xi) - \varphi(x_l)] d\xi + \sum_{l=k+1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} [K(x_l, x_l) - K(x_i, x_l) - \\
& - K(\xi, \xi) + K(x_i, \xi)] \varphi(x_l) d\xi \Big] ds \leq d_4 \frac{h}{\varepsilon} \sum_{k=1}^i \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \times \\
& \times \frac{1}{\varepsilon + p_i} \left[\|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} (x_i - x_k)(x_l - \xi) d\xi + \right. \\
& + 2 \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} (x_l - \xi) d\xi + \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \times \\
& \times \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \sum_{l=k+1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} (x_i - \xi)(x_l - \xi) d\xi + (2 \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} + \\
& + \|K'_x(x, s)\|_{C(D)}) \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \sum_{l=k+1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} (x_l - \xi) d\xi \Big] \leq d_4 \frac{h}{\varepsilon} \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{h}{\varepsilon + p_i} \left[\frac{b^2}{2} \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \right. \\
& + b \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} + \frac{b^2}{2} \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \\
& \left. + b \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} + \frac{b}{2} \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \right] \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{d_4 h}{d_1 \varepsilon} [b^2 \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0, b]} + 2b \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0, b]} + \\
&+ \frac{b}{2} \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0, b]}] \sum_{k=1}^i \exp\left(-\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \left(\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \leq \\
&\leq d_1^{-1} d_4 d_5 [b^2 \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0, b]} + b[2 \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} + \\
&+ \frac{1}{2} \|K'_x(x, s)\|_{C(D)}] \|\varphi(x)\|_{C[0, b]}] \frac{h}{\varepsilon}; \\
&|R_{7,i}| = \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times \right. \\
&\times \left[C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - C_0 h \sum_{l=1}^i h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \varphi_l + \right. \\
&+ \left. C_0 h \sum_{l=1}^k h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \varphi_l - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi \right] ds \Big| \leq \\
&\leq d_4 \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{1}{\varepsilon + p_i} \frac{h}{\varepsilon + p_k} \times \\
&\times \left[C_0 \left| \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv \right) [\varphi(\xi) - \varphi_l] d\xi \right| + \right. \\
&+ \left| C_0 \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left(\int_{\xi}^{x_i} K(v, \xi) dv - h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \right) \varphi_l d\xi \right| + \\
&+ \left| C_0 \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left(h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} - \int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) \varphi_l d\xi \right| - \\
&- \left| C_0 \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left(\int_{\xi}^{x_k} K(v, \xi) dv \right) [\varphi(\xi) - \varphi_l] d\xi \right| \Big| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq d_4 \frac{h}{\varepsilon} \sum_{k=1}^i \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{1}{\varepsilon + p_i} [C_0 \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left(\int_{\xi}^{x_l} |K(v, \xi)| dv \right) \times \\
&\times |\varphi(\xi) - \varphi(x_l)| d\xi + C_0 \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left(\int_{\xi}^{x_l} |K(v, \xi)| dv \right) |\varphi(x_l)| d\xi + \\
&+ C_0 \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \sum_{m=l+1}^i \int_{x_{m-1}}^{x_m} |K(v, \xi) - K(x_m, x_l)| |\varphi(x_l)| dv d\xi - C_0 \times \\
&\times \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left(\int_{\xi}^{x_l} |K(v, \xi)| dv \right) |\varphi(x_l)| d\xi + C_0 \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} \sum_{m=l+1}^k \int_{x_{m-1}}^{x_m} |K(x_m, x_l) - \\
&- K(v, \xi)| |\varphi(x_l)| dv d\xi - C_0 \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left(\int_{\xi}^{x_k} |K(v, \xi)| dv \right) |\varphi(\xi) - \\
&- \varphi(x_l)| d\xi] \leq d_4 \frac{h}{\varepsilon} \sum_{k=1}^i \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{1}{\varepsilon + p_i} [C_0 \|K(x, s)\|_{C(D)} \times \\
&\times \|\varphi'(x)\|_{C[0, b]} \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} (x_i - \xi)(x_l - \xi) d\xi + C_0 \|K(x, s)\|_{C(D)} \times \\
&\times \|\varphi(x)\|_{C[0, b]} \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} (x_l - \xi) d\xi + C_0 \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0, b]} \times \\
&\times \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \sum_{m=l+1}^i \int_{x_{m-1}}^{x_m} (x_m - v) dv d\xi + C_0 \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \times \\
&\times \|\varphi(x)\|_{C[0, b]} \sum_{l=1}^i \int_{x_{l-1}}^{x_l} \sum_{m=l+1}^i \int_{x_{m-1}}^{x_m} (x_l - \xi) dv d\xi + C_0 \|K(x, s)\|_{C(D)} \times \\
&\times \|\varphi(x)\|_{C[0, b]} \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} (x_l - \xi) d\xi + C_0 \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0, b]} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} \sum_{m=l+1}^k \int_{x_{m-1}}^{x_m} (x_m - v) dv d\xi + C_0 \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \times \\
& \times \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} \sum_{m=l+1}^k \int_{x_{m-1}}^{x_m} (x_l - \xi) dv d\xi + C_0 \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \times \\
& \times \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} (x_k - \xi)(x_l - \xi) d\xi \Bigg] \leq d_4 \frac{h}{\varepsilon} \sum_{k=1}^i \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{h}{\varepsilon + p_i} \times \\
& \times \left[C_0 \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \frac{b^2}{2} + C_0 \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \frac{b}{2} + \right. \\
& + C_0 \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \frac{b^2}{2} + C_0 \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \frac{b^2}{2} + \\
& + C_0 \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \frac{b}{2} + C_0 \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \frac{b^2}{2} + \\
& \left. + C_0 \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \frac{b^2}{2} + C_0 \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \frac{b^2}{2} \right] \leq \\
& \leq d_1^{-1} d_4 \frac{h}{\varepsilon} [C_0 b^2 \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + C_0 b \|K(x, s)\|_{C(D)} \times \\
& \times \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} + C_0 b^2 (\|K'_x(x, s)\|_{C(D)} + \|K'_s(x, s)\|_{C(D)}) \|\varphi(x)\|_{C[0,b]}] \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \exp \left(-\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \leq \frac{d_4 d_5}{d_1} [C_0 b^2 \|K(x, s)\|_{C(D)} \times \\
& \times \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + C_0 b \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} + C_0 b^2 (\|K'_x(x, s)\|_{C(D)} + \\
& + \|K'_s(x, s)\|_{C(D)}) \|\varphi(x)\|_{C[0,b]}] \frac{h}{\varepsilon};
\end{aligned}$$

