ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

Б. ОСМОНОВ АТЫНДАГЫ ЖАЛАЛ-АБАД МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

Д 05.22.651 диссертациялык кеңеши

Кол жазма укугунда

УДК: 517.97

Эрмекбаева Айжана Турдубековна

Фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык тендемеси менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстерин оптималдуу чекиттик башкаруу

01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу

Физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациянын

АВТОРЕФЕРАТЫ

Ош – 2022

Диссертациялык иш Ош мамлекеттик университетинин математикалык анализ кафедрасында аткарылган.

Илимий жетекчи:	**Керимбеков Акылбек**, физика-математика илимдеринин доктору, профессор, Кыргыз-Россия Славян университетинин колдонмо математика жана информатика кафедрасынын профессору
Расмий оппоненттер:	**Джураев Абубакир Мухтарович**, физика-математика илимдеринин доктору, доцент, Кыргыз-Россия Славян университетинде дизайн жана математикалык негиздери кафедрасынын башчысы **Алишеров Абдулла,** физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент, Н. Исанов атындагы Кыргыз мамлекеттик курулуш, транспорт жана архитектура университетинин жогорку математика кафедрасынын доценти
Жетектөөчү мекеме:	М. Адышев атындагы Ош технологиялык университетинин колдонмо математика кафедрасы, (714018 , Ош шаары, Исанов көчөсү 81).

Диссертацияны коргоосу 2022-жылдын «30» сентябрда саат 11:00 дө Ош мамлекеттик университетине жана Б.Осмонов атындагы Жалал-Абад мамлекеттик университетине караштуу физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын коргоо боюнча түзүлгөн Д 05.22.651 диссертациялык кеңешинин жыйынында корголот (723500, Ош шаары, Ленин көчөсү, 331, ауд. 203).

Диссертациянын коргоосунун онлайн трансляциялоонун шилтемеси: https://vc.vak.kg/b/052-pvt-luj-9ih.

Диссертация менен Ош мамлекеттик университетинин жана Б.Осмонов атындагы Жалал-Абад мамлекеттик университетинин китепканаларында жана www.oshsu.kg сайтынан таанышууга болот.

Авторефераттар « 30 » июнь 2022 күнү таркатылды.

Диссертациялык кеңештин окумуштуу
катчысы, физика-математика илимдеринин
кандидаты, доцент Бекешов Т.О.

ИШТИН ЖАЛПЫ МҮНӨЗДӨМӨСҮ

Диссертациянын темасынын актуалдуулугу. Бөлүштүрүлгөн системаларды оптималдуу башкаруу теориясынын негиздерин түзүү өткөн кылымдын 60-жылдарында А.Г. Бутковский (1963), А.И. Егоров (1962), Т.К. Сиразетдинов (1966) жана башкалар тарабынан жүргүзүлгөн. Азыркы учурда теория кеңири иштелип чыгып, илимдин түрдүү тармактарына кирип жатат. Бөлүштүрүлгөн системаларды оптималдуу башкаруунун маселесин чечүүнүн жаңы изилдөө методдору жана алгоритмдери иштелип чыгууда.

Бөлүштүрүлгөн системаларды оптималдуу башкаруу теориясынын көйгөйлөрүнүн бири болуп Фредгольмдун интегро-дифференциалдык теңдемелери менен сыпатталган процесстерди сызыктуу эмес башкаруу маселесинин чечилишине изилдөө жүргүзүү жана аларды чечүүнүн конструктивдүү ыкмаларын иштеп чыгуу эсептелет. Белгилеп кетсек, тышкы жылуулук агымдары кыймылдуу чекиттик булактардын функциялары катары берилген сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелери жетишээрлик деңгээлде изилдене элек. Атап айтканда, сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелерин чечүүнүн сапаттык жана конструктивдүү методдору иштелип чыга элек. Андыктан кыймылдуу чекиттик булактардын катышуусунда жылуулук процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин сапаттуу изилдөөгө жана алардын чечилишин сандык эсептөөлөргө жеткирүүгө мүмкүндүк берүүчү методдорду иштеп чыгуу бул бөлүштүрүлгөн параметрлери бар системаларды оптималдуу башкаруу теориясынын **актуалдуу** маселелеринин бири болуп эсептелинет.

Диссертациянын темасынын ири илимий программалар (долбоорлор) жана негизги илим изилдөө жумуштары менен байланышы. Диссертация Кыргыз-Россия Славян университетинин профессору А. Керимбековдун жетекчилиги астында “Интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн процесстерди оптималдуу башкарууда синтездөө маселелерин чечүү” (Каттоо номери №0007551) илимий изилдөө долбоорлордун алкагында аткарылган.

Изилдөөнүн максаты:

1) тышкы таасирдин функциясы скалярдык жана вектордук башкаруу функциясына сызыктуу эмес көз каранды болгон учурларда жылуулук процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чечилишин изилдөө;

2) сызыктуу эмес функциялар менен сыпатталган кймылдуу чекиттик тышкы булактар кыймылдуу болгон кездеги жылуулук процессин сызыктуу

эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чечилиши үчүн зарыл жана жетиштүү шарттарды тургузуу.

Изилдөөнүн милдеттери:

1) кыймылдуу чекиттик булактарга ээ болгон башкарылуучу процесс фредгольмдун интегро-дифференциалдык теңдемеси менен сүрөттөлгөн учурда чектик маселенин алсыз жалпыланган чечимин тургузуу;
2) максимум принцибинин негизинде оптималдуулук шарттын алуу;
3) түгөйлөш чектик маселенин алсыз жалпыланган чечими тургузулду;
4) оптималдуу башкаруунун сызыктуу эмес интегралдык теңдемесин алуу жана анын чечилишин изилдөө;
5) кыймылдуу чекиттик башкаруунун сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин толук чечимин тургузуу жана оптималдуу башкаруу, оптималдуу процесс жана функционал боюнча анын жакындашуусунун жыйналуучулугун изилдөө.

Алынган иштин илимий жанылыгы.

1) башкарылуучу процесстин чектик маселеси коюлган Фредгольмдун интегралдык операторун кармаган жылуулук өткөрүмдүүлүктүн интегро-дифференциалдык теңдемесинин алсыз чечиминин түшүнүгү киргизилген жана тышкы кыймылдуу чекиттик башкаруу учурундагы аны куруунун алгоритми көрсөтүлгөн;
2) жалпыланган квадраттык функционалды минимизациялоодо кыймылдуу чекиттик башкарууну сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чечилишинин жетиштүү шарттары тургузулган. Бул учурда, скалярдык оптималдуу кыймылдуу чекиттик башкаруу − белгисиз функцияны интегралдын ичинде да жана сыртын да сызыктуу эмес камтыган интегралдык теңдеменин, б.а. өзгөчө түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чечими катары аныкталат. Ал эми оптималдуу вектордук башкаруунун чекиттик кыймылдуу компоненттери өзгөчө формадагы интегралдык теңдемелердин системасынын чечими катары аныкталат;
3) кыймылдуу чекиттик булактарга ээ болгон жылуулук процессин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин толук чечимин тургузуунун алгоритми иштелип чыккан жана анын жакындаштырууларынын жыйналуусу далилденген;
4) теңдемеде Фредгольм интегралдык операторунун жана сингулярдуу-жалпыланган Дирак функциясынын болушу менен шартталган каралып жаткан сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин айрым спецификалык өзгөчөлүктөрү өзгөчө белгиленген.

