

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Б. ОСМОНОВА**

Диссертационный совет Д 05.22.651

На правах рукописи
УДК: 517.955.8

Чоюбеков Сапарбек Мийзамбекович

**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ
НЕКЛАССИЧЕСКИХ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПЕРВОГО РОДА**

01.01.02— дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико- математических наук

Ош – 2023

Диссертационная работа выполнена на кафедре математического анализа
Ошского государственного университета

Научный руководитель: **Асанов Авыт**, доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии КР по науке, заведующий лабораторией «Теории некорректных и обратных задач» Института математики НАН КР

Официальные оппоненты: **Керимбеков Акылбек**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики Кыргызско-Российского Славянского университета имени Б. Ельцина

Мамбетов Жоомарт Иманалиевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой информатики Ошского технологического университета имени М.М. Адышева

Ведущая организация: Кафедра математического анализа Кыргызского национального университета имени **Ж. Баласагына**. Адрес: г. Бишкек, улица Т. Абдымомунова, 328.

Защита диссертации состоится 2 февраля 2024 года в 14³⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 05.22.651 по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете и Джалал-Абадском государственном университете по адресу: 723500, г. Ош улица Ленина, 331, ауд. 203. Код онлайн трансляции защиты диссертации: <https://vc.vak.kg/b/052-pvt-luj-9ih>

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Ошского государственного университета (г. Ош, улица Ленина 331), Жалал-Абадского государственного университета им. Б. Осмонова (г. Жалал-Абад, улица Ленина 57) и в Национальной библиотеке Кыргызской Республики имени А. Осмонова (г. Бишкек, улица Юсупа Абдрахманова, 208), а также на сайте Национальной аттестационной комиссии при Президенте Кыргызской Республики <https://vak.kg/>.

Автореферат разослан 29 декабря 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент



Бекешов Т. О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Интегральные уравнения, основной раздел математики, широко используются в физике, технике, механике, теории управления и других областях. Развиваются новые области, связанные с применением интегральных уравнений, такие как экономические науки, некоторые разделы биологии и т.д.

Теория интегральных уравнений в основном развивалась в конце девятнадцатого и начале двадцатого века, её начали изучать ученые Эрик Ивар Фредгольм (1900-1903), Вито Вольтерр (1908), Давид Гильберт, Эрхард Шмидт (1936) и т.д. Тем не менее, в рамках математических концепций, существовавших до первой половины двадцатого века, такие задачи считались некорректными из-за того, что небольшое изменение заданных функций приводило к большому изменению искомым функций.

Тихонов А.Н. (1963, 1986) поставил вопрос о дополнительной информации, необходимой для изучения некорректных вопросов, и ввел предположения о жизнеспособности решения и компактности множества решений. Это позволило разработать теорему об условной корректности поставленной задачи. Он также предложил использовать более конкретный метод регулирования – малое возбуждение – применяемый к интегральным уравнениям первого рода.

Такие некорректные задачи и теория интегральных уравнений дали большой толчок развитию исследований. Важные результаты отражены в работах Лаврентьева М. М. (1932), Адамар Дж. (1978), Арсеньев В. Я. (1969, 1969), Шишацкий С. П. (2001), Бухгейм А. Л.), (1972, 1978), Денисов А. М. (1975, 1980, 1999), (1972, 1978), и т.д. Позже теоретическая часть интегральных уравнений была изучена многими следующими учеными. В частности, Цалюк З. Б. (1977), Апарцин А. С. (1973, 2018), Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М., (1983), Ламм Р. К. (2000), Иманалиев М. И. (1978- 2018), Асанов А. (1979- 2015) и др.

Уравнение Вольтерры первого рода-это интегральное уравнение, которое в ряде случаев не имеет точного решения. Предел интегрирования, был проведен в очень небольших количествах по неклассическим линейным и нелинейным интегральным уравнениям с переменными пределами и построение решений в этих работах основано на численных методах.

Поэтому для так называемых неклассических интегральных уравнений Вольтерра актуальным является определение условий, обеспечивающих единственность и регуляризацию их решений.

Связь темы диссертации с приоритетными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми образовательными и научными учреждениями. Диссертационная работа выполнена в рамках научных проектов в Институте фундаментальных и прикладных исследований при ОшГУ и научно-исследовательской лаборатории Теории некоторых и обратных задач Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики, «Исследование важнейших классов топологических и кинематических пространств, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и разработка математических моделей экономических систем», в разделе 3: Интегральные уравнения, неклассические и обратные задачи.

Цель и задачи исследования. Целью исследования является изучение решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода, т.е. построить оператор регуляризации решения, выбор параметра регуляризации и доказательство единственности решения.

1. Определение единственности решения линейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода;
2. Построение оператора регуляризации решения линейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода;
3. Выбор параметра регуляризации для решения линейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода.
4. Определение единственности решения нелинейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода.

Научная новизна работы. В диссертационной работе:

- Построен оператор регуляризации по М. М. Лаврентьеву в решении линейного неклассического интегрального уравнения первого рода Вольтерра;
- Доказана единственность решения линейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода;
- Выбран оператор регуляризации для решения линейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода;
- Построен оператор регуляризации по М. М. Лаврентьеву в решении нелинейного неклассического интегрального уравнения первого рода Вольтерра;

– Построен оператор регуляризации решения нелинейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода;

– Доказана единственность решения нелинейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода;

Практическая значимость полученных результатов. Хотя Диссертация имеет теоретическое содержание, ее результаты могут быть применены при изучении интегральных, интегро-дифференциальных уравнений, таких как интегральное уравнение Вольтерра первого рода, а также для изучения некоторых конкретных прикладных процессов в областях физики, экологии, медицины, теории комплексного управления в сложных системах управления. Мы также предполагаем, что ее можно применять для решения некоторых конкретных прикладных задач, которые сводятся к уравнениям первого рода.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

– Построен оператор регуляризации по М. М. Лаврентьеву в решении линейного неклассического интегрального уравнения первого рода Вольтерра;

– Доказана единственность решения линейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода;

– Выбран оператор регуляризации для решения линейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода;

– Построен оператор регуляризации по М. М. Лаврентьеву в решении нелинейного неклассического интегрального уравнения первого рода Вольтерра;

– Построен оператор регуляризации решения нелинейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода;

– Доказана единственность решения нелинейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода;

Личный вклад соискателя. Все научные результаты, представленные в диссертации, принадлежат только автору. Постановка задачи была осуществлена научным руководителем. Идеи, разработанные методы, научные результаты принадлежат автору [1-12]. Обсуждение научных результатов в статьях [1], [2], [3] проводилось Т.О. Бекешовым, а научные результаты принадлежат автору.

Апробация результатов исследования. Результаты работы были представлены и обсуждены на международных конференциях:

- Научная конференция, посвященная 60-летию академика Борубаева Алтая Асылкановича, проведенная в Кыргызско-Российском Славянском университете имени Б. Ельцина (2010 г., город Бишкек);
- Научная конференция, посвященная 80-летию академика Иманалиева Мурзабека Иманалиевича, проведенная в Кыргызском национальном университете имени Жусупа Баласагына (2011, Бишкек);
- Региональный научный семинар имени К. Алымкулова “Актуальные проблемы математики и их применение” (2020-23 гг., Ош;)
- Научная конференция, посвященная 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Алыбаева Курманбека Сармановича, проведенная в Джалал-Абадском государственном университете имени Бекмамата Осмонова (2023, Джалал-Абад).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях.