Согласно лемме 2.1.3

$$\begin{aligned}
|R_{8,i}| &= \left| -\frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \int_0^{x_i} \exp \left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} (\varphi(x_i) - \varphi(s)) ds + \right. \\
& \left. + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-\int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) (\varphi_i - \varphi_0) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times h \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} (\varphi_i - \varphi_k) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \times \\
& \times \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) (\varphi_i - \varphi_0) \Bigg| \leq |\varepsilon(H_\varepsilon \varphi)(x_i) - \varepsilon H_\varepsilon^h[\varphi_i]| \leq \\
& \leq N_4 h + N_5 \frac{h}{\varepsilon}, \quad 0 < N_4, N_5 = \text{const}; \\
& |R_{9,i}| = \left| \frac{1}{\varepsilon + p_i} \left[\exp\left(-\int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) - \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \right] \times \right. \\
& \times \left. \left[\int_0^{x_i} [K(s, s) - K(x_i, s)] \varphi(s) ds + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_s^{x_i} K(v, s) dv \right) \varphi(s) ds \right] \right| \leq \\
& \leq \frac{b}{2} r_0 (L_K + C_0 K_1) \frac{x_i}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \times \\
& \times \left[1 - \exp\left(h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} - \int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \right] \leq \frac{b}{2} r_0 d_1^{-1} (L_K + C_0 K_1) \times \\
& \times \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp\left(-\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \frac{1}{2} [b \|G'(x)\|_{C[0,b]} + \|G(x)\|_{C[0,b]} \|p'(x)\|_{C[0,b]}] \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \frac{h}{\varepsilon + p_k} \Bigg] \frac{h}{\varepsilon} \leq d_1^{-1} \frac{b}{4} (L_K + C_0 K_1) r_0 e^{-1} \|G'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h}{\varepsilon} + d_1^{-1} r_0 \frac{b}{4} \frac{h}{\varepsilon} \times \\
& \times (L_K + C_0 K_1) \|G(x)\|_{C[0,b]} \|p'(x)\|_{C[0,b]} h \sum_{k=1}^i \frac{1}{\varepsilon + p_k} \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times \\
& \times \exp\left(-\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \leq d_1^{-1} \frac{b}{4} (L_K + C_0 K_1) r_0 e^{-1} \|G'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h}{\varepsilon} + \\
& + d_1^{-2} \frac{b}{4} (L_K + C_0 K_1) r_0 \|G(x)\|_{C[0,b]} \|p'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h}{\varepsilon} \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right)^2 \times \\
& \times \exp\left(-\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \leq d_1^{-1} \frac{b}{4} r_0 e^{-1} [\|G'(x)\|_{C[0,b]} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2e^{-1}d_1^{-1}\|G(x)\|_{C[0,b]}\|p'(x)\|_{C[0,b]}(L_K + C_0K_1)\frac{h}{\varepsilon}; \\
& |R_{10,i}| = \left| \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \left[\int_0^{x_i} [K(s,s) - K(x_i,s)]\varphi(s)ds - \right. \right. \\
& \quad \left. - C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_s^{x_i} K(v,s) dv \right) \varphi(s)ds - h \sum_{k=1}^i [K_{k,k} - K_{i,k}]\varphi_k + \right. \\
& \quad \left. + C_0 h \sum_{k=1}^i h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \varphi_k \right] \Big| \leq \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \times \\
& \quad \times \left[\sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} [K(s,s) - K(x_i,s)][\varphi(s) - \varphi_k]ds + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} [K(s,s) - \right. \\
& \quad \left. - K(x_i,s) - K_{k,k} + K_{i,k}]\varphi_k ds - C_0 h \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\int_s^{x_i} K(v,s)dv \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times [\varphi(s) - \varphi_k]ds + C_0 \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} - \int_s^{x_i} K(v,s)dv \right] \varphi_k ds \right] \leq \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) [\|K'_x(x,s)\|_{C(D)}\|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \times \\
& \quad \times \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_i - s)(x_l - s)ds + 2\|K'_s(x,s)\|_{C(D)}\|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \times \\
& \quad \times \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - s)ds + C_0 b \|K(x,s)\|_{C(D)}\|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \times \\
& \quad \times \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - s)ds + C_0 b \|K'_s(x,s)\|_{C(D)}\|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - s) ds + C_0 \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - s) ds] \leq d_1^{-1} \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(-\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times \\
& \times \left[\frac{b}{2} \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} h + \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} h + \right. \\
& + C_0 \frac{b}{2} \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} h + C_0 \frac{b}{2} \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} h + \\
& \left. + C_0 \frac{1}{2} \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} h \right] \leq d_1^{-1} e^{-1} \left[\frac{b}{2} \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \times \right. \\
& \times \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \left(1 + C_0 \frac{b}{2} \right) \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} + \\
& \left. + C_0 \frac{b}{2} \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + C_0 \frac{1}{2} \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} \right] h; \\
|R_{11,i}| &= \left| \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \left[C_0 \int_0^{x_i} g(s) ds - C_0 h \sum_{k=1}^i g_k \right] \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) C_0 \|g'(x)\|_{C[0,b]} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - s) ds \leq \\
&\leq d_1^{-1} C_0 \|g'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h}{2} \left| \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(-\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \right| \leq \\
&\leq d_1^{-1} e^{-1} C_0 \frac{1}{2} \|g'(x)\|_{C[0,b]} h.
\end{aligned}$$

На основе приведенных оценок, имеем

$$|R_i| \leq \tilde{M}_1 h + \tilde{M}_2 \frac{h}{\varepsilon} + \tilde{M}_3 \frac{h^2}{\varepsilon},$$

$$\begin{aligned}
& \text{где } \tilde{M}_1 = \varepsilon N_4 + d_1^{-1} e^{-1} \left[\frac{b}{2} \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \left(1 + C_0 \frac{b}{2} \right) \times \right. \\
& \times \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0,b]} + C_0 \frac{b}{2} \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} +
\end{aligned}$$

$$+ C_0 \frac{1}{2} \|K(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0, b]} + C_0 \frac{1}{2} \|g'(x)\|_{C[0, b]} \Big],$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2 &= br_0(L_K + C_0 K_1)[2 + 2d_1^{-1}d_4d_5 + 2d_1^{-1}d_4d_5d_6 + \frac{d_5}{d_1} \|G'(x)\|_{C[0, b]} + \\ &+ \frac{1}{4} d_1^{-1} e^{-1} (\|G'(x)\|_{C[0, b]} + 2d_1^{-1} e^{-1} \|G(x)\|_{C[0, b]} \|p'(x)\|_{C[0, b]})] + \frac{d_4 d_5}{d_1} \times \\ &\times [b^2 \|K'_x(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi'(x)\|_{C[0, b]} + \|\varphi(x)\|_{C[0, b]} + C_0 b^2 (\|K'_x(x, s)\|_{C(D)} + \\ &+ \|K'_s(x, s)\|_{C(D)} \|\varphi(x)\|_{C[0, b]})] + d_1^{-1} d_4 d_5 b^2 r_0 (L_K + C_0 K_1) \|p'(x)\|_{C[0, b]}, \\ \tilde{M}_3 &= d_1^{-1} d_4 d_5 br_0 (L_K + C_0 K_1). \end{aligned}$$

Тогда, из (2.2.10) по сеточной норме получим

$$\|\eta_{\varepsilon, i}^h\|_{C_h} \leq \left((\tilde{M}_1 + N_2)h + N_9 \varepsilon + \tilde{M}_2 \frac{h}{\varepsilon} + \tilde{M}_3 \frac{h^2}{\varepsilon} \right) \exp(T_{12}b).$$

Следовательно, учитывая связь $\varepsilon = O(h^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1/2$ и подстановку приходим к утверждению теоремы 2.2.1.

Замечание 2.2.1. Погрешность, допускаемая в процессе вычисления $\varphi_{\varepsilon, i}$ по правилу (2.2.1) обозначим через δ_i . Тогда $\varphi_{\varepsilon, i}$ будет удовлетворять систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{\varepsilon, i} &= -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times \\ &\times \left[h \sum_{l=1}^k [K_{l, l} - K_{k, l}] \varphi_{\varepsilon, l} - C_0 h \sum_{l=1}^k h \sum_{m=l+1}^k K_{m, l} \varphi_{\varepsilon, l} - \right. \\ &- h \sum_{l=1}^i [K_{l, l} - K_{i, l}] \varphi_{\varepsilon, l} + C_0 h \sum_{l=1}^i h \sum_{m=l+1}^i K_{m, l} \varphi_{\varepsilon, l} + \\ &+ \mu_k - \mu_i \Big] + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \left[h \sum_{k=1}^i [K_{k, k} - \right. \\ &- K_{i, k}] \varphi_{\varepsilon, k} - C_0 h \sum_{k=1}^i h \sum_{m=k+1}^i K_{m, k} \varphi_{\varepsilon, k} + \mu_i + \varepsilon \varphi_{h, 0} \Big] + \end{aligned}$$

$+M_4\delta_i, \quad i = 1..n, \quad 0 < M_4 = \text{const.}$

Если δ_i – погрешность вычислительного правила стремится к нулю равномерно относительно i при $h \rightarrow 0$ и выполняются условия а-б, то при $\varepsilon = O(h^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1/2$ и $h \rightarrow 0$ имеет место оценка

$$\|\varphi_{\varepsilon,i} - \varphi_i\|_{C_h} \leq M_1 h^\alpha + M_2 h^{1-\alpha} + M_3 h^{2-\alpha} + M_5 \delta_i,$$

$0 < M_5 = \text{const.}$

Пример 2.1. Пусть $K(x, t) = 1 - tx$, $g(x) = x^4(0,8x^2 + 0,25)$, $p(x) = x^3$.

На рис.3 приводится значение точного решения $\varphi(x) = x^3$ и приближенного решения, полученные численным методом (2.2.5). Расчеты показывают, что при шаге $h = 0,01$ погрешность не превосходит $R = 0,126$, при $h = 0,001, R = 0,056$, при $h = 0,0005, R = 0,047$.