Алынган натыйжалар жаңы болуп саналат жана бөлүштүрүлгөн параметрлүү системаларын сызыктуу эмес оптимизациялоо маселесин чечүүнүн андан аркы өнүгүшү катары мүнөздөлөт.

Алынган жыйынтыктардын практикалык маанилүүлүгү. Алынган натыйжалар теориялык мүнөзгө ээ. Аларды бөлүштүрүлгөн параметрлери бар системаларды сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелерин чечүүнүн жаңы математикалык моделдерин иштеп чыгууда, изилдөөнүн сапаттык ыкмаларын өнүктүрүү үчүн колдонууга болот.

Экинчи жагынан, кыймылдуу чекиттик булагы бар болгон жылуулук процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин чечүү үчүн иштелип чыккан метод конструктивдүү болуп саналат жана жылуулук өткөрүмдүүлүк процесси менен байланышкан колдонмо маселелерди чечүү үчүн пайдаланылышы мүмкүн.

Диссертациянын коргоого алып чыгылуучу негизги жоболору:

1) тышкы кыймылдуу чекиттик булактары сызыктуу эмес функциялар болгон интегралдык Фредгольм операторун кармаган интегро-дифференциалдык теңдеме менен сүрөттөлгөн жылуулук процессин башкаруунун чектик маселесинин алсыз жалпыланган чечими тургузулду;
2) скалярдык оптималдуу кыймылдуу башкаруу үчүн сызыктуу эмес спецификалык түрдөгү интегралдык теңдемеге чектик маселенин чечими алып келинди жана вектордук оптималдуу башкаруунун компоненттери үчүн сызыктуу эмес спецификалык түрдөгү интегралдык теңдемемелердин системалары келтирип чыгарылган жана алардын экинчи тартиптеги оптималдуулуктун шартын канааттандырган функциялардын классында бир манилүү чечилишинин жетиштүү шарттары тургузулган;
3) скалярдык чекиттүү кыймылдуу оптималдуу башкаруунун сызыктуу эмес теңдемесин (же вектордук башкарууда алардын системаларын) чечүүнүн алгоритми иштелип чыкан жана кыймылдуу чекиттүү булактарга ээ болгон жылуулук процессин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин толук чечими тургузулган;
4) оптималдуу башкаруунун (скалярдык жана вектордук) тиешелүү функционалдык мейкиндиктердин нормасында оптималдуу процесстин жана функционалдын жакындаштырууларынын үч түрү боюнча жыйналуучулугу далилденген;
5) теңдемеде Фредгольм интегралдык операторунун жана сингулярдуу-жалпыланган Дирак функциясынын болушу менен шартталган каралып жаткан сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин айрым спецификалык өзгөчөлүктөрү өзгөчө белгиленген;
6) теориялык корутундуларды ырастаган сандык мисалдар каралган.

Изденүүчүнүн жеке салымы. Изилдөөнүн жыйынтыгы боюнча 6 макала, 2 тезис жарыкка чыккан. Маселенин коюлушу илимий жетекчиге таандык, ал эми алсыз жалпыланган чечимди тургузуу, оптималдуулуктун шартын келтирип чыгаруу, сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдеменин чечиминин болушу үчүн жетиштүү шарттарды аныктоо, сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин так жана жакындаштырылган чечимдерин тургузуунун алгоритми жана жакындаштырылган чечимдердин жыйналуусу сыяктуу негизги натыйжалар изденүүчү тарабынан алынды. Биргелешкен эмгектерде [5,6] авторлоштор Г.Б. Момбекова жана Сейдакмат кызы Э. талкууга жана жыйынтыктарды тариздөөгө катышты.

Изилдөөнүн натыйжаларын апробациялоо. Жумуштун жыйынтыктары төмөнкү конференцияларда баяндалган жана талкууланган:

1) профессор А. Керимбековдун 70 жылдыгына, КРдин ЖОЖдордогу окуу илимий ишмердүүлүгүнүн 45 жылдыгына арналган «Башкаруу, топология жана оператордук теңдемелер теориясынын актуалдуу маселелери» Үчүнчү Эл аралык илимий конференция, Кыргызстан, Бишкек-Чолпон-Ата, 19-22-июнь, 2017-жыл;

2) академик А.М. Самойленконун 80 жылдыгына арналган “Математикалык анализ, дифференциалдык теңдеме жана колдонулушу. MADEA” Сегизинчи Эл аралык конференция, 2018-жылдын 17-23-июнь, Кыргыз-Түрк “Манас” университети, Чолпон-Ата, (Ысык-Көл), Кыргызстан;

3) Математика илимдеринин Үчүнчү Эл аралык конференциясы (ICMS 2019) 04-08-сентябрь 2019-жыл, Мальтеп университети, Стамбул, Түркия;

4) өнөр жай тиркемелерин башкаруу жана оптималдаштыруу боюнча Жетинчи Эл аралык конференция (COIA-2020), 26-28-август 2020-жыл, Баку, Азербайжан Республикасы (онлайн).

Ошондой эле, КРСУнун “Колдонмо математика жана информатика” кафедрасынын илимий семинарларында (илимий жетекчиси проф. Керимбеков А.) жана 2017−2021-жылдары КР УИАнын корреспондент-мүчөсү, профессор К. Алымкулов жетектеген “Математиканын актуалдуу проблемалары жана анын колдонулуштары” аттуу аймактык илимий семинарында талкууланган.

Диссертациянын натыйжаларынын басылып чыгарылышы. Диссертациялык изилдөөнүн негизги жыйынтыктары 6 илимий макалада жана 2 тезисте, анын ичинде Кыргыз Республикасынын рецензияланган журналдарында 4 макала, чет элдик рецензияланган журналдарда 2 макала жарыяланган. Жалпы топтолгон упайлардын саны 181 баллды түздү.

Диссертациянын түзүлүшү жана көлөмү. Диссертация киришүүдөн, 17 бөлүмдү камтыган 4 баптан, корутундудан, 67 колдонулган

адабияттардын тизмесинен, 26 таблицадан, 3 сүрөттөн жана тиркемеден турат. Математикалык катыштарды жана формулаларды номерлөө баптар жана бөлүмдөр боюнча (a.b.c) түрүндө жүргүзүлдү, мында a - баптын номери, b - ушул баптагы бөлүмдүн номери, c - ушул бөлүмдөгү формуланын, лемма жана теоремалардын номери. Диссерациянын көлөмү 121 бетти түзөт.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН НЕГИЗГИ МАЗМУНУ

Киришүүдө теманын актуалдуулугунун негиздемеси, иштин жалпы мүнөздөмөсү, изилдөөнүн максаты жана милдеттери, илимий жаңылыгы, практикалык мааниси, ошондой эле коргоого алып чыгуучу негизги жоболор берилген.

«Адабияттарга жана диссертациянын натыйжаларына обзор» аттуу биринчи бапта мазмуну жагынан ушул диссертациялык ишке жакындыгы бар иштердин кыскача баяндамасы жасалып, изилдөөлөрдүн кыскача баяндамасы келтирилген. Ошондой эле бөлүштүрүлгөн параметрлери бар системаларга алып келүүчү кыймылдуу оптималдуу башкаруу маселелерине мисалдар келтирилген.