По результатам исследований соискателем: 12 статей опубликованы в рецензируемых изданиях, зарегистрированных в РИНЦ. Среди них [4, 5, 6] статьи, опубликованы в журналах Российской Федерации. В журналах было опубликовано 2 статьи [10, 11] с импакт-фактором более 0,1 в РИНЦ, индексируемых в базах данных ISSN. Общая оценка составила 159 балла.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из содержания, списка условных обозначений, введения, четырех глав, разделенных на 10 параграфов, заключения, списка использованной литературы.

Список использованной литературы содержит 90 наименований. Объем текста 89 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении даны актуальность темы, общая характеристика работы, цель и проблемы исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения, которые приведут к защите Диссертации.

Первая глава “ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ” состоит из двух параграфов. В параграфе § 1.1. “Обзор литературы” мы остановились на результатах и диссертационных работах авторов, близких к теме диссертации. В параграфе § 1.2. “Обзор результатов диссертации” приведен подробный обзор научных результатов диссертации с широким акцентом. Поставленные задачи были четко сформулированы, а теоремы были представлены без доказательств. В заключении отмечалось, что диссертационные исследования по проведенному анализу являются

актуальными, оригинальными и представляют теоретический и практический интерес.

Глава вторая “МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ” состоит из двух параграфов. § 2.1. ”Объекты и предметы исследования”. Объекты исследования:

1) Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра первого рода:

$$\int_{\alpha(t)}^t K(t,s)u(s)ds = f(t); \quad t \in [t_0, T]. \quad (1)$$

где $\alpha(t) \in C^1[t_0, T]$, $\alpha(t_0) = t_0$, $\alpha(t) \leq t$, при всех $t \in [t_0, T]$, $K(t,s)$ в области $G = \{(t,s): t_0 \leq t \leq T, \alpha(t) \leq s \leq t\}$ и $f(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ известные функции, $f(t_0) = 0$. $u(t)$ – искомая функция на отрезке $[t_0, T]$.

2) Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение Вольтерра:

$$\int_{\alpha(t)}^t K(t,s,u(s))ds = f(t); \quad t \in [t_0, T], \quad (2)$$

при этом учитывался случай

$$K(t,s,u(s)) = K_0(t,s)u(s) + K_1(t,s,u(s)).$$

3) В интегральном уравнении Вольтерра (2) еще рассматривается случай

$$K(t,s,u(s)) = K_0(t,s)u(s) + K_1(t,s,u(s)).$$

4) (1) приведено интегральное уравнение. Здесь $\alpha(t)$, $K(t,s)$ и $f(t)$ – заданные функции, где $\alpha(t) \in C^1[t_0, T]$, $\alpha(t_0) = \beta < t_0$, $f(t) \in C^1[t_0, T]$, $\alpha(t) \leq t$, при всех $t \in [t_0, T]$. $K(t,s)$ и $K'_t(t,s)$ – непрерывные функции в области $G = \{(t,s): \alpha(t) \leq s \leq t \leq T\}$, $\alpha(t)$ – строго возрастающая функция на отрезке $[t_0, T]$, $u(t)$ – искомая функция на отрезке $[t_0, T]$.

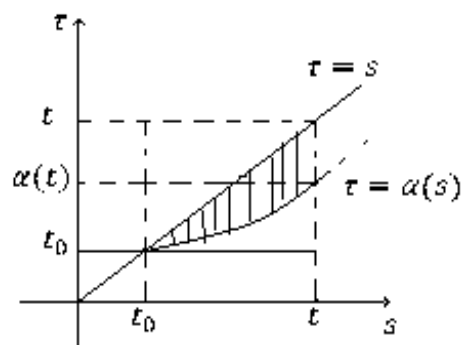
а) $K(t,s)$ и $K'_t(t,s)$ – непрерывные функции в области $G = \{(t,s): \alpha(t) \leq s \leq t \leq T\}$, при всех $t \in [t_0, T]$ $K(t,t) \neq 0$.

б) $\alpha(t)$, $\alpha'(t)$, $f(t)$, $f'(t) \in [t_0, T]$, $\alpha(t_0) = \beta < t_0$, $\alpha(T) = t_0$, $\alpha(t) \leq t$, при всех $t \in [t_0, T]$, где $\alpha(t)$ – строго возрастающая функция на отрезке $[t_0, T]$.

Задача: (1) для уравнения определить условия, обеспечивающие единственность решения и регуляризацию, когда ядро $K(t,s)$ недифференцируемо или $K(t,t) = 0$ в определенных точках по диагонали.

Лемма 1.1.1. (Обобщенная формула Дирихле). Пусть $\alpha(t) \in C[t_0, T]$, $\alpha(t_0) = t_0$, $\alpha(t)$ – строго возрастающая функция на $[t_0, T]$, $\alpha(t) \leq t$ при всех $t \in [t_0, T]$, $F(t,s) \in C(G)$, $G = \{(t,s): t_0 \leq t \leq T, \alpha(t) \leq s \leq t\}$, $F_1(t,s) \in C(G_1)$, $G_1 = \{(t,s): t_0 \leq t \leq T, t_0 \leq s \leq \alpha(t)\}$. Тогда для любого $t \in [t_0, T]$

$$\int_{t_0}^t \int_{\alpha(s)}^s F(s,\tau) d\tau ds = \int_{t_0}^{\alpha(t)} \left[\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)} F(s,\tau) ds \right] d\tau + \int_{\alpha(t)}^t \left[\int_{\alpha(t)}^t F(s,\tau) ds \right] d\tau,$$



$$\int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^{\alpha(s)} F_1(s, \tau) d\tau \right] ds = \int_{t_0}^{\alpha(t)} \left[\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t F_1(s, \tau) ds \right] d\tau,$$

где $\alpha^{-1}(\tau)$ обратная функция $\alpha(t)$.

Предмет исследования: Исследование решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода.

В §2.2. «Методы исследования» рассмотрены такие методы, как: 1) Метод интегральным преобразованием; 2) Регуляризация по М. М. Лаврентьеву; 3) вычисление кратных интегралов. Приведены условия, леммы и теоремы установленные для исследования диссертации.

Также было приведено заключение для второй главы.

Основные результаты диссертации представлены в главах 3 и 4. В главе 3 приведена регуляризация решения линейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода и доказана единственность решения. Глава 3 состоит из 4 параграфов.

В § 3.1 рассмотрено следующее интегральное уравнение:

$$\int_{\alpha(t)}^t K(t, s) u(s) ds = f(t); \quad t \in [t_0, T]. \quad (3)$$

где $\alpha(t) \in C^1[t_0, T]$, $\alpha(t_0) = t_0$, $\alpha(t) \leq t$ при всех $t \in [t_0, T]$, $K(t, s)$ в области $G = \{(t, s): t_0 \leq t \leq T, \alpha(t) \leq s \leq t\}$ и $f(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ известные функции. $u(t)$ – искомая функция на $[t_0, T]$.