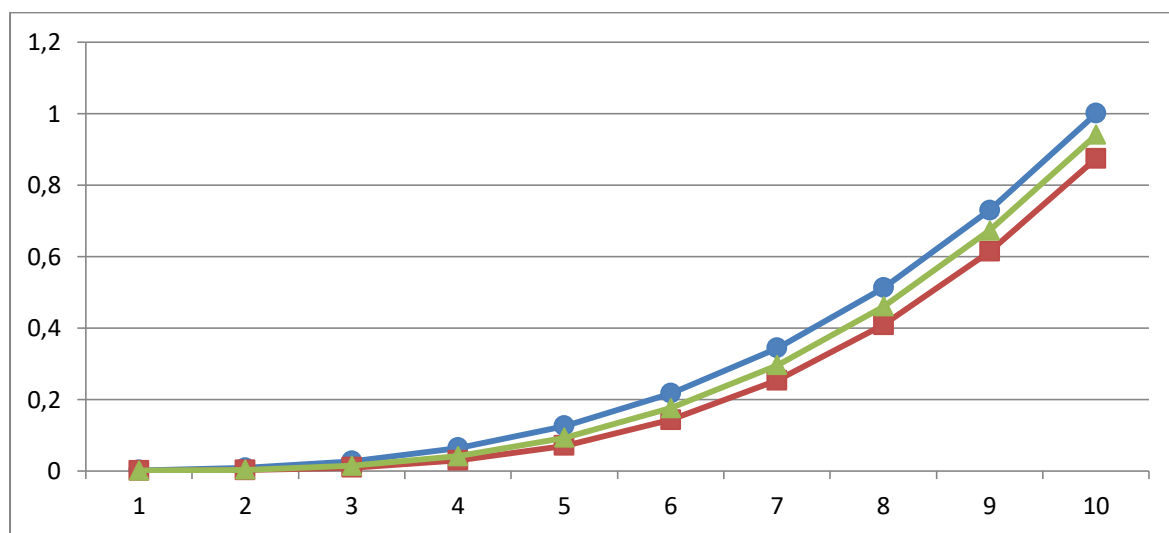


Рис.3. • – точное и приближенные решения: ♦ – при $h = 0,01$, ▲ – $h = 0,001$.

2.2.2. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds = \int_0^x N(x, s, \varphi(s))ds + g(x). \quad (2.2.11)$$

Пусть для известных непрерывных функций $p(x)$, $K(x, s)$, $g(x)$ выполняются условия а, в пункта 2.2.1, а функция $N(x, s, \varphi)$ такая что

a) $N(x, s, \varphi) \in C^{1,0,0}(D \times R^1)$, $N(x, x, \varphi) = 0$, $N_x(x, s, \varphi) = 0$,
 $|N(x, s, \varphi) - N(x, s, \varphi_0) - N(v, s, \varphi) + N(v, s, \varphi_0)| \leq L_N(x - v) \times$
 $\times |\varphi - \varphi_0|$, $0 \leq s \leq v \leq x \leq b$, $0 < L_N = \text{const}$, $x \geq v$.

Уравнение (2.2.1) преобразуем к эквивалентному уравнению

$$\begin{aligned} p(x)\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s)ds = \int_0^x [K(s, s) - K(x, s)]\varphi(s)ds - \\ - C_0 \int_0^x \left(\int_s^x K(\tau, s)d\tau \right) \varphi(s)ds + \int_0^x N(x, s, \varphi(s))ds + \\ + C_0 \int_0^x \left(\int_s^x N(\tau, s, \varphi(s))d\tau \right) ds + \mu(x), \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

где $G(s) = C_0 p(s) + K(s, s)$, $\mu(x) = g(x) + C_0 \int_0^x g(s)ds$.

Рассмотрим уравнение с малым параметром

$$\begin{aligned} (\varepsilon + p(x))\varphi_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s)\varphi_\varepsilon(s)ds = \int_0^x [K(s, s) - K(x, s)]\varphi_\varepsilon(s)ds - \\ - C_0 \int_0^x \left(\int_s^x K(\tau, s)d\tau \right) \varphi_\varepsilon(s)ds + \int_0^x N(x, s, \varphi_\varepsilon(s))ds + \\ + C_0 \int_0^x \left(\int_s^x N(\tau, s, \varphi_\varepsilon(s))d\tau \right) ds + \varepsilon\varphi_h(0) + \mu(x). \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Перепишем уравнение (2.2.13) используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon + p(x)}\right)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \times \\ \times \left[\int_0^s [K(\xi, \xi) - K(s, \xi)]\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi - C_0 \int_0^s \left(\int_\xi^s K(v, \xi)dv \right) \varphi_\varepsilon(\xi)d\xi - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^x [K(\xi, \xi) - K(x, \xi)] \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi + C_0 \int_0^x \left(\int_\xi^x K(v, \xi) dv \right) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi + \\
& + \int_0^s N(s, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) d\xi - \int_0^x N(x, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) d\xi + \\
& + C_0 \int_0^s \left(\int_\xi^s N(v, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) dv \right) d\xi - C_0 \int_0^x \left(\int_\xi^x N(v, \xi, \varphi_\varepsilon(\xi)) dv \right) d\xi + \\
& + \mu(s) - \mu(x) \Big] ds + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp \left(- \int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) \times \\
& \times \left[\int_0^x [K(s, s) - K(x, s)] \varphi_\varepsilon(s) ds - C_0 \int_0^x \left(\int_s^x K(v, s) dv \right) \varphi_\varepsilon(s) ds + \right. \\
& + \int_0^x N(x, s, \varphi_\varepsilon(s)) ds + C_0 \int_0^x \left(\int_s^x N(v, s, \varphi_\varepsilon(s)) dv \right) ds + \\
& \left. + \mu(x) + \varepsilon \varphi_h(0) \right]. \tag{2.2.14}
\end{aligned}$$

Пологая $x = x_i$, $x_i \in \omega_h$, $i = 1..n$ в (2.2.14) и используя квадратурную формулу правых прямоугольников для интегралов в (2.2.14), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_{\varepsilon,i} = & - \frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times \\
& \times [h \sum_{l=1}^{k-1} (K_{l,l} - K_{k,l}) \varphi_{\varepsilon,l} - C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \varphi_{\varepsilon,l} - \\
& - h \sum_{l=1}^{i-1} (K_{l,l} - K_{i,l}) \varphi_{\varepsilon,l} - C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \varphi_{\varepsilon,l} + \\
& + h \sum_{l=1}^{k-1} N(x_k, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) - h \sum_{l=1}^{i-1} N(x_i, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k N(x_m, x_l, \varphi_{\varepsilon, l}) - C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i N(x_m, x_l, \varphi_{\varepsilon, l}) + \\
& + \mu_k - \mu_i] + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \left[h \sum_{l=1}^{i-1} (K_{k,k} - K_{i,k}) \varphi_{\varepsilon, k} - \right. \\
& - C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \varphi_{\varepsilon, k} + h \sum_{k=1}^{i-1} N(x_i, x_k, \varphi_{\varepsilon, k}) + \\
& \left. + C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i N(x_m, x_k, \varphi_{\varepsilon, k}) + \mu_i + \varphi_{h,0} \right], \\
& i = 1..n, \quad \varphi_{h,0} = \frac{\mu_1}{(p_1 + hG_1)}. \tag{2.2.15}
\end{aligned}$$

Теорема 2.2.2. Пусть выполняются условия $a)$ и $\varepsilon = O(h^\alpha)$ для всех $0 < \alpha \leq 1/2$, тогда решение системы (2.2.13) при $h \rightarrow 0$ равномерно сходится к φ_i точному решению уравнения (2.2.11), причем имеет место оценка

$$\|\varphi_{\varepsilon, i} - \varphi_i\|_{C_h} \leq N_{21} h^\alpha + N_{22} h^{1-\alpha} + N_{23} h^{2-\alpha},$$

$$0 < N_{2j} = \text{const}, \quad j = \overline{1,4}.$$

Доказательство. Из уравнения (2.2.12) получим

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon + p(x))\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s)ds = \int_0^x [K(s, s) - K(x, s)]\varphi(s)ds - \\
& - C_0 \int_0^x \left(\int_s^x K(v, s)dv \right) \varphi(s)ds + \int_0^x N(x, s, \varphi(s))ds + \\
& + C_0 \int_0^x \left(\int_s^x N(\tau, s, \varphi(s))d\tau \right) ds + \mu(x) + \varepsilon\varphi(x). \tag{2.2.16}
\end{aligned}$$

Используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon + p(x)}\right)$ уравнение (2.2.16) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = & -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^s [K(\xi, \xi) - \right. \\
& -K(s, \xi)] \varphi(\xi) d\xi - C_0 \int_0^s \left(\int_\xi^s K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^x [K(\xi, \xi) - \\
& -K(x, \xi)] \varphi(\xi) d\xi + C_0 \int_0^x \left(\int_\xi^x K(v, \xi) dv \right) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^s N(s, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - \\
& - \int_0^x N(x, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + C_0 \int_0^s \left(\int_\xi^s N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi - \\
& - C_0 \int_0^x \left(\int_\xi^x N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi + \mu(s) - \mu(x) + \varepsilon(\varphi(s) - \\
& - \varphi(x)) \Big] ds + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \left[\int_0^x [K(s, s) - K(x, s)] \times \right. \\
& \times \varphi(s) ds - C_0 \int_0^x \left(\int_s^x K(v, s) dv \right) \varphi(s) ds + \int_0^x N(x, s, \varphi(s)) ds + \\
& \left. + C_0 \int_0^x \left(\int_s^x N(v, s, \varphi(s)) dv \right) ds + \mu(x) + \varepsilon\varphi(x) \right]. \tag{2.2.17}
\end{aligned}$$