«Изилдөөнүн материалы жана методдору» аттуу экинчи бапта изилдөөнүн объектилери жана предмети көрсөтүлгөн. Экинчи бөлүмүндө негизги түшүнүктөр жана аныктамалар айтылган, ошондой эле изилдөөнүн маңызын тааныштыруу максатында диссертациялык иштин айрым изилдөө ыкмалары баяндалган.

Изилдөөнүн объектиси: Фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн башкарылуучу жылуулук процесстер.

Изилдөөнүн предмети: жылуулук процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чечүү жана оптималдуу башкаруу, оптималдуу процесс жана функционал боюнча анын жакындашуусунун жыйналуучулугун далилдөө.

«Скалярдуу кыймылдуу чекиттик башкаруу аркылуу жылулуук процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин чечүү» аттуу үчүнчү бапта Фредгольмдун интегро-дифференциалдык теңдемелери менен сыпатталган жылуулуктун таралышы чекиттик кыймылдуу булактын таасири астында жүргөн жылуулук процесстерин оптималдуу башкаруу маселеси изилденген. Бул учурда тышкы таасирдин функциясы башкаруудан сызыктуу эмес көз каранды.

Башкаруунун сапаты жалпыланган квадраттык функционал аркылуу бааланат. Чектик маселеге эквиваленттүү болгон интегралдык теңдеменин

негизинде башкарылуучу процесстин чектик маселесинин алсыз жалпыланган чечимин тургузуунун жол-жобосу кеңири баяндалган.

Каралып жаткан маселе боюнча максимум принциби курамаланган жана башкаруунун оптималдуулугунун шарттары тышкы жылуулук агымынын функциясына карата барабардык жана дифференциалдык барабарсыздык түрүндө алынды. Дифференциалдык барабарсыздык түрүндөгү оптималдуулук шарты сызыктуу эмес оптимизациялоо маселесинин чечимдери болгон функциялардын классын тарытары белгиленген. Каралып жаткан сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы үчүн жетиштүү шарттар алынган.

Сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин функциялардын үчтүгү түрүндө так чечимин тургузуунун алгоритми иштелип чыкты жана алардын жакындаштырылган маанилеринин башкаруу, оптималдуу процесс жана функционал боюнча тиешелүү функционалдык мейкиндиктердеги нормалары боюнча жыйналуучулугу далилденди.

Оптималдаштыруу маселесин коюу: Төмөнкү чектик маселенин

$$v_t = v_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau + \delta(x - x_0(t))\, f[t,u(t)], \quad x\in(0,1),\ 0<t\le T, \qquad (1)$$

$$v(0,x) = \psi(x), \quad x\in(0,1), \qquad (2)$$

$$v_x(t,0) = 0, \quad v_x(t,1) + \alpha v(t,1) = 0, \quad 0<t\le T \qquad (3)$$

чечимдеринин көптүгүндө интегралдык жалпыланган квадраттык

$$J[u(t)] = \int_0^1 [v(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta\int_0^T p^2[t,u(t)]dt,\ \beta>0 \qquad (4)$$

функционалды минимизациялоочу башкарууну табуу керек. Мында, $K(t,\tau)$ – берилген функция, ал $D=\{0\le t\le T, 0\le\tau\le T\}$ областында аныкталган жана төмөнкү шарты канааттандырат

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt = K_0 < \infty, \qquad (5)$$

б.а.. $K(t,\tau)\in H(D)$,; $\xi(x)\in H(0,1)$, $\psi(x)\in H(0,1)$ − берилген функциялар; $f[t,u(t)]\in H(0,T)$ − тышкы булактын берилген функциясы, о.э. ал $u(t)\in H(0,T)$ башкаруу функциясына сызыктуу эмес көз каранды болот жана

$$f_u[t,u(t)]\ne 0, \quad \forall t\in(0,T), \qquad (6)$$

шартын канааттандырат, $\delta(x)$− Дирактын дельта-функциясы, $x_0(t)$ - тышкы күчтүн колдонуу чекитинин кыймылынын мыйзамын сыпаттап берүүчү берилген функция жана ал 0 дөн 1ге чейинки маанилерди ала алат, λ − параметр, T – убакыттын фиксирленген моменти, турактуу $\alpha>0$, ал эми $H(Y)$ − квадраттык түрдө суммалануучу Y көптүгүндө аныкталган функциялардын Гильберт мейкиндиги.

(1)−(6) чектик маселе ар бир фиксирленген $u(t)\in H(0,T)$ башкаруу үчүн жалгыз алсыз жалпыланган чечимге ээ деп эсептөө менен (1)

функционалдын өсүндүсүн эсептеп көрөбүз. Түздөн-түз эсептөө аркылуу төмөнкүдөй катышка ээ болобуз

$$\Delta J(u) = -\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \delta(x - x_0(t))\omega(t,x)dx\left[f(t,u+\Delta u) - f(t,u) \right]dt + \right.$$

$$+\int_0^T \beta\left[p^2(t,u+\Delta u) - p^2(t,u) \right]dt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x)dx = -\int_0^T \Delta\Pi(\cdot,u)dt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x)dx,$$

мында $\Pi(\cdot,u)$ – Понтрягин тибиндеги функция.

Понтрягин тибиндеги функцияны тургузабыз:

$$\Delta\Pi\left[t,x,v(t,x),\omega(t,x),u(t)\right] = \Pi(\cdot,u+\Delta u) - \Pi(\cdot,u) = \int_0^1 \delta(x - x_0(t))\omega(t,x)dx\left[f(t,u(t)+\Delta u) - \right.$$

$$\left. - f(t,u(t)) \right] + \beta\left[p^2(t,u+\Delta u) - p^2(t,u) \right].$$

Каралып жаткан маселе үчүн Потрягин тибиндеги функция $u(t)$ дан көз каранды деп саналып, төмөнкүдөй көрүнүшкө ээ болот:

$$\Pi(\cdot,u) = \int_0^1 \delta(x - x_0(t))\omega(t,x)dxf(t,u(t)) - \beta p^2\left[t,u(t)\right] = \omega(t,x_0(t))f\left[t,u(t)\right] - \beta p^2\left[t,u(t)\right]. \quad (7)$$

Ал эми $\omega(t,x) \in H(Q)$ $u(t) \in H(0,T)$ башкаруусуна туура келүүчү

$$\omega_t + \omega_{xx} + \lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \le t < T, \quad (8)$$

$$\omega(T,x) = -2\left[v(T,x) - \xi(x) \right], \quad 0 < x < 1, \quad (9)$$

$$\omega_x(t,0) = 0, \ \omega_x(t,1) + \alpha\omega(t,1) = 0, \ 0 \le t < T. \quad (10)$$

түгөйлөш чектик маселенин жалгыз алсыз жалпыланган чечими болуп саналат.

Максимум принцибин формулировкалайбыз: оптималдаштыруунун (1) - (6) маселесинде $u^0(t) \in H(0,T)$ башкаруусу оптималдуу болушу үчүн

$$\Pi\left(t,\omega^0(t,x),v^0(t,x),u^0(t)\right) \ (=) \ \sup_{u \in Z} \Pi\left(t,\omega^0(t,x),v^0(t,x),u\right)$$

катышынын ар бир $t \in [0,T]$ кесиндисинин дээрлик баардык жеринде аткарылышы зарыл жана жетиштүү болот. Мында Z – $u(t)$ функциясынын ар бир $t \in [0,T]$ чекитинде жол берилген маанилеринин көптүгү.