Предполагаем выполнение следующих условий:

- 1⁰ $\alpha(t) \in C^1[t_0, T]$, $\alpha'(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0, T]$;
- 2⁰ $K(s, s) \geq m > 0$ и $K(t, t) \in C[t_0, T]$ при всех $s \in [t_0, T]$;
- 3⁰ Функция $K(t, s)$ удовлетворяет условие Липшица по t , т.е. $\forall t, \tau \in [t_0, T], (t > \tau)$ и при всех $(t, s), (\tau, s) \in G$, $|K(t, s) - K(\tau, s)| \leq L(t - \tau)$, $L > 0 - const$.

Наряду с уравнением (3) рассмотрим уравнение

$$\varepsilon v(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s) v(s, \varepsilon) ds = f(t) + \varepsilon u(t_0); \quad t \in [t_0, T], \quad (4)$$

где $u(t)$ – решение уравнения (3). Его решение будем искать в виде

$$v(t, \varepsilon) = u(t) + \xi(t, \varepsilon) \quad (5)$$

Тогда из (4) имеем

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s) \xi(s, \varepsilon) ds = -\varepsilon(u(t) - u(t_0)).$$

Последнее перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned} \xi(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t K(s, s) \xi(s, \varepsilon) ds &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha(t)}^t [K(t, s) - K(s, s)] \xi(s, \varepsilon) ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\alpha(t)} K(s, s) \xi(s, \varepsilon) ds - (u(t) - u(t_0)). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь, после нескольких изменений, получим следующий вид:

$$\begin{aligned}
\xi(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\alpha(t)} \left\{ K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(s, s) ds} + \int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)} \frac{1}{\varepsilon} K(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} [K(s, \tau) - K(t, \tau)] ds + \right. \\
& + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(\tau, \tau) d\tau} - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} \right] [K(t, \tau) - K(\tau, \tau)] \xi(\tau, \varepsilon) d\tau + \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha(t)}^t \{-[K(t, \tau) - K(\tau, \tau)] + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} [K(s, \tau) - K(t, \tau)] ds + \\
& + \left[1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} \right] [K(t, \tau) - K(\tau, \tau)] \xi(\tau, \varepsilon) d\tau - \\
& - [u(t) - u(t_0)] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t K(\tau, \tau) d\tau} - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t K(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} [u(t) - u(s)] ds. \tag{7}
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$H_0(t, \tau, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} K(\alpha^{-1}(\tau), \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(s, s) ds}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
H_1(t, \tau, \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} [K(t, \tau) - K(\tau, \tau)] + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)} K(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} \times \\
& \times [K(s, \tau) - K(t, \tau)] ds + \frac{1}{\varepsilon} [K(t, \tau) - K(\alpha^{-1}(\tau), \tau)] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(\tau, \tau) d\tau}, \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2(t, \tau, \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(s, s) ds} [K(t, \tau) - K(\tau, \tau)] - \\
& - \int_{\tau}^t K(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} \frac{1}{\varepsilon} [K(t, \tau) - K(s, \tau)] ds, \tag{10}
\end{aligned}$$

$$U(t, \varepsilon) = -[u(t) - u(t_0)] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t K(\tau, \tau) d\tau} - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t K(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} [u(t) - u(s)] ds. \tag{11}$$

Учитывая обозначения (8)-(11) уравнение (7) запишем в следующем виде

$$\begin{aligned}
\xi(t, \varepsilon) = & \int_{t_0}^{\alpha(t)} H_0(t, \tau, \varepsilon) \xi(\tau, \varepsilon) d\tau + \int_{t_0}^{\alpha(t)} H_1(t, \tau, \varepsilon) \xi(\tau, \varepsilon) d\tau + \\
& + \int_{\alpha(t)}^t H_2(t, \tau, \varepsilon) \xi(\tau, \varepsilon) d\tau + U(t, \varepsilon); \quad t \in [t_0, T]. \tag{12}
\end{aligned}$$

Далее были доказаны следующие леммы и теоремы:

Лемма 3.1.1. Если выполняются условия 1^0-2^0 . Тогда для функции $H_0(t, \tau, \varepsilon)$ определенной по формуле (8) имеет место

$$\int_{t_0}^{\alpha(t)} |H_0(t, \tau, \varepsilon)| d\tau \leq \gamma_0, \quad t \in [t_0, T]. \tag{13}$$

Лемма 3.1.2. Пусть выполняются условия 1^0-3^0 и функции $H_1(t, \tau, \varepsilon)$, $H_2(t, \tau, \varepsilon)$ определены по формулами (9) и (10) соответственно. Тогда справедливы оценки:

$$1) |H_1(t, \tau, \varepsilon)| \leq \frac{L}{m} (2e^{-1} + 1), \quad (t, \tau) \in G_1 = \{(t, \tau): t_0 \leq t \leq T, \quad t_0 \leq \tau \leq \alpha(t)\}; \quad (14)$$

$$2) |H_2(t, \tau, \varepsilon)| \leq \frac{L}{m}, \quad (t, \tau) \in G = \{(t, \tau): t_0 \leq t \leq T, \quad \alpha(t) \leq \tau \leq t\}. \quad (15)$$

Лемма 3.1.3. Пусть выполняются условия 2^0 $U(t, \varepsilon)$ определенная по формуле (11). Тогда:

1) если $u(t) \in C[t_0, T]$, то

$$\|U(t, \varepsilon)\|_C = \sup_{t \in [t_0, T]} |U(t, \varepsilon)| \leq 2\|u(t)\|_C e^{\frac{m}{1-\beta}} + \omega_u(\varepsilon^\beta); \quad 0 < \beta < 1, \quad (16)$$

где $\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup_{|t-s| \leq \varepsilon^\beta} |u(t) - u(s)|$;

2) если $u(t) \in C^\gamma[t_0, T]$, $0 < \gamma \leq 1$, то

$$\|U(t, \varepsilon)\|_C \leq C_0 C_\gamma \varepsilon^\gamma, \quad (17)$$

где $C_\gamma = \sup_{t, s \in [t_0, T]} \frac{|u(t) - u(s)|}{|t - s|^\gamma}$, $C_0 = \int_0^\infty e^{-m\tau} \tau^{\gamma-1} d\tau$.

Теорема 3.1.1. Пусть выполняются условия 1^0 - 3^0 и $\gamma_0 b_0 < 1$, где

$$\gamma_0 = \sup_{v \in [t_0, T]} \frac{|K(v, \alpha(v))| \alpha'(v)}{K(v, v)}, \quad b_0 = \exp\left[\frac{L}{m} (2e^{-1} + 1)(T - t_0)\right].$$

Тогда: 1) если уравнение (3) имеет решение $u(t) \in C[t_0, T]$, то решение $v(t, \varepsilon)$ уравнения (4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0, T]$ к решению $u(t)$ и справедлива оценка:

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_C \leq \frac{b_0}{1 - \gamma_0 b_0} \left[2\|u(t)\|_C e^{\frac{m}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_u(\varepsilon^\beta) \right]. \quad (18)$$

где $\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup_{|t-s| \leq \varepsilon^\beta} |u(t) - u(s)|$;

2) Если уравнение (3) имеет решение $u(t) \in C^\gamma[t_0, T]$, $0 < \gamma < 1$, то решение $v(t, \varepsilon)$ уравнения (4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0, T]$ к решению $u(t)$. При этом справедлива оценка:

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_C \leq \frac{b_0}{1 - \gamma_0 b_0} C_0 C_\gamma \varepsilon^\gamma, \quad (19)$$

где $C_\gamma = \sup_{t, s \in [t_0, T]} \frac{|u(t) - u(s)|}{|t - s|^\gamma}$, $C_0 = \int_0^\infty e^{-m\tau} \tau^{\gamma-1} d\tau$.