В уравнении (2.2.17) при $x = x_i$, $i = 1..n$ применим формулу правых прямоугольников для интегралов в этом уравнении и получим систему

$$\begin{aligned}
\varphi_i = & -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \left[h \sum_{l=1}^{k-1} (K_{l,l} - K_{k,l}) \varphi_l - \right. \\
& - C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \varphi_l - h \sum_{l=1}^{i-1} (K_{l,l} - K_{i,l}) \varphi_l - C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \varphi_l + \\
& \left. + h \sum_{l=1}^{k-1} N(x_k, x_l, \varphi_l) - h \sum_{l=1}^{i-1} N(x_i, x_l, \varphi_l) + C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k N(x_m, x_l, \varphi_l) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i N(x_m, x_l, \varphi_l) + \mu_k - \mu_i + \varepsilon(\varphi_k - \varphi_i) \Bigg] + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \times \\
& \times \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \left[h \sum_{k=1}^{i-1} (K_{k,k} - K_{i,k}) \varphi_k - C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \varphi_k + \right. \\
& \left. + h \sum_{k=1}^{i-1} N(x_i, x_k, \varphi_k) + C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i N(x_m, x_k, \varphi_k) + \mu_i + \varepsilon \varphi_i \right] + \\
& + \chi_i, \tag{2.2.18}
\end{aligned}$$

где χ_i – сумма всех остаточных членов интегралов.

Введем вектор погрешности $\eta_{\varepsilon,i}^h = \varphi_{\varepsilon}(x_i) - \varphi(x_i) = \varphi_{\varepsilon,i} - \varphi_i$, $i = 1..n$. Тогда из (2.2.15) и (2.2.18) получим

$$\begin{aligned}
\eta_{\varepsilon,l}^h = & -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \left[h \sum_{l=1}^{k-1} (K_{l,l} - K_{k,l}) \eta_{\varepsilon,l}^h - \right. \\
& - C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \eta_{\varepsilon,l}^h - h \sum_{l=1}^{i-1} (K_{l,l} - K_{i,l}) \eta_{\varepsilon,l}^h + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \times \\
& \times \eta_{\varepsilon,l}^h + h \sum_{l=1}^{k-1} [N(x_k, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) - N(x_k, x_l, \varphi_l)] - h \sum_{l=1}^{i-1} [N(x_i, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) - \\
& - N(x_i, x_l, \varphi_l)] + C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k [N(x_m, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) - N(x_m, x_l, \varphi_l)] - \\
& - C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i [N(x_m, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) - N(x_m, x_l, \varphi_l)] + \varepsilon(\varphi_k - \varphi_i) \Bigg] + \\
& + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \left[h \sum_{k=1}^{i-1} (K_{k,k} - K_{i,k}) \eta_{\varepsilon,k}^h - \right. \\
& - C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \eta_{\varepsilon,k}^h + h \sum_{k=1}^{i-1} [N(x_i, x_k, \varphi_{\varepsilon,k}) - N(x_i, x_k, \varphi_k)] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i [N(x_m, x_k, \varphi_{\varepsilon,k}) - N(x_m, x_k, \varphi_k)] - \varepsilon(\varphi_i - \varphi_{h,0}) \Big] + \\
& + \chi_i, \quad i = 1..n. \tag{2.2.19}
\end{aligned}$$

Отсюда проведя оценки получим

$$\begin{aligned}
|\eta_{\varepsilon,l}^h| = & \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times \right. \\
& \times \left[h \sum_{l=1}^{k-1} (K_{l,l} - K_{k,l}) \eta_{\varepsilon,l}^h - C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k K_{m,l} \eta_{\varepsilon,l}^h - \right. \\
& - h \sum_{l=1}^{i-1} (K_{l,l} - K_{i,l}) \eta_{\varepsilon,l}^h + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l} \eta_{\varepsilon,l}^h + \\
& + h \sum_{l=1}^{k-1} [N(x_k, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) - N(x_k, x_l, \varphi_l)] - h \sum_{l=1}^{i-1} [N(x_i, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) - \\
& - N(x_i, x_l, \varphi_l)] + C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k [N(x_m, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) - N(x_m, x_l, \varphi_l)] - \\
& - C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i [N(x_m, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) - N(x_m, x_l, \varphi_l)] \Big| + \left| \frac{1}{\varepsilon + p_i} \times \right. \\
& \times \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \left[h \sum_{k=1}^{i-1} (K_{k,k} - K_{i,k}) \eta_{\varepsilon,k}^h - C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \times \right. \\
& \times \eta_{\varepsilon,k}^h + h \sum_{k=1}^{i-1} [N(x_i, x_k, \varphi_{\varepsilon,k}) - N(x_i, x_k, \varphi_k)] + \\
& + C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} [N(x_m, x_k, \varphi_{\varepsilon,k}) - N(x_m, x_k, \varphi_k)] \Big| + \varepsilon |H_{\varepsilon}^h(\varphi_i)| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) (\varphi_{h,0} - \varphi_i) \right| + |\chi_i| \leq \\
& \leq d_4(T_2 + 2(1 + C_0)L_N)h \sum_{l=1}^{i-1} |\eta_{\varepsilon,l}^h| \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \times \\
& \times \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \frac{1}{\varepsilon + p_k} ds + (T_2 + (1 + C_0)L_N) \frac{x_i}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \times \\
& \times h \sum_{k=1}^{i-1} |\eta_{\varepsilon,k}^h| + \varepsilon |H_\varepsilon^h(\varphi_i)| + N_2 h + |\chi_i| \leq d_1^{-1} d_4 (T_2 + 2(1 + C_0)L_N) \times \\
& \times h \sum_{l=1}^{i-1} |\eta_{\varepsilon,l}^h| \frac{h}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{i-1} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) + \\
& + (T_2 + (1 + C_0)L_N) \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \left(h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) h \sum_{k=1}^{i-1} |\eta_{\varepsilon,k}^h| + \\
& + \varepsilon |H_\varepsilon^h(\varphi_i)| + N_2 h + |\chi_i| \leq d_1^{-1} (d_4 d_5 + e^{-1}) [(T_2 + (1 + C_0)L_N)] \times \\
& \times h \sum_{k=1}^{i-1} |\eta_{\varepsilon,k}^h| + \varepsilon \|H_\varepsilon^h(\varphi_i)\| + N_2 h + |\chi_i|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{где } \chi_i = R_i - \frac{1}{\varepsilon + p_i} \left\{ \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \times \right. \\
& \times \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - \int_0^s N(s, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + \right. \\
& + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_\xi^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi - C_0 \int_0^s \left(\int_\xi^s N(v, \xi, \varphi(\xi)) d\xi \right) dv \left. \right] ds + \\
& + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\exp \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - \int_0^{x_k} N(x_k, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + \right. \\
& + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi \Big] ds + \\
& + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \right] \times \\
& \times \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - \int_0^{x_k} N(x_k, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + \right. \\
& + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi \Big] ds + \\
& + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{(G(s) + G_k)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - \right. \\
& - \int_0^{x_k} N(x_k, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi - \\
& - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi \Big] ds + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \times \\
& \times \left[\frac{G_k}{\varepsilon + p(s)} - \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right] \left[h \sum_{l=1}^{k-1} N(x_k, x_l, \varphi_l) - \int_0^{x_k} N(x_k, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + \right. \\
& + \int_0^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - h \sum_{l=1}^{i-1} N(x_i, x_l, \varphi_l) - \\
& - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi + C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k N(x_m, x_l, \varphi_l) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi - C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i N(x_m, x_l, \varphi_l) \Big] ds + \\
& + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \left[h \sum_{l=1}^{k-1} N(x_k, x_l, \varphi_l) - \right. \\
& - \int_0^{x_k} N(x_k, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + \int_0^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - h \sum_{l=1}^{i-1} N(x_i, x_l, \varphi_l) - \\
& - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi + C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=l+1}^k N(x_m, x_l, \varphi_l) + \\
& \left. + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi - C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i N(x_m, x_l, \varphi_l) \right] ds \Big\} + \\
& + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \left[\exp \left(- \int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) - \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \right] \times \\
& \times \left[- \int_0^{x_i} N(x_i, s, \varphi(s)) ds - C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_s^{x_i} N(v, s, \varphi(s)) dv \right) ds \right] + \\
& + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \left[- \int_0^{x_i} N(x_i, s, \varphi(s)) ds + \right. \\
& + h \sum_{k=1}^{i-1} N(x_i, x_k, \varphi_k) - C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_s^{x_i} N(v, s, \varphi(s)) dv \right) ds + \\
& \left. + C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=k+1}^k N(x_m, x_k, \varphi_k) \right].
\end{aligned}$$