(7)-ге ылайык, максимум принцибинин натыйжасы катары төмөнкү катыштарга ээ болобуз

$$\Pi_u(\cdot,u) = \omega(t,x_0(t))f_u\left[t,u(t)\right] - 2\beta p\left[t,u(t)\right]p_u\left[t,u(t)\right] = 0,$$

$$\Pi_{uu}(\cdot,u) = \omega(t,x_0(t))f_{uu}\left[t,u(t)\right] - 2\beta\left(p^2\left[t,u(t)\right] + p\left[t,u(t)\right]p_{uu}\left[t,u(t)\right] \right) < 0$$

жана булар биргеликте *оптималдуулуктун шарттары* деп эсептелет.

(2)−(6) − чектик маселенин алсыз жалпыланган чечимин төмөнкүдөй түрдө издейбиз:

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)z_n(x), \quad (11)$$

Мында $z_n(x)$ төмөнкү чектик маселенин чечими болуп саналат:

$$z_n'' + \lambda_n^2 z_n(x) = 0, \quad z_n'(0) = 0, \; z_n'(1) + \alpha z_n(1) = 0$$

жана ал мындай көрүнүшкө ээ болот

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2 + \alpha^2\right)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos\lambda_n x, \; n \in 1, 2, 3, \ldots,$$

мында $\{z_n(x)\}$ өздүк функциялар системасы $H(0,1)$ гильберттик мейкиндикте толук ортонормалдуу системаны түзөт, өздүк маанилер деп аталган λ_n сандар $\lambda tg\lambda = \alpha$ трансценденттик теңдеменин оң тамырлары болуп саналат жана төмөнкү шарттарды канааттандырат

$$(n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1), \; n = 1,2,3,..., \; \lambda_n \le \lambda_{n+1}, \; \lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Төмөнку ажыратууларды колдонобуз

$$\delta(x - x_0(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x_0(t)) z_n(x), \quad z_n(x_0(t)) = \int_0^1 \delta(x - x_0(t)) z_n(x)dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n z_n(x), \quad \psi_n = \int_0^1 \psi(x) z_n(x)dx.$$

(11)- ажыратууну (2)-чи теңдемеге коюп, төмөнкү барабардыка ээ болобуз

$$v_n'(t) + \lambda_n^2 v_n(t) = \lambda \int_0^T K(t,\tau) v_n(\tau)d\tau + z_n(x_0(t)) \, f(t, u(t)). \tag{12}$$

Бул теңдемени баштапкы

$$v_n(0) = \psi_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{13}$$

(12)-(13) шарты менен кошо карап $v_n(t)$ -ни Кошинин маселесинин чечими катары табабыз

$$v_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(\lambda \int_0^T K(t,s) v_n(s)ds + z_n(x_0(\tau)) f\left[\tau, u(\tau)\right] \right) d\tau. \tag{14}$$

(14) интегралдык теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазабыз

$$v_n(t) = \lambda \int_0^T K_n(t,s) v_n(s)ds + a_n(t), \tag{15}$$

мында

$$K_n(t,s) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau, s)d\tau,$$

ядро, ал эми

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n(x_0(\tau)) f\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau$$

бош мүчө болуп саналат.

(15)- теңдеменин чечимин төмөнкү формула боюнча табабыз

$$v_n(t) = \lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n(s)ds + a_n(t), \tag{16}$$

мында $R_n(t,s,\lambda)$ резольвентасы ар бир фиксирленген $n=1,2,3,...$ үчүн төмөнкү формула боюнча аныкталат

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad n=1,2,3,\ldots, \tag{17}$$

мында $K_{n,i}(t,s)$ кайталануучу ядролор.

(17) − катар λ параметринин $|\lambda|<\dfrac{\sqrt{2}\lambda_n}{\sqrt{K_0T}}$ баалоосун канааттандырган маанилери үчүн жыйналат. Мындан Фурье коэффициентинин $n=1,2,3,\ldots$ индексинин жогорулашы менен Нейман катарынын жыйналуу радиусу өсөт деген жыйынтык чыгат.

Кийинки эсептөөлөрдө колдонуулучу төмөнкүдөй баалоолор аныкталды

$$|R_n(t,s,\lambda)|\le\frac{\sqrt{\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta}}{\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}},\quad \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\le\frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}$$

(16) - чечимди төмөнкү көрүнүштө кайра жазып чыгабыз

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n(t,\lambda)+\int_0^T\varepsilon_n(t,\eta,\lambda)z_n(x_0(\tau))f(\tau,u(\tau))d\eta\right\}z_n(x),$$

мында

$$\psi_n(t,\lambda)=\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2t}+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2s}ds\right],$$

$$\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)=\begin{cases}e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & 0\le\tau\le t,\\ \lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & t<\tau\le T.\end{cases}$$

$\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)$ функциясы $t=\tau$ сызыгында 1ге (бирге) барабар болгон секирик жасап үзгүлтүккө учурай тургандыгын белгилеп кетебиз.

(8)−(10) түгөйлөш чектик маселенин чечимин тургузуу процедурасы негизги чектик маселеникине окшош жана ал төмөнкү формула аркылуу табылат

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[-h_n+\int_0^T\varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right]G_n(T,t,\lambda)z_n(x),$$

мында

$$G_n(T,t,\lambda)=e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T Q_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds \text{ болот.}$$

Белгилөө киргизебиз

$$h(t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0(t))h_n, \qquad (18)$$

$$G[u(t)]=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0(t))\int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau \qquad (19)$$

жана $\omega(t,x_0(t))$ төмөнкү көрүнүштө туюнтабыз

$$\omega(t,x_0(t))=2\left[h(t)-G\left(u(t)\right)\right]. \qquad (20)$$

(18)– (19) эске алуу менен (20) барабардык төмөнкү көрүнүшкө ээ болот

$$\beta\frac{p[t,u(t)]p_u[t,u(t)]}{f_u[t,u(t)]}+\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0)\int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0)f[\tau,u(\tau)]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0)h_n \qquad (21)$$

бул болсо сызыктуу эмес интегралдык теңдеме болуп саналат. Бул теңдемени профессор А. Керимбеков тарабынан иштелип чыккан ыкмага ылайык изилдейбиз.

Айталы:

$$q(t)=\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}.\cdot \qquad (22)$$

Айкын эмес берилген функциялар теориясына ылайык (22) барабардык $u(t)$ га бир маанилүү чечилет, б.а.

$$u(t)=\varphi\left[t,q(t),\beta\right]. \qquad (23)$$

көрүнүшүндөгү φ функциясы жашайт.