Теорема 3.1.2. Пусть выполняются условия 1^0 - 3^0 и $\gamma_0 b_0 < 1$, где γ_0 и b_0 определены в теореме 3.1.1. Тогда решение уравнение (3) в пространстве $C[t_0, T]$ единственно.

Теорема 3.1.3. Если выполняются условия 1^0-3^0 и почти для всех $t \in [t_0, t_1]$, $K(t, t) > 0$ будет существовать как $t_1 \in (t_0, T]$, то решение уравнения (3) в пространстве $C_\varphi^\gamma[t_0, T]$, ($0 < \gamma < 1$) единственно, где $\varphi(t) = \int_{t_0}^t K(s, s) ds$.

В § 3.2 выбран параметр регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого, с переменными пределами интеграла. При этом условие задачи устанавливается так же, как и в § 3.1. Также к условию задачи была добавлена функция $f_\delta(t)$, приближенная к заданной функции $f(t)$ на отрезке $[t_0, t]$.

Решение этой задачи было определено с помощью функции $f_\delta(t)$, с приближенным параметром регуляризации.

Наряду с уравнением (3) рассмотрим уравнение:

$$\varepsilon v(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s) v(s, \varepsilon) ds = f(t) + \varepsilon u(t_0); \quad t \in [t_0, T], \quad (20)$$

$$\varepsilon v_\delta(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s) v_\delta(s, \varepsilon) ds = f_\delta(t) + \varepsilon u_\delta(t_0); \quad t \in [t_0, T], \quad (21)$$

$0 < \varepsilon < 1$ – малый параметр.

$$\|f(t) - f_\delta(t)\|_C = \sup_{t \in [t_0, T]} |f(t) - f_\delta(t)| < \delta, \quad |u(t_0) - u_\delta(t_0)| < \alpha_0 \delta, \quad (22)$$

$\alpha_0 > 0$ и $0 < \delta < 1$ малый параметр.

Требовалось выполнение тех же условий, что и в вышестоящей § 3.1.

Затем мы воспользовались вышеупомянутыми леммой 3.1.1 и леммой 3.1.2 и сформировали следующую лемму:

Лемма 3.2.3. Пусть выполняется условие 2^0 , $U_\delta(t, \varepsilon)$ определенной формулой

$$U_\delta(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} [f(t) - f_\delta(t)] + [u(t_0) - u_\delta(t_0)] - \\ - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t K(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} [f(s) - f_\delta(s)] + [u(t_0) - u_\delta(t_0)] \right\} ds, \quad (23)$$

и $f(t), f_\delta(t) \in C[t_0, T]$ то на $[t_0, T]$ справедлива оценка

$$\|U_\delta(t, \varepsilon)\|_C \leq 2\left(\frac{\delta}{\varepsilon} + \alpha_0 \delta\right); \quad (24)$$

где $\|f(t) - f_\delta(t)\|_C = \sup_{t \in [t_0, T]} |f(t) - f_\delta(t)| \leq \delta$, $|u(t_0) - u_\delta(t_0)| \leq \alpha_0 \delta$; $0 < \alpha_0$ и $0 < \delta < 1$ малый параметр.

Теорема 3.2.1. Пусть выполняются условия 1^0-3^0 и $\gamma_0 b_0 < 1$, где

$$\gamma_0 = \sup_{v \in [t_0, T]} \frac{|K(v, \alpha(v))| \alpha'(v)}{K(v, v)}, \quad b_0 = \exp\left[\frac{L}{m} (2e^{-1} + 1)(T - t_0)\right].$$

Также предположим, что выполняется условие (22), функция $v(t, \varepsilon)$ является решением уравнения (20), а функция $v_\delta(t, \varepsilon)$ является решением интегрального уравнения (21). Тогда справедлива оценка

$$\|v(t, \varepsilon) - v_\delta(t, \varepsilon)\|_C \leq \frac{2b_0}{1 - \gamma_0 b_0} \left[\frac{\delta}{\varepsilon} + \alpha_0 \delta \right].$$

Теорема 3.2.2. Пусть выполняются условия Теоремы 3.2.1. Тогда:

1) если уравнение (3) имеет решение $u(t) \in C[t_0, T]$, то решение $v_\delta(t, \varepsilon)$ уравнения (21) при $\varepsilon = \sqrt{\delta} \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0, T]$ к решению $u(t)$ и справедлива оценка

$$\|v_\delta(t, \sqrt{\delta}) - u(t)\|_C \leq \frac{b_0}{1 - b_0 \gamma_0} [2\|u(t)\|_C e^{-\frac{m}{\delta^{(1-\beta)/2}}} + w_u(\delta^{\beta/2}) + 2(\sqrt{\delta} + \alpha_0 \delta)], \quad (25)$$

где $w_u(\delta) = \sup_{|t-s| \leq \delta} |u(t) - u(s)|$;

2) если уравнение (3) имеет решение $u(t) \in C^\gamma[t_0, T]$, $0 < \gamma < 1$, то решение $v_\delta(t, \sqrt{\delta})$ уравнения (21) при $\delta \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0, T]$ к решению $u(t)$ и справедлива оценка

$$\|v_\delta(t, \sqrt{\delta}) - u(t)\|_C \leq \frac{b_0}{1 - b_0 \gamma_0} [C_0 C_\gamma \gamma \delta^{\frac{\gamma}{2}} + 2(\sqrt{\delta} + \alpha_0 \delta)], \quad (26)$$

где C_0, C_γ определены в Теореме 1.

В § 3.3. было сказано о решении линейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода. При этом задача ставится следующим образом:

Приведено интегральное уравнение (3). Где $\alpha(t)$, $K(t, s)$ и $f(t)$ – заданные функции, где $\alpha(t) \in C^1[t_0, T]$, $\alpha(t_0) = \beta < t_0$, $f(t) \in C^1[t_0, T]$, $\alpha(t) \leq t$ при всех $t \in [t_0, T]$, $K(t, s)$ и $K'_t(t, s)$ – непрерывные функции в области $G = \{(t, s): \alpha(t) \leq s \leq t \leq T\}$, $\alpha(t)$ – строго возрастающая функция в $[t_0, T]$, $u(t)$ – искомая функция в $[t_0, T]$.

Предположили выполнения следующих условий:

а) $K(t, s)$ и $K'_t(t, s)$ – непрерывные функции в области $G = \{(t, s): \alpha(t) \leq s \leq t \leq T\}$, $K(t, t) \neq 0$ при всех $t \in [t_0, T]$.

б) $\alpha(t)$, $\alpha'(t)$, $f(t)$, $f'(t) \in [t_0, T]$, $\alpha(t_0) = \beta < t_0$, $\alpha(T) = t_0$, $\alpha(t) \leq t$, при всех $t \in [t_0, T]$, где $\alpha(t)$ – строго возрастающая функция в $[t_0, T]$.

Пусть

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in [\beta, t_0], \quad (27)$$

где $\varphi(t)$ – известная непрерывная функция в $[\beta, t_0]$.