Величина R_i , определяется также как в 2.2.1 и для него имеет место оценка

$$|R_i| \leq \tilde{M}_{11}^0 h + \tilde{M}_{12}^0 \frac{h}{\varepsilon} + \tilde{M}_{13}^0 \frac{h^2}{\varepsilon}, \quad 0 < \tilde{M}_{1j}^0 = \text{const}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Имеем следующие оценки:

$$\begin{aligned}
1) \quad |\chi_{i,1}| &= \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \times \right. \\
&\times \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - \int_0^s N(s, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + \right. \\
&+ C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi - C_0 \int_0^s \left(\int_{\xi}^s N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi \left. \right] ds \Big| \leq \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\int_0^s [N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) - \right. \right. \\
&- N(s, \xi, \varphi(\xi))] d\xi + \int_s^{x_k} [N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) - N(\xi, \xi, \varphi(\xi))] d\xi + \\
&+ C_0 \int_0^s \left(\int_s^{x_k} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi + C_0 \int_s^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi \left. \right] ds \Big| \leq \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} [\|N'_x(x, s, \varphi(s))\|_{C(D)} \times \right. \\
&\times \int_0^s (x_k - s) d\xi + \|N'_x(x, s, \varphi(s))\|_{C(D)} \int_s^{x_k} (x_k - \xi) d\xi + \\
&+ C_0 \|N(x, s, \varphi(s))\|_{C(D)} \int_0^s (x_k - s) d\xi + C_0 \|N(x, s, \varphi(s))\|_{C(D)} \times \\
&\times \int_s^{x_k} (x_k - \xi) d\xi \left. \right] ds \Big| \leq \frac{h}{\varepsilon} \left| \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right| \times \\
&\times 2b(Q_1 + C_0 Q_0) \leq \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-\int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \times
\end{aligned}$$

$$\times d_s \left(- \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) 2b(Q_1 + C_0 Q_0) \leq 2b(Q_1 + C_0 Q_0) \frac{h}{\varepsilon},$$

где $Q_0 = \max_{D \times R^1} |N(x, s, \varphi(s))|$, $Q_1 = \max_{D \times R^1} |N'_x(x, s, \varphi)|$;

$$\begin{aligned} 2) \quad |\chi_{i,2}| &= \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\exp \left(- \int_{\xi}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \right] \left[\int_0^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - \int_0^{x_k} N(x_k, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi \right] ds \right| \leq \\ &\leq 2b(Q_1 + C_0 Q_0) d_4 \sum_{k=1}^i \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \frac{h}{\varepsilon + p_k} \times \\ &\times \left[\exp \left(\int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi - \int_s^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - 1 \right] \leq 2b(Q_1 + C_0 Q_0) \times \\ &\times d_1^{-1} d_4 \frac{h}{\varepsilon} \left| 1 - \exp \left(- \int_s^{x_k} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \right| \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times \\ &\times \exp \left(- \frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \leq 2b(Q_1 + C_0 Q_0) d_1^{-1} d_4 d_5 \frac{h}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

$$d_4 = \max_{x \in [0, b]} |G(x)|, \quad d_5 = \sup \left| \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(- \frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \right|;$$

$$\begin{aligned} 3) \quad |\chi_{i,3}| &= \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} \left[\exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \right] \left[\int_0^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - \int_0^{x_k} N(x_k, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi \Bigg] ds \Bigg| \leq \\
& \leq 2b(Q_1 + C_0 Q_0) d_4 \sum_{k=1}^i \exp \left(- \int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi \right) \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \frac{h}{\varepsilon + p_k} \times \\
& \times \left[1 - \exp \left(\int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi - h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \right] \leq 2b(Q_1 + C_0 Q_0) \times \\
& \times d_1^{-1} d_4 \frac{h}{\varepsilon} \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(- \frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times \\
& \times \left[1 - \exp \left(\int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi - h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \right] \leq \\
& \leq 2b d_1^{-1} d_4 d_5 d_6 (Q_1 + C_0 Q_0) \frac{h}{\varepsilon}, \\
& d_6 = \sup \left| 1 - \exp \left(\int_{x_k}^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi - h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \right|; \\
4) \quad |\chi_{i,4}| & = \left| - \frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{1}{\varepsilon + p(s)} \times \right. \\
& \times (G(s) - G_k) \left[\int_0^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - \int_0^{x_k} N(x_k, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + \right. \\
& \left. + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi \right] ds \Bigg| \leq \\
& \leq b(Q_1 + C_0 Q_0) \|G'(x)\|_{C[0,b]} \sum_{k=1}^i \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \times \\
& \times \frac{h^2}{\varepsilon + p_k} \leq b d_1^{-1} (Q_1 + C_0 Q_0) \|G'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h^2}{\varepsilon} \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp\left(-\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \leq bd_1^{-1}d_5(Q_1 + C_0Q_0)\|G'(x)\|_{C[0,b]}\frac{h^2}{\varepsilon}; \\
5) \quad |\chi_{i,5}| &= \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) G_k \left[\frac{1}{\varepsilon + p(s)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\varepsilon + p_k} \right] \left[\int_0^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - \int_0^{x_k} N(x_k, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + \right. \right. \\
& \left. \left. + C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi - C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi \right] ds \right| \leq \\
& \leq 2bd_4(Q_1 + C_0Q_0) \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \times \\
& \times \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\|p'(x)\|_{C[0,b]}(x_k - s)}{(\varepsilon + p_k)(\varepsilon + p(s))} ds \leq b^2d_1^{-1}d_4\|p'(x)\|_{C[0,b]}(Q_1 + C_0Q_0) \times \\
& \times \frac{h^2}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp\left(-\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \leq b^2d_1^{-1}d_4d_5 \times \\
& \times \|p'(x)\|_{C[0,b]}(Q_1 + C_0Q_0) \frac{h^2}{\varepsilon^2}; \\
6) \quad |\chi_{i,6}| &= \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times \right. \\
& \times \left[h \sum_{l=1}^{k-1} N(x_k, x_l, \varphi_l) - \int_0^{x_k} N(x_k, \xi, \varphi(\xi)) d\xi + \int_0^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi - \right. \\
& \left. \left. - h \sum_{l=1}^{i-1} N(x_i, x_l, \varphi_l) \right] ds \right| \leq d_4 \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{1}{\varepsilon + p_i} \times \\
& \times \frac{1}{\varepsilon + p_k} \left[h \sum_{l=1}^{k-1} [N(x_k, x_l, \varphi_l) - N(x_i, x_l, \varphi_l)] - h \sum_{l=k+1}^{i-1} N(x_i, x_l, \varphi_l) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| - \int_0^{x_k} [N(x_k, \xi, \varphi(\xi)) - N(x_i, \xi, \varphi(\xi))] d\xi + \int_{x_k}^{x_i} N(x_i, \xi, \varphi(\xi)) d\xi \right| ds \leq \\
& \leq d_4 \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{1}{\varepsilon + p_i} \frac{1}{\varepsilon + p_k} \times \\
& \times \left[\sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{l-1}}^{x_l} |N(x_k, x_l, \varphi_l) - N(x_i, x_l, \varphi_l) - N(x_k, \xi, \varphi(\xi)) + \right. \\
& \left. + N(x_i, \xi, \varphi(\xi))| d\xi - \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{l-1}}^{x_l} |N(x_i, x_l, \varphi_l) - N(x_i, \xi, \varphi(\xi))| d\xi \right] ds \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^i \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} b d_4 \frac{h}{\varepsilon} [L_N \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + \\
& + \frac{1}{2} L_N \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}] \leq \frac{3}{2} L_N \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} d_1^{-1} d_4 b \frac{h}{\varepsilon} \times \\
& \times \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(-\frac{(x_i - x_k) d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \leq \frac{3}{2} b L_N \|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} \times \\
& \times d_1^{-1} d_4 d_5 \frac{h}{\varepsilon};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) \quad |\chi_{i,7}| &= \left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp \left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} \right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times \right. \\
& \times \left[-C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{s=l+1}^k N(x_s, x_l, \varphi(x_l)) + C_0 \int_0^{x_k} \left(\int_{\xi}^{x_k} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi + \right. \\
& \left. \left. + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{s=l+1}^i N(x_s, x_l, \varphi(x_l)) - C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi \right] ds \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq d_4 \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{1}{\varepsilon + p_i} \frac{1}{\varepsilon + p_k} \times \\
&\times \left| -C_0 \int_0^{x_k} \int_{x_k}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv d\xi - C_0 \int_{x_k}^{x_i} \int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv d\xi + \right. \\
&\left. + C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{l=k+1}^i N(x_s, x_l, \varphi(x_l)) + C_0 h \sum_{l=k+1}^{i-1} h \sum_{s=l+1}^i N(x_s, x_l, \varphi(x_l)) \right| ds \leq \\
&\leq d_4 \left[2bC_0Q_0 + \frac{b}{2}C_0Q_0 \right] \frac{h}{\varepsilon} \sum_{k=1}^i \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \times \\
&\times \frac{(x_i - x_k)}{\varepsilon + p_i} \leq d_1^{-1} d_4 \left[2bC_0Q_0 + \frac{b}{2}C_0Q_2 \right] \frac{h}{\varepsilon} \sum_{k=1}^i \left(\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \times \\
&\times \exp\left(-\frac{(x_i - x_k)d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \leq d_1^{-1} d_4 d_5 \left[2bC_0Q_0 + \frac{b}{2}C_0Q_2 \right] \frac{h}{\varepsilon}; \\
8) \quad |\chi_{i,8}| &= \left| \frac{1}{\varepsilon + p_i} \left[\exp\left(-\int_0^{x_i} \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) - \exp\left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \right] \times \right. \\
&\times \left. \left[-\int_0^{x_i} N(x_i, s, \varphi(s)) ds - C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_{\xi}^{x_i} N(v, \xi, \varphi(\xi)) dv \right) d\xi \right] \right| \leq \\
&\leq \frac{b}{2} d_1^{-1} (Q_1 + C_0Q_0) \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp\left(-\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \times \\
&\times \left| 1 - \exp\left(h \sum_{l=1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l} - \int_0^{x_i} \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi\right) \right| \leq \frac{b}{4} d_1^{-1} (Q_1 + C_0Q_0) \times \\
&\times \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp\left(-\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i}\right) \left[b \|G'(x)\|_{C[0,b]} + \|G(x)\|_{C[0,b]} \|p'(x)\|_{C[0,b]} \times \right. \\
&\times \left. \sum_{k=1}^i \frac{h}{\varepsilon + p_k} \right] \frac{h}{\varepsilon} \leq \frac{b^2}{4} d_1^{-1} e^{-1} (Q_1 + C_0Q_0) \|G'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h}{\varepsilon} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b}{4d_1} (Q_1 + C_0 Q_0) \|G(x)\|_{C[0,b]} \|p'(x)\|_{C[0,b]} \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right)^2 \exp \left(-\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \frac{h}{\varepsilon} \leq \\
& \leq \frac{b^2}{4} d_1^{-1} e^{-1} \|G'(x)\|_{C[0,b]} (Q_1 + C_0 Q_0) \frac{h}{\varepsilon} + \frac{b}{2} d_1^{-1} e^{-2} (Q_1 + C_0 Q_0) \times \\
& \times \|G(x)\|_{C[0,b]} \|p'(x)\|_{C[0,b]} \frac{h}{\varepsilon} \leq \frac{b}{2} d_1^{-1} e^{-1} (Q_1 + C_0 Q_0) \left[\frac{b}{2} \|G'(x)\|_{C[0,b]} + \right. \\
& \left. + e^{-1} \|G(x)\|_{C[0,b]} \|p'(x)\|_{C[0,b]} \right] \frac{h}{\varepsilon};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9) \quad |\chi_{i,9}| &= \left| \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \left[- \int_0^{x_i} N(x_i, s, \varphi(s)) ds - \right. \right. \\
& - C_0 \int_0^{x_i} \left(\int_s^{x_i} N(v, s, \varphi(s)) dv \right) ds + h \sum_{k=1}^{i-1} N(x_i, x_k, \varphi(x_k)) + \\
& \left. \left. + C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i N(x_m, x_k, \varphi(x_k)) \right] \right| \leq \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \times \\
& \times \left| \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [N(x_i, x_k, \varphi(x_k)) - N(x_i, s, \varphi(s))] ds + \right. \\
& \left. + C_0 \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sum_{m=k+1}^i \int_{x_{m-1}}^{x_m} [N(x_m, x_k, \varphi(x_k)) - N(v, s, \varphi(s))] dv ds \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{2} d_1^{-1} h (Q_2 + b C_0 Q_1) \frac{x_i}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \leq \frac{1}{2} d_1^{-1} h \times \\
& \times (Q_2 + b C_0 Q_1) \left(\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \exp \left(-\frac{x_i d_1}{\varepsilon + p_i} \right) \leq \frac{1}{2} d_1^{-1} e^{-1} (Q_2 + b C_0 Q_1) h,
\end{aligned}$$

