Толубаев Ж.О.

Стилтьестин интегралы жана анын касиеттери

Азыркы учурда жогорку, атайын орто жана орто окуу жайларда негизинен Римандын анык интегралы толугу менен окуп үйрөтүлөт.

Ал негизинен $S = \int_a^b f(x)dx$ (1) түрүндө аныкталат жана төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ 2. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ 3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$ 5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6° Эгерде $[a,b]$ кесиндисинин бардык чекиттеринде $f_1(x) \le f_2(x)$ барабарсыздыгы орун алса, $\int_a^b f_1(x)dx$ жана $\int_a^b f_2(x)dx$ интегралдары жашаса, анда $\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx$ орун алат.

Жекече учурда $m \le f(x) \le M$ үчүн $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ формуласы орун алат.

Жогорудагы формулалардын келип чыгышы жана касиеттеринин далилдеништери азыркы окутулуп жаткан адистердин окуу пландарынын ичинде толук камтылган.

Бул илимий макалабызда биз, Римандын интегралынын жалпылоо түшүнүгү болгон- Стилтьестин интегралын аныктайбыз.

Мейли бизге $[a,b]$ сегментинде чектелген эки f(x) жана g(x) функциялары берилсин, $[a,b]$ кесиндисин чекиттер аркылуу төмөндөгүдөй бөлүктөргө бөлөлү: $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ ар бир $[x_k x_{k+1}]$ жекече сегменттен ξ_k чекитин алабыз жана $\vartheta = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi k)[g(x_{k+1} - g(x_k)]$ (2) суммасын түзөбүз.

Аныктама-1 . Эгерде $\lambda = \max(x_{k+1} - x_k) \to 0$ умтулганда (2) түрдө аныкталган ϑ суммасы чектелген, кесиндини кандай жол менен бөлүктөргө бөлүүдөн, ξ_k чекитин тандап алуудан көз карандысыз I пределине умтулса, анда ал предел $f(x)$ функциясынан $g(x)$ функциясы боюнча алынган *Стилтьестин интегралы* деп аталат жана $\int_a^b f(x)dg(x)$ (3) же (s) $\int_a^b f(x)dg(x)$ (4) түрүндө белгиленет.

Пределдик түшүнүктүн жардамында жогорудагы аныктама тагыраак түрдө төмөндөгүдөй түрдө аныкталат.

Аныктама-2 . Эгерде каалагандай эң кичине ε>0 саны үчүн δ>0 саны табылып, кесиндини ар кандай жол менен бөлүктөргө бөлүүдөн λ<δ үчүн $|\vartheta - I| < \varepsilon$ (5) орун алса, анда I саны $f(x)$ функциясынан $g(x)$ функциясы боюнча алынган *Стилтьестин интегралы* деп аталат.

Жогорку (3) жана (4) формулалардан көрүнүп тургандай Римандын интегралы Стилтьестин интегралынын жекече учуру болот, качан гана $g(x) = x$ (6) болгон учурда.

Римандын интегралындай эле, Стилтьестин интегралы да төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот:

1. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dg(x) = \int_a^b f_1(x)dg(x) + \int_a^b f_2(x)dg(x)$

2. $\int_a^b f(x)d[g_1(x) + g_2(x)] = \int_a^b f(x)dg_1(x) + \int_a^b f(x)dg_2(x)$

3. Эгерде k жана l турактуу сандар болсо, анда $\int_a^b kf(x)d\lg(x) = kl\int_a^b f(x)dg(x)$ болот.

Аныкталган касиеттердин далилдөөлөрү барабардыктын оң жагынын жашоосунан сол жагынын жашоосу келип чыгат.

4. Эгерде $a \prec c \prec b$ жана $\int_a^b f(x)dg(x)$, $\int_a^c f(x)dg(x)$, $\int_c^b f(x)dg(x)$ интегралдары жашаса, анда $\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^a f(x)dg(x)$ болот.

Акыркы барабардыктын оң жагындагы интегралдын жашоосунан сол жагындагы интегралдардын жашоолору келип чыгат, бирок сол жагындагы интегралдардын жашоосунан оң жагындагы интегралдын жашоосу келип чыкпайт.

5. Эгерде $\int_a^b f(x)dg(x)$ интегралы жашаса, анда $\int_a^b g(x)df(x)$ интегралы да жашайт жана $\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = [f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ (7) барабардыгы орун алат.

Далилдөө: Мейли $\int_a^b g(x)df(x)$ интегралы жашасын.

$[a,b]$ кесиндисин бөлүктөргө бөлүп, $\vartheta = \sum_{k=0}^{n-1} f(з_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$ суммасын түзөлү. Бул сумманы биз $\vartheta = \sum_{k=0}^{n-1} f(з_k)g(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(з_k)g(x_k)$ түрүндө да жазып алсак болот, мындан

$\vartheta = -\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)[f(з_k) - f(з_{k-1})] + f(з_{n-1})g(x_n) - f(з_0)g(x_0)$ келип чыгат.