Тогда дифференцируя интегральное уравнение (3) имеем

$$K(t, t)u(t) - K(t, \alpha(t))u(\alpha(t))\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^t K'_t(t, s)u(s)ds = f'(t), \quad t \in [t_0, T],$$

отсюда получим:

$$u(t) = \frac{K(t, \alpha(t))}{K(t, t)} u(\alpha(t)) \alpha'(t) - \int_{\alpha(t)}^t \frac{K'_t(t, s)}{K(t, t)} u(s) ds + \frac{f'(t)}{K(t, t)}, \quad t \in [t_0, T]. \quad (28)$$

Учитывая условия а), б) и (27) интегральное уравнение (28) запишем в виде:

$$u(t) = - \int_{t_0}^t \frac{K'_t(t, s)}{K(t, t)} u(s) ds + P(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (29)$$

где

$$P(t) = \frac{K(t, \alpha(t))}{K(t, t)} \varphi(\alpha(t)) \alpha'(t) - \int_{\alpha(t)}^{t_0} \frac{K'_t(t, s)}{K(t, t)} \varphi(s) ds + \frac{f'(t)}{K(t, t)}, \quad t \in [t_0, T]. \quad (30)$$

Полагая $t = t_0$ и учитывая (27) и (30), из (3) и (29) получим:

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0} K(t_0, s) \varphi(s) ds = f(t_0); \quad (31)$$

$$\varphi(t_0) = \frac{K(t_0, \alpha(t_0))}{K(t_0, t_0)} \varphi(\alpha(t_0)) \alpha'(t_0) - \int_{\beta}^{t_0} \frac{K'_t(t_0, s)}{K(t_0, t_0)} \varphi(s) ds + \frac{f'(t_0)}{K(t_0, t_0)}. \quad (32)$$

Теорема 3.3.1. Пусть выполняются условия а), б), (31) и (32). Тогда интегральное уравнение (3) с условием (27) эквивалентно интегральному уравнению второго рода (29), где $P(t)$ – определено по формуле (30).

Следствие 3.3.1. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда интегральное уравнение (3) с условием (27) имеет единственное решение в пространстве $C[\beta, T]$.

Пример 3.3.1. Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{t-1}^t [1 + (t-s)] u(s) ds = t^2 + 3t - \frac{5}{3}; \quad t \in [0; 1], \quad (33)$$

с условием

$$u(t) = 2t, \quad t \in [-1; 0]. \quad (34)$$

Здесь $\alpha(t) = t - 1$, $t_0 = 0$, $\beta = -1$, $T = 1$, $K(t, s) = 1 + (t - s)$, $\alpha'(t) = 1$, $f(t) = t^2 + 3t - \frac{5}{3}$.

Кроме того, предположим, что при $t \in [-1; 0]$, $u(t) = 2t$. $\varphi(t) = 2t$, $t \in [-1; 0]$. В этом случае $K(t, t) = 1$, $K(t, \alpha(t)) = 2$, $K'_t(t, s) = 1$, при $(t, s) \in G = \{(t, s) : t - 1 \leq s \leq t \leq 1\}$, $\varphi(\alpha(t_0)) = -2$, $f'(t) = 2t + 3$.

Окончательный ответ получили:

$$u(t) = 2(t - e^{-t} + 1); \quad t \in [0; 1]. \quad (35)$$

В § 3.4 была рассмотрена регуляризация решения неклассических линейных уравнений Вольтерра первого рода, с начальным условием.

При этом задача ставится так же, как и в § 3.3. Потребовали выполнение условий а) и б). Мы использовали § 3.3 до условия (32) для решения проблемы. Затем мы продолжали исследовать следующее интегральное уравнение:

$$\varepsilon v(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s) v(s, \varepsilon) ds = f(t) + \varepsilon \varphi(t_0), \quad (36)$$

$$\text{с условием } v(t, \varepsilon) = \varphi(t), \quad t \in [\beta, t_0], \quad (37)$$

где $\varepsilon > 0$ некоторый малый параметр. В интегральное уравнение (36) сделаем подстановку:

$$v(t, \varepsilon) = u(t) + \xi(t, \varepsilon), \quad t \in [\beta, t_0]. \quad (38)$$

Отсюда получим

$$\varepsilon u(t) + \varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s) u(s) ds + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s) \xi(s, \varepsilon) ds = f(t) + \varepsilon \varphi(t_0). \quad (39)$$

В силу (3) из (39) получим:

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s) \xi(s, \varepsilon) ds = \varepsilon [\varphi(t_0) - u(t)]. \quad (40)$$

Учитывая функцию (38) и условия (37) и (27) имеем:

$$\xi(t, \varepsilon) = 0; \quad t \in [\beta, t_0]. \quad (41)$$

Из (40) разделив интеграл получим:

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^{t_0} K(t, s) \xi(s, \varepsilon) ds + \int_{t_0}^t K(t, s) \xi(s, \varepsilon) ds = \varepsilon [\varphi(t_0) - u(t)]. \quad (42)$$

В силу (41) имеем:

$$\int_{\alpha(t)}^{t_0} K(t, s) \xi(s, \varepsilon) ds = 0, \quad t \in [\beta, T] \quad (43)$$

и отметим, что

$$\varphi(t_0) = u(t_0).$$

Тогда в силу (43) из (42) получим:

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t K(t, s) \xi(s, \varepsilon) ds = \varepsilon [\varphi(t_0) - u(t)]. \quad (44)$$

Дифференцируя уравнение (44) имеем:

$$\varepsilon \xi'(t, \varepsilon) + K(t, t) \xi(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t K'_t(t, s) \xi(s, \varepsilon) ds = -\varepsilon u'(t), \quad (45)$$

с начальным условием

$$\xi(t_0, \varepsilon) = 0. \quad (46)$$

Уравнение (45) - линейное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка

$$\xi'(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} K(t, t) \xi(t, \varepsilon) = -u'(t) - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t K'_t(t, s) \xi(s, \varepsilon) ds, \quad (47)$$

с условием (18). Задачи Коши (46)-(47) эквивалентны следующему интегральному уравнению.

$$\xi(t, \varepsilon) = - \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} \left(u'(s) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s K'_s(s, \tau) \xi(\tau, \varepsilon) d\tau \right) ds. \quad (48)$$

Сформулировали следующую теорему.

Теорема 3.4.1. Пусть выполняются условия а), в) и функция $u(t) \in C^1[t_0, T]$ является решением интегрального уравнения (3) с условием (27). Тогда решения интегрального уравнения (36) с условием (37) сходится с решением $u(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. справедлива следующая оценка

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_C \leq M_1 \varepsilon,$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{|u_0|}{\alpha} e^{\frac{M_0}{\alpha}(T-t_0)}, \\ M_0 &= \sup_{(t,s) \in G} |K'_t(t, s)|, \\ u_0 &= \|u'(t)\|_C = \sup_{t \in [t_0, T]} |u'(t)|, \\ \|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_C &\leq M_1 \varepsilon. \end{aligned}$$

Затем следующий пример 2 был полностью решен.