где $Q_2 = \max_{D \times R^1} |N'_\xi(x, \xi, \varphi(\xi))|$.

На основе приведенных оценок, имеем

$$|\chi_i| \leq |R_i| + N_{10} h + N_{11} \frac{h}{\varepsilon} + N_{12} \frac{h^2}{\varepsilon^2},$$

где $N_{10} = \frac{1}{2}d_1^{-1}e^{-1}(Q_2 + bC_0Q_0)$;

$$\begin{aligned}
N_{11} = & b[2(Q_1 + C_0Q_0) + 2d_1^{-1}d_4d_5(Q_1 + C_0Q_0) + 2d_1^{-1}d_4d_5d_6 \times \\
& \times (Q_1 + C_0Q_0) + bd_1^{-1}d_5\|G'(x)\|_{C[0,b]}(Q_1 + C_0Q_0) + \frac{3}{2}d_1^{-1}d_4d_5 \times \\
& \times L_N\|\varphi'(x)\|_{C[0,b]} + d_1^{-1}d_4d_5C_0\left[2Q_0 + \frac{1}{2}Q_2\right] + \frac{1}{2}d_1^{-1}e^{-1}(Q_1 + C_0Q_0) \times \\
& \times \left[\frac{b}{2}\|G'(x)\|_{C[0,b]} + e^{-1}\|G(x)\|_{C[0,b]}\|p'(x)\|_{C[0,b]}\right] + b^2d_1^{-1}d_4d_5 \times \\
& \times \|p'(x)\|_{C[0,b]}(Q_1 + C_0Q_0), \quad N_{12} = bd_1^{-1}d_5(Q_1 + C_0Q_0)\|G'(x)\|_{C[0,b]}.
\end{aligned}$$

Тогда, в силу оценки леммы 2.1.3, по сеточной норме получим

$$\begin{aligned}
\|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} \leq & \left[N_9\varepsilon + N_2 + M_{11}^0 + N_{10}h + (M_{12}^0 + N_{11})\frac{h}{\varepsilon} + \right. \\
& \left. + (M_{13}^0 + N_{12})\frac{h^2}{\varepsilon} \right] \exp(T_{13}b).
\end{aligned}$$

Следовательно, учитывая связь $\varepsilon = O(h^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1/2$, приходим к утверждению теоремы 2.2.2.

Замечание 2.2.2. Погрешность, допускаемая в процессе вычисления $\varphi_{\varepsilon,i}$ по правилу (2.2.15) обозначим через δ_i . Тогда $\varphi_{\varepsilon,i}$ будет удовлетворять систему уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_{\varepsilon,i} = & -\frac{1}{\varepsilon + p_i}h \sum_{k=1}^{i-1} \exp\left(-h \sum_{l=k+1}^i \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \times \\
& \times \left[h \sum_{l=1}^{k-1} (K_{l,l} - K_{k,l})\varphi_{\varepsilon,l} - C_0h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{s=l+1}^k K_{s,l}\varphi_{\varepsilon,l} - h \sum_{l=1}^{i-1} (K_{l,l} - K_{i,l})\varphi_{\varepsilon,l} - \right. \\
& \left. - C_0h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i K_{m,l}\varphi_{\varepsilon,l} + h \sum_{l=1}^{k-1} N(x_k, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) - h \sum_{l=1}^{i-1} N(x_i, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_0 h \sum_{l=1}^{k-1} h \sum_{m=k+1}^k N(x_m, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) + C_0 h \sum_{l=1}^{i-1} h \sum_{m=l+1}^i N(x_m, x_l, \varphi_{\varepsilon,l}) + \mu_k - \\
& - \mu_i \Big] + \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp \left(-h \sum_{k=1}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \right) \Big[h \sum_{k=1}^{i-1} (K_{k,k} - K_{i,k}) \varphi_{\varepsilon,k} - \\
& - C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i K_{m,k} \varphi_{\varepsilon,k} + h \sum_{k=1}^i N(x_i, x_k, \varphi_{\varepsilon,k}) + \\
& + C_0 h \sum_{k=1}^{i-1} h \sum_{m=k+1}^i N(x_m, x_k, \varphi_{\varepsilon,k}) + \mu_i + \varphi_{h,0} \Big] + N_{16} \delta_i,
\end{aligned}$$

$$i = 1..n, \quad 0 < N_{16} = \text{const.}$$

Если δ_i - погрешность вычислительного правила стремится к нулю равномерно относительно i при $h \rightarrow 0$ и выполняются условия $a)$, то при $\varepsilon = O(h^\alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$ и $h \rightarrow 0$ имеет место оценка

$$\|\varphi_{\varepsilon,i} - \varphi_i\|_{C_h} \leq N_{21} h^\alpha + N_{22} h^{\alpha-1} + N_{23} h^{2-\alpha} + \delta_i N_{17},$$

$$0 < N_{17} = \text{const.}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты исследований - это обоснование применимости метода регуляризации лаврентьевского типа к нелокальным краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Доказано регуляризируемость интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с коэффициентной неубывающей непрерывной функцией. Рассмотрены вопросы численного решения нелокальной краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, а также линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. Разработан метод численного решения нелокальной краевой задачи для дифференциальных уравнений гиперболического типа. Доказано сходимость численного решения к точному решению задачи, получены оценки погрешности по сеточной норме. Полученные результаты распространены и для интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с неубывающей непрерывной коэффициентной функцией на основе регуляризированного уравнения и квадратурных формул правых прямоугольников.