Акыркы барабардыктын оң жагына $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ кошуп жана кемитсек, анда акыркы барабардык

$$\vartheta = [f(x)g(x)]_a^b - \left\{ g(a)[f(з_k) - f(a)] + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(з_k) - f(з_{k-1})] + g(b)[f(b) - f(з_{n-1})] \right\}$$

Мында max $(x_{k+1} - x_k)$ нын нөлгө умтулуусунан max $(з_{k+1} - з_k)$ х ти нөлгө умтулуусу келип чыгат. **Касиет далилденди**.

Аныктама-3. (7) түрдө аныкталган формула Стилтьестин интегралын *бөлүктөп интегралдоонун формуласы* деп аталат.

Эми биз Стилтьестин интегралынын жашоосунун шарты жөнүндө төмөндөгү теореманы далилдөөсү менен карап көрөлү.

Теорема-1. Эгерде f (x) функциясын $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз, ал эми g(x) функциясы өсүүчү болсо, анда $\int_a^b f(x)g(x)$ интегралы жашайт.

Далилдөө: $[a;в]$ кесиндисин төмөндөгүдөй түрдө бөлүктөргө бөлөлү: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ жана f(x) функциясынын $[x_k; x_{k+1}]$ кесиндисиндеги эң кичине маанисин $m_к$, ал эми эң чоң маанисин M_k аркылуу белгилейли.

Мейли бизге $S = \sum_{k=0}^{n-1} m_k[g(x_{k+1}) - g(x_k)],\ S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$ болуп, мындан $[x_k; x_{k+1}]$ кесиндисинен алынган ξ_k каалаган чекити үчүн $s \le V \le S$ болору көрүнүп турат.

Жогоруда аныкталган s суммасы эч качан S суммасына чоң болбой тургандыгы келип чыгат.

Эгерде төмөнкү бардык $\{s\}$ суммаларынын жогорку чекити $I = \sup\{s\}$ аркылуу белгилесек, $s \le I \le S$ экендиги келип чыгат. Мындан $|V - I| \le S - s$ болот.

Эгерде ε>0 үчүн, $|x'' - x'| < \delta$ барабарсыздыгынан $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ барабарсыздыгынын келип чыга тургандай $\delta > 0$ саны табылса, анда $\lambda < \delta$ үчүн $M_k - m_k < \varepsilon \quad (k = 0,1,2,3,\ldots,n-1)$;æàíà $S - s < \varepsilon[g(\hat{a}) - g(\grave{a})]$ келип чыгат.

Ал эми $\lambda < \delta$ үчүн $|V - I| < \varepsilon[g(в) - g(a)]$ да келип чыгат, башкача айтканда $\lim\limits_{\lambda \to 0} V = I$, тактап айтканда I саны $\int_a^в f(x)dg(x)$ интегралы экендиги анык болот.

Теорема далилденди.

Илимий макаланын акырында биз Стилтьестин интегралы менен Римандын интегралынын байланышын карап көрөлү.

Теорема 2. Эгерде f(x) функциясы $[a;в]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз, ал эми g(x) функциясы $[a;в]$ кесиндисинин ар бир чекитинде интегралдануучу функция болгон $g'(x)$ туудусуна ээ болсо, анда $(s)\int_a^в f(x)dg(x) = (R)\int_a^в f(x)g'(x)dx \quad (8)$ орун алат.

Теореманын далилдөөсүн төмөндөгүдөй мисалдардан карап көрөлү:

Мисал 1. f(x)=x функциясынан $[1;2]$ кесиндисинде $g(x) = x^2$ функциясы боюнча алынган Стилтьестин интегралын эсептегиле:

$$\int_1^2 x dx^2 = \int_1^2 x(x^2)' dx = 2\int_1^2 x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}[8-1] = \frac{2}{3}*7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3};$$

Мисал 2.

$f(x) = \sin x \quad \left[\frac{\pi}{2};\pi\right] \qquad g(x) = \cos x$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x d\cos x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x(\cos x)' dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[1 - \frac{\cos 2x}{2}\right]dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x dx = -x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -(\pi - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{4}\left[\sin 2\pi - \sin 2\frac{\pi}{2}\right] = -\pi + \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} - \pi$$

Адабияттар

1. Натансон И.П. “Теория функций веүественной переменной” М.: “Наука” 1974.
2. Рудин У. “Основы математического анализа” М.: “Мир” 1976.
3. Смирнов В.И. “Курс высшей математики” М.: “Наука” 1974.т-4.

* * *