Пример 3.4.1. Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{t-1}^t e^{t-s} u(s) ds = e^t; \quad t \in [0; 1], \quad (49)$$

с условием

$$u(t) = e^t, \quad t \in [-1; 0]. \quad (50)$$

Здесь $\alpha(t) = t - 1$, $t_0 = 0$, $\beta = -1$, $T = 1$, $K(t, s) = e^{t-s}$, $\alpha'(t) = 1$, $f(t) = e^t$. Кроме того предположим, что при $t \in [-1; 0]$ $u(t) = e^t$, $\varphi(t) = e^t$. В этом случае $K(t, \alpha(t)) = e$, $K'_t(t, s) = e^{t-s}$, $K(t, t) = 1$ при $(t, s) = G = \{(t, s) : t - 1 \leq s \leq t \leq 1\}$.

Получили решение:

$$u(t) = e^t. \quad (51)$$

Теперь оценим решение уравнения (49)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\xi(t, \varepsilon)| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_0}{\alpha} e^{M_0(T-t_0)} \varepsilon.$$

Затем мы сосредоточились на задаче регулярности решения интегрального уравнения (49), т.е. интегральное уравнение

$$\varepsilon v(t, \varepsilon) + \int_{t-1}^t e^{t-s} v(s, \varepsilon) ds = e^t + \varepsilon, \quad t \in [0; 1], \quad (52)$$

решили с условием

$$v(t, \varepsilon) = e^t, \quad t \in [-1; 0]. \quad (53)$$

Показали, что решение интегрального уравнения (52) при начальном условии (53) является регуляризацией решения интегрального уравнения (49) при начальном условии (50). Далее

$$|\xi(t, \varepsilon)| \leq \int_0^t e |\xi(\tau, \varepsilon)| d\tau + \varepsilon e, \quad t \in [0; 1] \quad (54)$$

используя неравенство Гронуллы-Бельмана для неравенства, получим оценку

$$\|\xi(t, \varepsilon)\|_C \leq \|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_C = \|v(t, \varepsilon) - e^t\|_C \leq e e^\varepsilon \varepsilon. \quad (55)$$

Отсюда, $\varepsilon \rightarrow 0$, последнее соотношение стремится к нулю.

Глава 4 состоит из 2 параграфов. В § 4.1 рассмотрели решение нелинейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Задача ставится следующим образом.

Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{\alpha(t)}^t K(t, s) u(s) ds = f(t); \quad t \in [t_0, T], \quad (56)$$

где $\alpha(t) \in C[t_0, t]$, $\alpha(t_0) = t_0$, $\alpha(t) \leq t$, $f(t)$ и $K(t, s, u(s))$ заданные функции на отрезке $[t_0, T]$ и в области $G \times R$, где $G = \{(t, s): t_0 \leq t \leq T, \alpha(t) \leq s \leq t\}$, $u(t)$ – искомая функция на отрезке $[t_0, T]$.

К условиям § 3.1 добавлено следующее условие:

4⁰ При всех $(\tau, u_1), (\tau, u_2) \in [t_0, T] \times R$, $|K_1(\tau, u_2) - K_1(\tau, u_1)| \leq L_1(\tau) |u_2 - u_1|$, $L_1(\tau) \in L[t_0, T]$, $K_1(t, 0) \equiv 0$ при $\forall t \in [t_0, T]$.

Пусть

$$K(t, s, u(s)) = K_0(t, s) u(s) + K_1(s, u(s)).$$

Тогда уравнение (56) можно представить в виде:

$$\int_{\alpha(t)}^t K_0(t, s) u(s) ds + \int_{\alpha(t)}^t K_1(s, u(s)) ds = f(t); \quad t \in [t_0, T]. \quad (57)$$

Наряду с уравнением (57) рассмотрим:

$$\varepsilon v(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K_0(t, s) v(s, \varepsilon) ds + \int_{\alpha(t)}^t K_1(s, v(s, \varepsilon)) ds = f(t) + \varepsilon u(t_0); \quad t \in [t_0, T], \quad (58)$$

где $0 < \varepsilon < 1$ некоторый малый параметр.

Его решение будем искать в виде

$$v(t, \varepsilon) = u(t) + \xi(t, \varepsilon); \quad (59)$$

где $u(t)$ решение уравнения (57), а $\xi(t, \varepsilon)$ неизвестная функция.

Далее мы использовали леммы, доказанные выше, и следующие леммы были сформулированы и доказаны:

Лемма 4.1.4. Пусть выполняются условия 1⁰, 2⁰ и 4⁰, функция $N_0(t, \tau, u(\tau), \xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$ определена соответственно формулой

$$N_0(t, \tau, u(\tau), \xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K_0(\tau, \tau) d\tau} - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K_0(\tau, \tau) d\tau} \right] [K_1(\tau, u(\tau) + \xi(\tau, \varepsilon)) - K_1(\tau, u(\tau))]. \quad (60)$$

Тогда имеют места следующие неравенства

$$\int_{t_0}^{\alpha(t)} |N_0(t, \tau, u(\tau), \xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)| d\tau \leq \gamma_1 \|\xi(\tau, \varepsilon)\|_C; \quad (61)$$

$$\text{где } \gamma_1 = \sup_{v \in [\alpha(t), T]} \frac{|L_1(\alpha(v))| \alpha'(v)}{|K_0(v, v)|}$$

Лемма 4.1.5. Пусть выполняются условия 1^0 , 2^0 , 4^0 и функция $N_1(t, \tau, u(\tau), \xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$ определена соответственно формулой

$$N_1(t, \tau, u(\tau), \xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} [K_1(\tau, u(\tau) + \xi(\tau, \varepsilon)) - K_1(\tau, u(\tau))] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K_0(\tau, \tau) d\tau}. \quad (62)$$

Тогда справедлива оценка:

$$\int_{t_0}^{\alpha(t)} |N_1(t, \tau, u(\tau), \xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)| d\tau \leq \gamma_2 \|\xi(t, \varepsilon)\|_C; \quad (63)$$

$$\text{где } \gamma_2 = \sup_{\tau \in [t_0, T]} \frac{|L_1(\tau)|}{|K_0(\tau, \tau)|}.$$

Тогда была доказана следующая теорема:

Теорема 4.1.1. Пусть выполняются условия 1^0 - 4^0 и $(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)b_0 < 1$, где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sup_{v \in [t_0, T]} \frac{|K(v, \alpha(v))| \alpha'(v)}{K(v, v)}, & \gamma_1 &= \sup_{v \in [\alpha(t), T]} \frac{|L_1(\alpha(v))| \alpha'(v)}{|K_0(v, v)|}, \\ \gamma_2 &= \sup_{\tau \in [t_0, T]} \frac{|L_1(\tau)|}{|K_0(\tau, \tau)|}, & b_0 &= \exp\left[\frac{L}{m}(2e^{-1} + 1)(T - t_0)\right]. \end{aligned}$$

Тогда, 1) если уравнение (56) имеет решение $u(t) \in C[t_0, T]$, то решение $v(t, \varepsilon)$ уравнения (58) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0, T]$ к решению $u(t)$ и справедлива оценка

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\| \leq \frac{b_0}{1 - (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)b_0} [2\|u(t)\|_C e^{-\frac{m}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_u(\varepsilon^\beta)]; \quad (64)$$

$$\text{где } \omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup_{|t-s| \leq \varepsilon^\beta} |u(t) - u(s)|.$$

2) Если уравнение (56) имеет решение $u(t) \in C^\gamma[t_0, T]$, $0 < \gamma < 1$ то решение $v(t, \varepsilon)$, уравнения (58) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0, T]$ к решению $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\| \leq \frac{b_0}{1 - (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)b_0} \gamma C_0 C_\gamma \varepsilon^\gamma; \quad (65)$$

$$\text{где } C_0 = \gamma \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{\gamma-1} d\tau; \quad C_\gamma = \sup_{(t,s) \in [t_0, T]} \frac{|u(t) - u(s)|}{|t - s|^\gamma}.$$

В § 4.2 рассматривалась регуляризация решения нелинейного уравнения Вольтерра первого рода. Здесь постановка задачи такая же, как и в § 4.1.