(21)- теңдемени кайрадан төмөнкүдөй жазабыз

$$q(t)+\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0(t))\int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(t))f\left[\tau,\varphi\left(\tau,\mathrm{q}(\tau),\beta\right)\right]d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0(t))h_n \qquad (24)$$

оператордук формада

$$q(t)=\overline{G}\left[q(t)\right]=h(t)-G_0\left[q(t)\right], \qquad (25)$$

ээ болобуз, мында

$$G_0[q]=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(t))\int_0^T E_n\left(T,\tau,\lambda\right)f\left[\tau,\varphi\left(\tau,q(\tau),\beta\right)\right]d\tau.$$

Алгач $q(t)$ функциясы гильберттик мейкиндиктин элементи болоору, ошондой эле $G_0[q]$ оператору H мейкиндигин өзүнө өзүн чагылдыраары далилденет. Андан кийин, бул шарттардын аткарылышы менен (25) оператордук тендеме квадраттык суммалануучу функциялардын гильберттик мейкиндигинде жалгыз чечимге ээ болоору жөнүндөгү ***теорема*** далилденет.

(25)− оператордук теңдеменин чечими удаалаш жакындаштыруулар методунун негизинде төмөнкү схема боюнча тургузулат

$$q_n(t)=\overline{G}\left[q_{n-1}(t)\right]=h(t)-\overline{G}_0\left[q_{n-1}(t)\right],\ n=1,\ 2,\ 3,\dots$$

жана так чечим

$$q^0(t)=\lim_{n\to\infty} q_n(t)$$

түрүндө аныкталат.

Төмөнкү баалоо орун алат

$$\|q_0(t)-q_n(t)\|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\|G_0[q_0(t)]-q_0(t)\|_{H(0,T)} < \varepsilon.$$

Табылган $q^0(t)$ чечимин (24)- туюнтмага коюу аркылуу оптималдуу башкарууну $u^0(t)=\varphi\left[t,q^0(t),\beta\right]$ табабыз жана ал (21)- сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чечими болуп эсептелет.

$u^0(t)$ дал келүүчү оптималдуу башкарууну аныктагандан соң чектик маселенин чечими төмөнкү формула боюнча табылат

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right)z_n(x),$$

мында

$$a_n^0(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}z_n(x_0)f\left[\tau,u^0(\tau)\right]d\tau.$$

Бул чечим *оптималдуу процессти* сыпаттайт.

Оптималдуу башкаруу жана оптималдуу процессти аныктагандан соң (1) – функционалдын минималдуу маанисин кийинки формула аркылуу эсептеп чыгабыз.

$$J\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left[v^0(T,x)-\xi(x)\right]^2+\beta\int_0^T p^2\left[t,u^0(t)\right]dt.$$

Табылган бул $\left(u^0(t),v^0(t,x),I\left(u^0\right)\right)$ үчтүк (1)– (6) сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин толук чечимин аныктайт.

Оптималдуу башкаруунун жакындашууларын түзүү алгоритми кийинки формулалар аркылуу аныкталат

$$u_n(t)=\varphi[t,q_n(t),\beta],\quad n=1,2,3,...,,$$

мында $q_n(t)$ сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чечими катары удаалаш жакындаштыруулар методу аркылуу табылат жана пределде так чечим менен дал келет, б.а. $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(t)=q^0(t)$, болот, ошону менен катар төмөнкү баалоону канааттандырат

$$\|q^0(t)-q_n(t)\|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\|G[h(t)]\|_{H(0,T)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ n=1,2,3,...,\ 0<\gamma<1.$$

Оптималдуу процесстердин жакындашууларынын төмөнкүдөй түрлөрүн бөлүп карайбыз:

1) “резольвента” боюнча оптималдуу процесстин $m-$дик жакындашуусу

$$V_m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T\varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u^0(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x),$$

мында

$$R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),$$

$$\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}ds, 0\le\tau\le t,\\ \lambda\int_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, t\le\tau\le T.\end{cases}$$

2) оптималдуу башкаруунун жакындашуусун эске алуу аркылуу оптималдуу процесстин $m,k-$ лык жакындашуусу

$$V_m^k(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T\varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u_k(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x),$$

3) оптималдуу процесстин $m,k,r-$лик жакындашуусу

$$V_m^{k,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T\varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u_k(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x).$$

Аягында теориялык корутундуларды тастыктаган сандык мисалды чыгаруу ишке ашырылган.

«Вектордук кыймылдуу чекиттик башкаруу учурунда жылуулук процесстерин күзөтүүнү сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин чечүү» аттуу төртүнчү бапта, чекиттик булактардын функциялары башкаруу боюнча сызыктуу эмес болгон учурда Фредгольм интегралдык операторун кармаган жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелер менен сүрөттөлгөн жылуулук процесстерин кыймылдуу чекиттик башкарууну көзөмөлдөө маселесинин чечилиши изилденет.

Башкаруунун сапатынын критерийи болуп жалпыланган квадраттык функцияны минималдаштыруу эсептелет. Оптималдуу башкаруу– интегралдын астында да, сыртында да белгисиз функцияларды камтыган сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин системасынын чечимдери катары аныктала тургандыгы көрсөтүлгөн.

Бул системанын чечимин тургузуунун алгоритми иштелип чыккан жана анын бир маанилүү чечилиши үчүн жетиштүү шарттар табылган. Көзөмөлдөө маселесинин толук чечими тургузулуп, алардын жакындашуусунун жыйналуучулугу изилденген.

Оптималдаштыруу маселесин коюулушу:

$$V_t=V_{xx}+\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+\sum_{k=1}^{m}g_k(x)\delta(x-x_k(t))f_k\left[u_k(t)\right]dt, \quad (26)$$

$$V(0,x)=\psi(x),\quad x\in(0,1), \quad (27)$$

$$V_x(t,0)=0,\quad V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\quad 0<t\le T. \quad (28)$$

чектик маселелердин чечимдеринин көптүгүнөн төмөнкү

$$J\left[u_1(t),...,u_m(t)\right]=\int_0^T\int_0^1\left[V(t,x)-\xi(t,x)\right]^2dxdt+\beta\int_0^T\left\{p_1^2\left[u_1(t)\right]+...p_m^2\left[u_m(t)\right]\right\}dt$$

интегралдык жалпыланган квадраттык функционалды минимизациялоочу башкарууну табуу.

Мында $\xi(t,x)\in H(Q_r),\ Q_r=(0,1)\times(0,T),\ g_k(x)\in H(0,1);\ \psi(x)\in H_1(0,1),\ K(t,\tau)\in H(Д),$ $Д=\{0\le t,\tau\le T\}-$ берилген функциялар; $\delta(x)$ − Дирактын дельта-функциясы, $x_k(t)$ − маанилеринин областы $[0,1]$ кесиндиси болгон тышкы булактарды колдонуу чекиттеринин кыймыл мыйзамын сүрөттөгөн функциялар; каалаган $u_k(t)\in H(0,T)$ башкарууларда $f_k[u_k(t)]\in H(0,T);\ p_k[u_k(t)]\in H(0,T)$ жана алар монотондуулук касиетке ээ, б.а.

$$f_{ku_k}[u_k(t)]\neq 0,\ p_{ku_k}[u_k(t)]\neq 0,\ \forall t\in[0,T],$$

λ − параметр, T – берилген убакыт; $H(Y)$ − Y көптүгүндө аныкталган квадраттык суммалануучу функциялардын гильберт мейкиндиги.