Проведённые исследования имеют практическую ценность и могут быть использованы для дальнейших исследований некоторых классов нелокальных краевых задач. Работа представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области дифференциальных уравнений и численных методов.

ВЫВОДЫ

В монографии методом регуляризации лаврентьевского типа исследованы нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго и третьего порядка, в случае необратимости неубывающей функции $p(x)$ в нелокальных условиях. Доказаны теоремы о сходимости регуляризованного решения к точному решению нелокальных краевых задач. Рассмотрены примеры для нелокальных краевых задач, подтверждающие верность поставленных условий на известные функции. Разработанный метод регуляризации применен для интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с неубывающей непрерывной коэффициентной функцией. Построено регуляризующее уравнение, доказаны теоремы о сходимости по равномерной метрике регуляризованного решения к точному решению, установлены условия единственности решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в пространстве непрерывных функций.

Разработан метод численного решения нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа и интегральных уравнений Вольтерра третьего рода, основанного на методе регуляризации и квадратурных формулах правых прямоугольников. Доказаны теоремы сходимости, получены оценки погрешности по сеточной норме. Рассмотрены примеры для численного метода. Полученные результаты могут быть применены для приближенного решения дифференциальных уравнений третьего порядка и других задач, приводимые к интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа [Текст] / Ж. Адамар. - М.: Наука, 1978. -352 с.
2. Алифанов О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач [Текст]/О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. - М.: Наука, 1988. -288 с.
3. Алымкулов К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач [Текст]/ К. Алымкулов. - Бишкек: Илим, 1992. -138 с.
4. Аллэр М. Эффективный потенциал воды при высыхании почв [Текст]/М. Аллэр // Термодинамика почвенной влаги. - Л.: Гидрометеоиздат, 1966. - С. 325-360.
5. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы [Текст]/А.С. Апарцин. - Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1999. - 193 с.
6. Асанов А. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст]/А. Асанов, Г. Ободоева //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек, 1994. - Вып. 25. - С. 65-74.
7. Асанова А. Т. Двухточечная краевая задача для систем квазилинейных гиперболических уравнений [Текст]/А. Т. Асанова // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Матер. Росс.-Каз. симпозиума. - Нальчик-Эльбрус, 2004. - С. 32 - 36.
8. Белоцерковский Ч. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях [Текст]/Ч.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов. - М.: Наука, 1985. - 256 с.
9. Бухгейм А. Л. Уравнение Вольтерра и обратные задачи [Текст] /А.Л. Бухгейм. - Новосибирск: Наука, 1983. -207с.
10. Булатов М. В. Численное решение систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст]/М.В. Булатов // Вычислительные технологии. -2001. -Т.6, - №4. С. 3-8
11. Булатов М. В. Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений Вольтерра [Текст]/М.В. Булатов // ЖВМ и МФ. - 2002. -Т. 42, № 3. - С. 330-335.

12. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст]/ А.В. Бицадзе. - М.: Наука, 1981. - 448 с.
13. Владимиров В. С. Уравнения математической физики [Текст]/В.С. Владимиров. - М.: Наука, 1976. - 527 с.
14. Вабищевич П. Н. Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности [Текст]/П. Н. Вабищевич //Дифференц. уравнения. - 1981. -Т. 17, №7. - С. 1193-1199.
15. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач [Текст]/ Ф.П. Васильев - М.: Наука, 1988. - 552 с.
16. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы [Текст]/А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. - Киев: Наукова думка, 1979. - 543 с.
17. Горяченко В. Д. К динамике одной диффузионной системы [Текст]/В.Д. Горяченко, В.А. Денисов, Б.Н. Иванов и др.// Математические модели в экологии. - Горький: Изд-во ГГУ, 1980. - С. 47-61.
18. Глушак А. В. Регуляризация интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и обратных задач для уравнения Эйлера-Дарбу [Текст]/А.В. Глушак, Т.Т. Каракеев // Вестник ВГУ (Воронежский госуниверситет). - Воронеж, 2005. - Серия физика, математика. № 2. - С. 124-127.
19. Глушак А. В. Численное решение линейной обратной задачи для уравнения Эйлера-Дарбу [Текст]/А.В. Глушак, Т.Т. Каракеев // ЖВМ и МФ - 2006. - Т.46., №5 -С. 848-857.
20. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости [Текст] / Б.П. Демидович. - М.: Наука, 1967. - 472 с.
21. Денисов А. М. О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода [Текст]/А.М. Денисов // ЖВМ и МФ, 1975. -Т. 15, №4. -С. 1053-1056.
22. Искандаров С. Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных уравнений и интегральных уравнений типа Вольтера [Текст]/С. Искандаров//Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1998. - Вып. 27. - С. 109-127.
23. Иманалиев М. И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение [Текст]/М.И. Иманалиев. - Фрунзе: Илим, 1977. - 348 с.

24. Иманалиев М. И. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст]/М.И. Иманалиев, А. Асанов //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1988. - Вып. 21. -С. 3-38.
25. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теплопроводности с неклассическим краевым условием [Текст]/Н.И. Ионкин //Дифференц. уравнения. - 1977. - Т. 13, № 2. - С. 294-304.
26. Какишов К. Асимптотические оценки решений сингулярно-возмущенных интегральных уравнений типа Вольтерра в случаях, когда свободный член имеет разрыв первого рода [Текст]/К. Какишов // Известия НАН КР, 1996. № 1. - С. 79 -85.
27. Каракеев Т.Т. Регуляризация нелокальной граничной задачи для псевдопараболических уравнений [Текст]/Т.Т. Каракеев //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2003. - Вып.32. - С. 179-183.
28. Каракеев Т. Т. Решение интегральных уравнений Вольтерра третьего рода методом регуляризованных квадратур [Текст]/Т.Т. Каракеев // Вестник КГПУ. - Бишкек, 2004. -Вып. 2. -С. 10-17.
29. Каракеев Т. Т. Численное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст]/Т.Т. Каракеев // Вестник СГТУ (Самарский государственный технический университет). - Самара, 2004,- Естествен. -техн. науки. - Вып. 30. - С.73-76.
30. Каракеев Т. Т. Регуляризация обратной задачи для системы Эйлера-Дарбу [Текст]/Т.Т. Каракеев//Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Мат. Росс.-Каз. симпозиума. - Нальчик-Эльбрус, 2004. - С. 119-122.
31. Кожанов А. И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений [Текст]/А.И. Кожанов, Л.С. Пулькина //Дифференц. уравнения. -2006. - Т.42, - С. 1166-1179.
32. Кигурадзе Т. И. Об одной краевой задаче для квазилинейных гиперболических систем [Текст]/Т.И. Кигурадзе // ДАН, 1993. - Т. 328, № 2. - С. 135-137.
33. Лаврентьев М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст]/М. М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. -

- М.: Наука, 1980. -287 с.
34. Магницкий Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода [Текст]/Н.А. Магницкий // ЖВМ и МФ. - 1979. - Т. 19, №4. - С.970-989.
 35. Моисеев Е. И. О разрешимости нелокальной краевой задачи с противоположными потоками на части границы и сопряженной к ней задачи [Текст]/Е.И. Моисеев, В.Э. Амбарцумян// Дифференц. уравнения. - 2010. -Т. 46, № 6. - С. 883–886.
 36. Михлин С. Т. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений [Текст]/С.Т. Михлин, Х.Л. Смолицкий. - М.: Наука, 1965. - 383 с.
 37. Митропольский Ю. А. О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений [Текст]/Ю.А. Митропольский, Л.Б. Урманчева // Украинский мат. журн. - 1990. - Т. 42, № 12. -С. 1657-1663.
 38. Нахушев А. М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода [Текст]/А.М. Нахушев //Дифференц. уравнения. -1974. - Т. 10, №1. - С. 100-111.
 39. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии [Текст]/А.М. Нахушев - М.: Высшая школа, 1995. - 301 с.
 40. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги [Текст]/А.М. Нахушев // Дифференц. Уравнения. - 1979. - Т.15, №1. - С. 96-105.
 41. Омуров Т. Д. Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода [Текст]/Т.Д. Омуров. - Бишкек: Илим, 2003. -162 с.
 42. Омуров Т. Д. Решения интегральных уравнений Вольтерра типа стыка с особыми ядрами [Текст]/Т.Д. Омуров//Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1998. - Вып. 27. - С. 149-153.
 43. Омуров Т. Д. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач [Текст]/Т.Д. Омуров, Т.Т. Каракеев. - Бишкек: Илим, 2006. - 163с.
 44. Пулькина Л. С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода [Текст]/Л.С. Пулькина //Изв. вузов. Матем., 2012, № 4. -С.74-83.