Условия в § 3.1 были приведены и вместо 4⁰ условий в § 4.1 было дано следующее условие.

4⁰ При всех $(t, \tau, u_1), (s, \tau, u_1), (t, \tau, u_2)$ и $(s, \tau, u_2) \in G \times R$
 $|K_1(t, \tau, u_2) - K_1(s, \tau, u_2) - K_1(t, \tau, u_1) + K_1(s, \tau, u_1)| \leq L_1 |t - s| |u_1 - u_2|$, $L_1 > 0 - const$. $K_1(t, t, u) \equiv 0$ и
 $K_1(\alpha^{-1}(t), t, u) \equiv 0$ при $\forall (t, u) \in [t_0, T] \times R$, $K_1(t, s, 0) \equiv 0$ при $\forall (t, s) \in G$.

Пусть в уравнении (56)

$$K(t, s, u(s)) = K_0(t, s)u(s) + K_1(t, s, u(s)).$$

Тогда уравнение (56) можно представить:

$$\int_{\alpha(t)}^t K_0(t, s)u(s)ds + \int_{\alpha(t)}^t K_1(t, s, u(s))ds = f(t); \quad t \in [t_0, T]. \quad (66)$$

Наряду с уравнением (66) рассмотрим:

$$\varepsilon v(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K_0(t, s)v(s, \varepsilon)ds + \int_{\alpha(t)}^t K_1(t, s, v(s, \varepsilon))ds = f(t) + \varepsilon u(t_0); \quad t \in [t_0, T], \quad (67)$$

где $0 < \varepsilon < 1$ некоторый малый параметр.

Здесь тоже были учтены леммы, доказанные в § 3.1 и § 4.1.

Теорема 4.2.1. Пусть выполняются условия 1⁰-4⁰ и $\beta_1 = \gamma_0 e^{M(T-t_0)} < 1$, где

$$\gamma_0 = \sup_{v \in [t_0, T]} \frac{|K_0(v, \alpha(v))\alpha'(v)|}{K_0(v, v)}, \quad M = \frac{2L_0}{m}(e^{-1} + 1) + \frac{L_1}{m}(\frac{e^{-1}}{m} + 3e^{-1} + 2).$$

Тогда: 1) если уравнение (56) имеет решение $u(t)$ в пространстве $C[t_0, T]$, то решение $v(t, \varepsilon)$ уравнения (66) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0, T]$ к решению $u(t)$ и справедлива оценка

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_C \leq \frac{e^{M(T-t_0)}}{1 - \beta_1} [3\|u(t)\|_C e^{\frac{1}{1-\beta}} + w_u(\varepsilon^\beta)]; \quad (68)$$

где $w_u(\varepsilon^\beta) = \sup_{|t-s| \leq \varepsilon^\beta} |u(t) - u(s)|$;

2) Если уравнение (56) имеет решение $u(t)$ в пространстве $C^\gamma[t_0, T]$, ($0 < \gamma < 1$) то решение $v(t, \varepsilon)$ уравнения (66) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0, T]$ к решению $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_C \leq \frac{e^{M(T-t_0)}}{1 - \beta_1} C_0 C_\gamma \gamma \varepsilon^\gamma, \quad (69)$$

где $C_0 = \int_0^\infty e^{-m\tau} \tau^{\gamma-1} d\tau$, $C_\gamma = \sup_{t, s \in [t_0, T]} \frac{|u(t) - u(s)|}{|t - s|^\gamma}$.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе доказана единственность решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Выбраны параметры для решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Для

решения неклассического интегрального уравнения первого рода построен оператор регуляризации по М. М. Лаврентьеву и доказана теорема о единственности, получены следующие результаты:

- Построен оператор регуляризации по М. М. Лаврентьеву для решений неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода;
- Доказана единственность решений неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода;
- Выбран оператор регуляризации для решения линейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода;
- Исследована единственность решений одного класса линейных неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода;
- Построен оператор регуляризации по М. М. Лаврентьеву для решений нелинейных неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода;
- Доказана единственность решений одного класса неклассических нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода;
- Построен оператор регуляризации по М. М. Лаврентьеву для решений неклассических и общего случая нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода.
- Доказана единственность решений неклассических и общего случая нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Рекомендуем научные результаты диссертации для использования при решении дифференциальных уравнений в физике и других областях науки.

Думаем, что решение линейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода находит практическое применение при поиске решений дифференциальных уравнений.

Предлагаем использовать его при чтении лекций по нашей диссертации, при преподавании специальных курсов по подготовке бакалавров и магистров, аспирантов и PhD докторов наук по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Физико-математическое образование», а также в областях математики, физики, техники и других науках, связанных с качественной теорией дифференциальных уравнений, при постановке теоретических задач.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Чоюбеков, С. М.** Регуляризация и единственность решения неклассического интегрального уравнения с условием Липшица [текст] / А. Асанов, Т. О. Бекешов, С. М. Чоюбеков // Вестник КНУ: Специальный выпуск. – Бишкек, 2011. – С. 108-111.
2. **Чоюбеков, С. М.** О решении неклассического интегрального уравнения I рода в пространстве непрерывных функции [текст] / А. Асанов, Т. О. Бекешов, С. М. Чоюбеков // Вестник ОшГУ. – №3. – Ош, 2012. – С. 48-54.
3. **Чоюбеков, С. М.** Об одном классе неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода [текст] / А. Асанов, Т. О. Бекешов, С. М. Чоюбеков // Вестник ОшГУ. – №3. – Ош, 2014. – С. 83-88.
4. **Чоюбеков, С. М.** Регуляризация решения неклассического интегрального уравнения со условиями Липшица [текст] / С. М. Чоюбеков // Молодой ученый. – №8(112). – Казань, 2016. – С. 34-38. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25966734>
5. **Чоюбеков, С. М.** Регуляризация решения нелинейных уравнений Вольтерра I рода с условиями Липшица [текст] / А. Асанов, С. М. Чоюбеков // Точная наука. – №23. – Кемерово, 2018. – С. 6-11. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=34942755>
6. **Чоюбеков, С. М.** Решение неклассических интегральных уравнений Вольтерра I рода с вырожденным нелинейным ядром [текст] / А. Асанов, С. М. Чоюбеков // Международный научно-исследовательский журнал. – Екатеринбург, 2018. – № 4(70). – С. 134-138. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=34963121>
7. **Чоюбеков, С. М.** Выбор параметра регуляризации интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интеграла [текст] / А. Асанов, С. М. Чоюбеков // Известия вузов Кыргызстана. – №1. – Бишкек, 2018. – С. 6-11. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35034192>
8. **Чоюбеков, С. М.** О решении линейных неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода [текст] / А. Асанов, С. М. Чоюбеков // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – №1. – Бишкек, 2020. – С. 3-8. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43938641>
9. **Чоюбеков, С. М.** Решения нелинейных уравнений Вольтерра первого рода [текст] / А. Асанов, С. М. Чоюбеков // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – №12. – Бишкек, 2020. – С. 3-8. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45653796>
10. **Чоюбеков, С. М.** Регуляризация решения неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [текст] / А. Асанов, С. М. Чоюбеков // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – № 1. – Бишкек, 2021. – С. 3-8. **IF:0,177** <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45672099>
11. **Чоюбеков, С. М.** Вольтерранын биринчи түрдөгү сызыктуу классикалык эмес тендемелерине чечимдердин параметрин тандоо [текст] / А. Асанов, С. М. Чоюбеков // Вестник КГУСТА. – №2(76). – Бишкек, 2022. – С. 490-495. **IF:0,176** <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48491431>
12. **Чоюбеков, С. М.** Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык тендемесинин чыгарылышына мисалдар [текст] / С. М. Чоюбеков // Вестник ОшГУ, серия: Математика, физика, техника. – Ош, 2022. – №1. – С. 167-176. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48614398>