Функционалдын өсүндүсүн эсептейбиз

$$\Delta J[u_1(t),...,u_m(t)]=-\int_0^T \Delta\Pi[t,V(t,x),\omega(t,x),u_m(t)]dt+\int_0^T\int_0^1 \Delta V^2(t,x)dxdt, \tag{29}$$

мында

$$\Delta\Pi[t,V(t,x),\omega(t,x),u(t)]=\Pi[t,V(t,x),\omega(t,x),u_1(t)+\Delta u_1(t),...,u_m(t)+\Delta u_m(t)]-$$
$$-\Pi[t,V(t,x),\omega(t,x),u_1(t),...,u_m(t)], \tag{30}$$

$$\Pi[t,V(t,x),\omega(t,x),u(t)]=\sum_{k=1}^{m}\left\{g_k[x_k(t)]\omega[t,x_k(t)]f_k[u_k(t)]-\beta p_k^2[u_k(t)]\right\}.$$

$\omega(t,x)$ − функциясы төмөнкү чектик маселенин жалпыланган чечими болот

$$\omega_t+\omega_{xx}=\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau-2[V(t,x)-\xi(t,x)],\quad 0<x<1,\quad 0\le t\le T,$$

$$\omega(0,x)=0,\ 0<x<1,$$

$$\omega_x(t,0)=0,\ \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\quad 0\le t<T$$

Бул маселе (26)−(28) негизги чектик маселеси менен түгөйлөш. *Ал түгөйлөш чектик маселе* деп аталат.

(29) −(30) $\Delta\Pi[t,V(t,x),\omega(t,x),u_1(t),...,u_m(t)]\le 0$ барабарсыздыгы аткарылган башкарууларда $\Delta J[u_1(t),...,u_m(t)]\ge 0$ орун алаары келип чыгат. Бул туюнтмалар каралып жаткан оптималдуу башкаруу маселеси үчүн максимум принцибинин негизин түзөт, башкача айтканда бул учурда $\Pi(\cdot)$ функциясы максимумга жетип, ал эми $J[u_1(t),...,u_m(t)]$ минимумга жетет.

Дээрлик бардык $t\in[0,T]$ үчүн орун алуучу биринчи тартиптеги оптималдуулуктун зарыл шарты

$$2\beta\frac{p_k[u_k(t)]p_{ku_k}[u_k(t)]}{f_{ku_k}[u_k(t)]}=g_k[x_k(t)]\omega[t,x_k(t)],\ k=1,2,..,m \tag{31}$$

түрдө алынган.

Сильвестрдин критерийи боюнча оптималдуулуктун экинчи тартиптеги зарыл шарты дээрлик бардык $t\in[0,T]$ үчүн орун алуучу

$$(-1)^j \prod_{k=1}^{j} f_{ku_k}\left[u_k(t)\right]\left(\frac{p_k\left[u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[u_k(t)\right]}\right)_{u_k} > 0,\ j=1,2,...,m$$

барабарсыздык түрүндө жазылат.

Фредгольмдун сызыктуу эмес интегралдык теңдемесинин

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T K_n(t,s)V_n(s)ds+a_n(t),$$

мында

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau,\ K_n(0,s)=0,$$

$$a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\sum_{k=1}^{m} g_k\left[x_k(\tau)\right]z_n\left[x_k(\tau)\right]f_k\left[u_k(\tau)\right]d\tau$$

чечими төмөнкү көрүнүшүнө ээ болот

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t),$$

мында $K_n(t,s)$ ядронун $R_n(t,s,\lambda)$ резольвентасы Нейман катарынын суммасы катары аныкталат, башакача айтканда

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^T K_n(t,\tau)K_{n,i}(\tau,s)d\tau,\ i=1,2,3,...$$

(26)‒ (28) чектик маселенин чечими төмөнкү түрдө алынат

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)\right)z_n(x).$$

Түгөйлөш чектик маселенин чечими төмөнкү формула менен аныкталат

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T B_n(\tau,t,\lambda)q_n(\tau)d\tau+q_n(t)\right)z_n(x), \qquad (32)$$

мында

$$q_n(t)=-2\int_t^T e^{-\lambda_n^2(s-t)}\left[V_n(s)-\xi_n(s)\right]ds, \qquad (33)$$

мында $B_n(\tau,t,\lambda)$

$$G_n(\tau,t)=\int_t^T e^{-\lambda_n^2(s-t)}K(\tau,s)ds,\quad G_n(\tau,t)=0,$$

ядронун резольвентасы ар бир n=1,2,3,… үчүн Неймандын катарын суммасы түрүндө аныкталат

$$B_n(\tau,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}G_{n,i}(\tau,t),\ G_{n,i+1}(\tau,t)=\int_0^T G_n(\eta,t)G_{n,i}(\tau,\eta)d\eta$$

жана төмөнкү баалоо канаатандырылат

$$\int_0^T B_n^2(\tau,t,\lambda)d\tau\le\frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}.$$

Изилденүүчү $\{u_1^0(t),...,u_m^0(t)\}$ башкарууларды оптималдуулуктун шартына ылайык табабыз. Бул $\{u_1^0(t),...,u_m^0(t)\}$ башкаруулар оптималдуу башкаруулар болуп эсептелинет.

(31)- формуладагы $\omega(t,x)$ функциясын (32)– (33) формулаларга ылайык алмаштырып төмөнкү теңдемелер системасын алабыз

$$\beta\frac{p_k\left[u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[u_k(t)\right]}=g_k\left[x_k(t)\right]\sum_{n=1}^{\infty}z_n\left[x_k(t)\right]h_n(t,\lambda)-g_k\left[x_k(t)\right]\sum_{n=1}^{\infty}z_n\left[x_k(t)\right]\times$$

$$\times\int_0^T W_n(t,\eta,\lambda)\sum_{j=1}^{m}q_j\left[x_j(\eta)\right]d\eta,\ k=1,2,..,m, \quad (34)$$

мында

$$W_n(t,\eta,\lambda)=\int_0^T\varepsilon_n(y,t,\lambda)Y_n(y,\eta,\lambda)dy$$

Андан кийин, (34) сызыктуу эмес теңдемелер системасынын бир маанилүү чечилиши изилденген.

Айталы

$$\beta\frac{p_k\left[u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[u_k(t)\right]}=\sigma_k(t),\ k=1,2,...,m.$$

Бул катыштан айкын эмес түрдөгу функциялар жөнүндөгү теореманын негизинде $u_k(t)$ башкаруу бир маанилуу төмөнкүдөй түрдө аныкталат, б.а.

$$u_k(t)=\varphi_k\left[t,\sigma_k(x),\beta\right],\ k=1,2,...,m. \quad (35)$$

жашайт.

$$\sigma(t)=\{\sigma_1(t),...,\sigma_m(t)\},\ \overline{\theta_n}\left[t\right]=\left\{\theta_{1n}\left[x_1(t),...,\theta_{mn}\left[x_m(t)\right]\right]\right\},$$

$$\varphi\left[t,\sigma(t),\beta\right]=\left\{\varphi_1\left[t,\sigma_1(t),\beta\right],...,\varphi_m\left[t,\sigma_m(t),\beta\right]\right\},$$

$$f\left(t,\varphi\left[t,\sigma(t),\beta\right]\right)=\left\{f_1\left(\varphi_1\left[t,\sigma_1(t),\beta\right]\right),...,f_m\left(\varphi_m\left[t,\sigma_m(t),\beta\right]\right)\right\},$$

$$h(t,\lambda)=\left\{h^{(1)}(t,\lambda),...,h^{(m)}(t,\lambda)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\theta}_n(t)h_n(t,\lambda)$$

вектор-функциялардын кийрүү менен (34) − теңдемелер системасын вектордук жана оператордук формада жазып алабыз

$$\sigma(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\theta}_n(t)\left\{h_n(t,\lambda)-\int_0^T\omega_n(t,\eta,\lambda)\tilde{\theta}_n^*(\eta)f\left(\varphi\left[\eta,\sigma(\eta),\beta\right]\right)d\eta\right\}, \quad (36)$$

$$\sigma=\omega\left[\sigma\right]+h \quad (37)$$

мында $\sigma(t),\ \tilde{\theta}_n(t),\ \tilde{\theta}_n^*(\eta),\ f\left(\varphi\left[\eta,\sigma(\eta),\beta\right]\right)$ − вектор-мамычалар.