45. Панов Л. И. Об интегральных уравнениях с ядрами, имеющими неинтегрируемую особенность произвольного порядка [Текст]/Л.И. Панов // ДАН Тадж. ССР. - 1967. - Т.10, №6. - С. 3-7.
46. Репин О. А. Краевая задача для уравнения влагопереноса [Текст]/О.А. Репин //Дифференц. уравнения. 1990.-Т.10, №1. -С. 169-171.
47. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики [Текст]/ В.Г. Романов.- М.: Наука,-264 с.
48. Рустамова Д. К. Нелокальная краевая задача для уравнений гиперболического типа [Текст]/Т.Т. Каракеев, Д.К. Рустамова //Вестник КГПУ им. И. Арабаева. - Бишкек, 2004. - Вып. 2. - С.17-22.
49. Рустамова Д. К. Регуляризация и метод квадратур для линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст]/Т.Т. Каракеев, Д.К. Рустамова//Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек, 2009. - Вып. 40. - С. 127-132.
50. Рустамова Д. К. Нелокальная по времени краевая задача для гиперболических дифференциальных уравнений [Текст]/Д.К. Рустамова //Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2010. - Вып. 4. - С. 158-162.
51. Рустамова Д. К. Решение методом квадратур линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст]/Т.Т. Каракеев, Д.К. Рустамова //Наука и новые технологии. - Бишкек, 2010. №. 5. - С. 8-14.
52. Рустамова Д. К. Регуляризация нелинейного уравнения Вольтера третьего рода. [Текст]/Т.Т. Каракеев, Д.К. Рустамова //Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2011. - Вып. 1. - С. 76-79.
53. Рустамова Д. К. Регуляризация нелокальной по времени краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных [Текст]/Т.Т. Каракеев, Д.К. Рустамова// Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2012. - Вып. 5. - С. 34-44.
54. Рустамова Д. К. Нелокальная задача по пространственной переменной для гиперболических уравнений [Текст]/Д.К. Рустамова //Вестник ОшГУ. - Ош, 2013. - Спец. вып. 1. - С. 234-239.
55. Рустамова Д. К. Приближенные методы решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст]/Т.Т. Каракеев, Д.К. Рустамова, Ж. Т. Бугубаева // Materiály X mezinárodní vědecko -

praktická Konference / Díl 33 Matematika Fyzika Chemie a chemická technologie, 2013/2014. - Praha, 2013/2014. - С. 6-10.

56. Рустамова Д. К. Единственность и устойчивость решения нелокальной краевой задачи для линейных уравнений в частных производных второго порядка [Текст]/Т.Т. Каракеев, Д.К. Рустамова // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. - Астана, 2014. № 4(101). - С.64-72.
57. Рустамова Д. К. Регуляризация линейного интегрального уравнения Вольтерра третьего рода с вырождающейся функцией вне интеграла в двух точках [Текст]/Д.К. Рустамова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2014. - Спец. вып. - С. 52-57.
58. Рустамова Д. К. Регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода типа стыка [Текст]/Т.Т. Каракеев, Д.К. Рустамова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2014. - Вып. 5. - С. 45-50.
59. Рустамова Д. К. Регуляризация нелокальной краевой задачи для уравнения Бенжамина-Бона-Махони [Текст]/Т.Т. Каракеев, Д.К. Рустамова //Приволжский научный вестник. - Ижевск, 2016. №1 (53). - С. 10-15.
60. Рустамова Д. К. Регуляризация нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в нерегулярном случае [Текст]/Т.Т. Каракеев, Д.К. Рустамова//Наука, техника и образование. - Москва, 2016. №1 (19). - С. 10-14.
61. Рустамова Д. К. Метод квадратурных формул для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст]/Т.Т. Каракеев, Д.К. Рустамова//Проблемы современной науки и образования. - Москва, 2016. №3(45). - С. 7-15.
62. Рустамова Д. К. Приближенное решение нелокальной краевой задачи для гиперболических уравнений [Текст]/Д.К. Рустамова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - Бишкек, 2017. № 10. - С. 3-10.
63. Рустамова Д. К. Нелокальная по времени краевая задача для уравнений гиперболического типа [Текст]/Д.К. Рустамова // Сборник материалов научно-практической конференции молодых ученых Кыргызстана «Старт в большую науку». - Бишкек, 2013. - С. 18-19.

64. Самарский А. А. Численные методы [Текст]/А.А. Самарский, А.В. Гулин. -М: Наука,1989. -432 с.
65. Саадабаев А. Конечномерная аппроксимация решения операторного уравнения первого рода [Текст]/А. Саадабаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1991. - Вып. 23. -С. 152-155.
66. Сербина Л. И. Нелокальные математические модели процессов переноса в системах с фрактальной структурой [Текст]/Л.И. Сербина. - Нальчик: КБНЦ РАН, 2002. -144 с.
67. Сергеев В. О. Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода [Текст]/ В.О. Сергеев // ДАН СССР, 1971. - Т.197, № 3. - С. 531-534.
68. Сильченко Ю. Т. Собственные значения и функции дифференциального оператора с нелокальными граничными условиями [Текст]/Ю.Т. Сильченко // Дифференц. уравнения. 2006. - Т.42, №6. - С. 764-768.
69. Сопуев А. Задача Бицадзе - Самарского для уравнения Буссинеска - Лява [Текст]/А. Сопуев, А.Б. Осмоналиев // Вестник КГНУ: «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике». Тр. междунар. научн. Конференц. - Бишкек, 2001. - Серия 3. - Вып.6. - С. 112-116.
70. Танана В. П. Методы решения операторных уравнений [Текст]/В. П. Танана- М.: Наука, 1981. - 156 с.
71. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач [Текст]/А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. - М.: Наука, 1986. -287 с.
72. Тихонов А. К. Численные методы решения некорректных задач [Текст]/А. К. Тихонов, А. В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. - М.: Наука, 1990. - 232 с.
73. Треногин В. А. Функциональный анализ [Текст]/В.А. Треногин. - М.: Наука, 1980. - 496 с.
74. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах [Текст]/М.Х. Шхануков // Дифференц. уравнения. - 1982. -Т.18, №4. - С.689- 699.
75. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений [Текст]/М.Х. Шхануков //Там же. -1983. - Т.19, №1. - С.145-152.
76. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв [Текст]/А.Ф. Чудновский - М.:

Наука, 1976. - 352 с.

77. Янно Я. Регуляризация одного уравнения Вольтерра I рода равносильного уравнению III рода [Текст]/Я. Янно // Учен.зап.Тартуск. гос. ун-та. - 1987. - Вып.762. -С. 16-30.
78. Imanaliev T. M. Regularization of the third-kind Volterra equations// T.M. Imanaliev, T.T. Karakeev and T.D. Omurov Proc.Pakistan Acad.Sci. 2005. - Vol. 42 (1). - P. 27-34.
79. Rustamova D. K. Regularization of the non-local on time problem for the linear partial equations [Текст]/Т.Т. Karakeev, D.K. Rustamova // The V Congress of Turkic World Mathematicians. - Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 2014. -P. 182.
80. Rustamova D. K. Numerical Solution of Volterra Linear Integral Equation of the Third Kind [Текст]/Т.Т. Karakeev, D.K. Rustamova, J.T. Bugubaeva// Advances in intelligent Systems and Computing / Intelligent Systems for Computer Modelling/Proceedings of the 1st European-Middle Asisan Conference on Computer Modelling 2015 / Springer, - Vol. 423, 2016. -Warsaw, Poland, 2016. - P. 111-119.
81. Bouziani A. On the solvability of nonlocal pluriparabolic problems [Текст]/ A. Bouziani // Electronic Journal of Differential Equations -Vol. 2001. -№ 21. - P. 1-16.

Формат 60x84 1/16. Объем 9,5 п.л.

Бумага офсет. Печать офсет.

Тираж 300 экз.

Типография «КНУ им. Ж.Баласагына»

г. Бишкек, ул. Манас, 101.