Алдын ала $h(t,\lambda)$ жана $\omega\left[\sigma(t)\right]$ функциялары $H^m(0,T)$ гильберттик мейкиндиктин элементтери болоорун далилдейбиз. Андан кийин бул шарттар боюнча (37) оператордук тендеме $H^m(0,T)$ гильберттик мейкиндикте жалгыз чечимге ээ болоору жөнүндөгү ***теорема*** далилденет.

Бул (36) системанын чечими удаалаш жакындатуу ыкмасы менен тургузулган, $\sigma^{(n)}(t)$ удаалаштыгынын предели катары аныкталат.

$$\sigma^{(n)}(t)=\omega\left[\sigma^{(n-1)}(t)+h(t,\lambda)\right],\ n=1,2,3,...,$$

мында $\sigma^{(0)}(t)$ нөлдук жакындатуулар оз эркинче тандалат, көпчүлүк учурда

$$\sigma^{(0)}(t)=h(t,\lambda).$$

Бул учурда төмөнкү баалоо орун алат.

$$\left\|\tilde{\sigma}(t)-\sigma^{(n)}(t)\right\|_{H^m(0,T)}\le\frac{\left(2f^0\varphi^0(\beta)\right)^n}{1-(2f^0\varphi^0(\beta))}\left\|\omega(\sigma^{(0)}(t)\right\|_{H^m(0,T)}.$$

Табылган $\tilde{\sigma}(t)=\left\{\tilde{\sigma}_1(t),...,\tilde{\sigma}_m(t)\right\}$ чечимди (35)- формулага коюу менен изделүүчү башкаруулар табылат.

$$u_k^0(t)=\varphi_k\left[t,\tilde{\sigma}_k(t),\beta\right],k=1,2,3,...,m.$$

Бул башкарууларга тиешелүү болгон чектик маселесинин чечимин төмөнкү формула менен аныкталат

$$V^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right)z_n(x),$$

мында

$$a_n^0(t)=e^{-\lambda_n^2t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\sum_{k=1}^m g_k\left[x_k(\tau)\right]z_n\left[x_k(\tau)\right]f_k\left[u_k^0(\tau)\right]d\tau.$$

Табылган $u_k^0(t)$ и $V^0(t,x)$ боюнча функционалдын минималдуу мааниси эсептелинет

$$J\left[u_1^0(t),...,u_m^0(t)\right]=\int_0^T\int_0^1\left[V^0(t,x)-\xi(t,x)\right]^2dxdt+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^m p_k^2\left[u_k^0(t)\right]dt.$$

Ушундай жол менен табылган

$$\left\{u_1^0(t),...,u_m^0(t),\ V^0(t,x),\ J\left[u_1^0(t),...,u_m^0(t)\right]\right\}$$

үчтүк кыймылдуу чекиттик булактардын таасири астында жылуулуктун таралуу процессин сызыктуу эмес оптималдуу башкарууну көзөмөлдөө маселесинин толук чечими болуп саналат.

Оптималдуу башкарууга туура келген жакындаштыруулар үчүн баалоо табылды

$$\left\|u^0(t)-u^{(n)}(t)\right\|_{H^m(0,T)}^2\le\sum_{k=1}^m\left\|u_k^0(t)-u_k^{(n)}(t)\right\|_{H(0,T)}^2\le\varphi_k^0(\beta)\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\left\|\omega\left[\sigma^{(0)}(t)\right]\right\|_{H^m(0,T)}^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0;$$

Оптималдуу процесстин жакындаштырууларына туура келген баалоолор тургузулду.

$$\left\|V^0(t,x)-V_q^{j,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\left\|V^0(t,x)-V^j(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|V^j(t,x)-V_q^j(t,x)\right\|_{H(Q)}+$$

$$+\left\|V_q^j(t,x)-V_q^{j,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$$

Функционалдын минималдуу маанисине чектүү ченемдеги жакындашуусунун жыйналуучулугу аныкталды

$$\left|J\left[u^0(t)\right]-J_q^{j,r}\left[u^{(q)}(t)\right]\right|\le\left|J\left[u^0(t)\right]-J_q^{j}\left[u^0(t)\right]\right|+\left|J^j\left[u^0(t)\right]-J_q^{j}\left[u^{(q)}(t)\right]\right|+$$
$$+\left|J_q^{j}\left[u^{(q)}(t)\right]-J_q^{j,r}\left[u^{(q)}(t)\right]\right|\xrightarrow[j,q,r\to\infty]{}0;$$

Баптын аягында теориялык тыянактарды тастыктаган сандык мисалды чыгаруу каралган.

КОРУТУНДУ

Жумушта Фредголмдун интегралдык операторун кармаган жекече туундулуу интегро-дифференциалык теңдемелер менен сүрөттөлгөн жылуулук процесстерин сызыктуу эмес башкаруу маселесинин бир маанилуу чечилиши тууралуу суроолор изилденген. Бул жерде объекти башкаруу – аракети сызыктуу эмес функция менен мүнөздөлгөн кыймылдуу чекиттик булактар аркылуу жүргүзүлуп, интегралдык функционалды минимизациялоо анын сапатынын критерийи болуп эсептелинет.

Изилдөөлөр башкаруу жүргүзүүчү мезгилдин бардык аралыгында берилген режимден бир аз гана айрымалана тургандай башкарылуучу процесстин абалын туюндуруучу компоненттерди табууну талап кылган жылуулук процесстердин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселеси скалярдык жана вектордук чекиттик башкаруу учурлары учун жүргүзүлгөн.

Максимум принциби оптималдуу башкаруунун зарыл жана жетиштүү шарты болуп эсептелээри орнотулган. Мында скалярдык башкаруу белгисиз функцияны интегралдын ичинде да жана сыртында да кармаган сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин жалгыз чечими түрүндө, ал эми вектордук башкаруунун компоненттери жогорудай сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин системасынын жалгыз чечими түрүндө аныктаалары көрсөтүлгөн.

Сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин толук жана жакындаштырылган чечимдерин тургузуунун алгоритми иштелип чыкты, ошондой эле тиешелуу функционалдык мейкиндиктеги нормалар боюнча жакындаштырылган чечимдеринин жыйнала тургандыктары көрсөтүлгөн.

Сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чечимдерин тургузуунун иштелип чыккан алгоритми конструктивдуу болуп, табият таануу, физика жана техниканын айрым бир прикладдык маселелерин чыгарууда пайдасы чоң деп эсептейбиз. Ошондой эле жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелер менен сүрөттөлүүчү сызыктуу эмес башкаруулардын жаны моделерин иштеп чыгууда да колдоонуга арзыйт.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН ТЕМАСЫ БОЮНЧА ЖАРЫЯЛАНГАН ЭМГЕКТЕРДИН ТИЗМЕСИ

1. **Эрмекбаева, А.Т.** Условия оптимальности в задаче подвижного точечного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева // Вестник КРСУ. − Бишкек, 2016.− № 5. − С. 45−50. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26452853
2. **Эрмекбаева, А.Т.** Подвижное оптимальное точечное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / А.Т. Эрмекбаева // Вестник КРСУ. − Бишкек, 2017. −№ 1. – С. 71-75. https:// www.elibrary.ru/item.asp?id =29076781
3. **Эрмекбаева, А.Т.** Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации при подвижном точечном управлении тепловым процессом [Текст] / А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева // Вестник КРСУ. − Бишкек, 2016. − № 8. − С. 10-15. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36486810
4. **Эрмекбаева, А.Т.** Численное решение задачи нелинейной оптимизации с подвижным управлением [Текст] / А.Т. Эрмекбаева // Вестник ОшГУ. − Ош, 2021. − № 1. – С. 114-123. https:// https://www.elibrary.ru/item.asp?id =47406397
5. **Ermekbaeva, A.T.** Numerical analysis of the influence of the initial parameters on the convergence rate of the approximate solution of the boundary value problem [Текст] / A. Kerimbekov, A.T. Ermekbaeva, G.B. Mombekova // Abstractbook/ ICMS 2019, AIP Conference Proceedings 2183, 070024. − 2019. − P. 110-112. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43219730
6. **Ermekbaeva, A.T.** On the solvability of the tracking problem in the optimization of the thermal process by moving point controls [Текст] / A. Kerimbekov, A.T. Ermekbaeva, E. Seydakmat k. // Журнал «Математика Карагандинского университета». – Караганда, 2021. − № 2(102). –– С. 67-73. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46270639

Эрмекбаева Айжан Турдубековнанын «Фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык тендемеси менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстерин оптималдуу чекиттик башкаруу» деген темада 01.01.02 –тендемелер, дифференциалдык динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: жылуулук процесси, алсыз жалпыланган чечим, функционал, оптималдык башкаруу, сызыктуу эмес интегралдык теңдеме, жакындаштырылган чечим, жыйналуучулук.

Изилдөөнүн объектиси: Фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн башкарылуучу жылуулук процесстер.

Изилдөөнүн предмети: жылуулук процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чечүү жана оптималдуу башкаруу, оптималдуу процесс жана функционал боюнча анын жакындашуусунун жыйналуучулугун далилдөө.

Изилдөөнүн максаты: квадраттык функционал минималдаштыруу менен жылуулук процессин башкаруунун сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чыгарылышынын жеткиликтүү шарттарын аныктоо.

Изилдөөнүн методдору: изилдөөдө бөлүштүрүлгөн параметрлер системасында оптималдуу башкаруу теориясынын методдору , вариациялык эсептөө, математикалык физиканын теңдемелери, функционалдык анализ жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер теориясы колдонулду.

Алынган натыйжалар жана алардын жаңылыгы: башкарылуучу процесстин чектик маселеси үчүн Фредгольм интегралдык оператору менен жылуулук өткөрүмдүүлүктүн интегро-дифференциалдык теңдемесинин алсыз жалпыланган чечими түшүнүгүн киргизилген жана тышкы кыймылдуу чекиттердин башкаруулардын катышуусунда аны куруунун алгоритми көрсөтүлгөн; сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чечими негизги функциясына карата барабарсыздык түрүндөгү кошумча шартты канааттандырышынын зарылдыгы көрсөтүлгөн; маселенин толук чечимин тургузуунун алгоритми иштелип чыккан жана алардын жакындашууларынын жыйналуусу далилденген.

Изилдөөнүн практикалык мааниси: сызыктуу эмес оптималдаштыруунун маселесинин чекиттик башкаруу функциясы сызыктуу эмес болгон учурдагы жакындаштырылган чыгарылышын табуунун түзүлгөн алгоритми жылуулук процессин башкарууга байланышкан маселелерди чыгарууда колдонулунат.

РЕЗЮМЕ

диссертации Эрмекбаевой Айжан Турдубековны на тему: «Оптимальное точечное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: тепловой процесс, слабо обобщенное решение, функционал, оптимальное управление, нелинейное интегральное уравнение, приближенное решение, сходимость.

Объект исследования: управляемые тепловые процессы, описываемые фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями.

Предмет исследования: разрешимость задачи нелинейной оптимизации теплового процесса и доказательства сходимости приближений по управлению, оптимальному процессу и функционалу.

Цель исследования: установить достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса в случае точечного подвижного управления при минимизации квадратичного функционала.

Методы исследования: при исследовании были использованы методы теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, классического вариационного исчисления, уравнений математической физики, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.

Полученные результаты и их новизна: введено понятие слабо обобщенного решения интегро-дифференциального уравнения теплопроводности с интегральным оператором Фредгольма и указан алгоритм его построения при наличии внешних подвижных точечных источников; установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации; разработан алгоритм построения полного решения задачи нелинейной оптимизации и доказаны сходимости его приближений.

Практическое значение исследования: разработанный алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации при точечном управлении может быть использован в приложениях при решении практических задач, связанных с управлением тепловых процессов.

SUMMARY

Dissertations «Optimal point control of thermal processes described by a Fredholm integral-differential equations» by Ermekbaeva Ayzhana Turdubekovna is submitted for the scientific degree of physical-mathematical sciences candidate, specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: thermal processes, generalized solution, functionality, optimal control, nonlinear integral equation, approximate solution, convergence.

Research object is the controlled thermal processes described by a Fredholm integral-differential equations.

Research subject is the solvability of the problem of nonlinear optimization of the thermal process and proof of convergence of approximations on control, optimal process and functional.

Research purpose is to establish the sufficient conditions of the unique solvability of nonlinear optimization in thermal process in case of the point moving control while minimizing the quadratic functional.

Research methodology: the methods of the optimal control theory of distributed parameters systems, methods of classical variational calculus, methods of solving of equations of mathematical physics, methods functional analysis and the theory of nonlinear integral equations.

Obtained results and their novelty: the concepts of a weakly generalized solution of integro-differential equation of thermal conductivity with the Fredholm integral operator for the boundary value problem of a controlled process are introduced and an algorithm for its construction in the presence of external moving point sources is specified; sufficient conditions for unambiguous solvability of the nonlinear optimization problem were established; an algorithm for constructing a complete solution to the nonlinear optimization problem is developed and the convergence of its approximations was proved.

The practical significance of research: the developed algorithm for constructing the approximate solution of nonlinear optimization by point control can be used in applications for solving practical problems related to the management of the thermal processes.

Басмага берилди: 20.06.22

Көлөмү : 1,25 б.т. Буйрутма № 12

Форматы 60х84 1/16. Нускасы 100 даана.

ОшМУнун “Билим” редакциялык –басма бөлүмү ОшГУ

Ош ш., Ленина к., 331