Чоюбеков Сапарбек Мийзамбековичтин “Классикалык эмес биринчи түрдөгү айрым интегралдык теңдемелердин чечимдеринин регуляризациясы жана жалгыздыгы” деген темадагы 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн диссертациянын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: интегралдык теңдемелер, регуляризациялоо, үзгүлтүксүз функция, жакындаштырылган чечимдер, мейкиндик, Липшицтин шарты, Дирихленин жалпыланган формуласы, Граноулла-Белмандын барабарсыздыгы, эселик интегралдар.

Изилдөө объектиси: Вольтерранын биринчи түрдөгү классикалык эмес интегралдык теңдемеси.

Изилдөө предмети: Вольтерранын биринчи түрдөгү классикалык эмес интегралдык теңдемесинин чечимин изилдөө.

Жумуштун максаты: Вольтерранын биринчи түрдөгү классикалык эмес интегралдык теңдемесинин чечимин изилдөө жана чечимге регуляризациялоо операторун тургузуу, регуляризациялоо параметрин тандоо жана чечимдин жалгыздыгын далилдөө болуп эсептелет.

Изилдөөнүн методдору жана аппараттары: Тескерисинен далилдөө; М. М. Лаврентьев боюнча регуляризациялоо; эселүү интегралдарды эсептөө.

Алынган натыйжалар жана алардын жаңылыгы: Вольтерранын биринчи түрдөгү сызыктуу классикалык эмес интегралдык теңдемесинин чечиминин жалгыздыгы далилденген; Вольтерранын биринчи түрдөгү сызыктуу классикалык эмес интегралдык теңдемесинин чечимине регуляризациялоо оператору тургузулган; Вольтерранын биринчи түрдөгү сызыктуу классикалык эмес интегралдык теңдемесин чечүү үчүн регуляризациялоо параметри тандалган; Вольтерранын биринчи түрдөгү сызыктуу эмес классикалык эмес интегралдык теңдемесинин чечимине регуляризация оператору тургузулган; Вольтерранын биринчи түрдөгү сызыктуу эмес классикалык эмес интегралдык теңдемесинин чечиминин жалгыздыгы далилденген.

Колдонуу даражасы же колдонуу боюнча сунуштар: Жумуш теориялык мазмунда болгону менен анын натыйжаларын интегро-дифференциалдык теңдемелерди изилдөөдө жана айрым прикладдык маселелерди изилдөө үчүн колдонууга сунуш кылынат.

Колдонуу жааты: Бул сыяктуу маселелер дифференциалдык теңдемелердин сапаттык теориясы менен байланышкан математиканын, физиканын, техниканын ж.б. илимдин кээ бир тармактарында, теориялык маселелерди чыгарууда кездешет.

РЕЗЮМЕ

Диссертации Чоюбекова Сапарбека Мийзамбековича на тему: “Регуляризация и единственность решений некоторых неклассических некоторых интегральных уравнений первого рода” на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02-дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: Интегральные уравнения, регуляризация, непрерывная функция, приближенные решения, пространство, условие Липшица, обобщенная формула Дирихле, неравенство Граноуллы-Бельмана, кратные интегралы.

Объект исследования: Неклассическое интегральное уравнение Вольтерра первого рода.

Предмет исследования: Исследование решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода.

Цель работы: Исследование решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода, а именно построение оператора регуляризации, выбор параметра регуляризации и доказательство единственности решения.

Методы исследования и аппаратура: Обратное доказательство; регуляризация по М. М. Лаврентьеву; вычисление кратных интегралов.

Полученные результаты и их новизна: Доказана единственность решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Построен алгоритм выбора для регуляризации линейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Построен оператор регуляризации нелинейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Выбран параметр регуляризации.

Степень использования или рекомендации по использованию: Хотя работа является теоретической, ее результаты могут быть использованы при изучении интегро-дифференциальных уравнений и для изучения прикладных задач физики, экологии, медицины и т.д.

Область применения: Подобные задачи встречаются в математике, физике, технике и некоторых других областях науки при постановке теоретических задач связанных с качественной теорией уравнений.

SUMMARY

Dissertation of Saparbek Miyzambekovich Choyubekov on “Regularization and uniqueness of solutions of some non-classical integral equations of the first kind” for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences on specialty 01.01.02-differential equations, dynamic systems and optimal control

Keywords: integral equations, regularization, continuous function, approximate solutions, space, Lipschitz condition, generalized Dirichlet formula, Grönwall–Bellman inequality, multiple integrals.

The object of the study: Non-classical integral Volterra equation of the first kind.

Subject of research: An investigation of the solution of the non-classical integral Volterra equation of the first kind.

The purpose of the work: The investigation of the solution of the non-classical Volterra integral equation of the first kind and the establishment of the regularization operator for the solution, the choice of the regularization parameter, and the proof of the uniqueness of the solution.

Research methods and apparatus: Inverse Proof; regularization according to M.M. Lavrentiev; calculation of multiple integrals.

The results obtained and their novelty: The uniqueness of the solution of Volterra's linear non-classical integral equation of the first kind is proved; A regularization operator is constructed for the solution of Volterra's linear non-classical integral equation of the first kind; The regularization parameter is chosen to solve Volterra's linear non-classical integral equation of the first kind; A regularization operator is constructed for the solution of Volterra's nonlinear classical integral equation of the first kind; The uniqueness of the solution of Volterra's nonlinear classical integral equation of the first kind is proved;

Degree of use or recommendations for use: Although the work is in theoretical content, its results can be used in the study of integral differential equations and for the study of applied processes of physics, ecology, medicine.

Scope: Such problems are encountered in some fields of science, solving theoretical problems related to the qualitative theory of differential equations in mathematics, physics, engineering, etc.



УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- \in – знак принадлежности;
- \equiv – знак тождественно равно;
- \forall – знак любой или Квантор обобщения;
- \exists – Квантор существования;
- \Rightarrow – «от сюда»;
- $0 < \varepsilon$ – малый параметр;
- $L > 0 - const$
- $C[t_0, T]$ – пространство непрерывных функций на отрезке $[t_0, T]$;
- $\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup_{|t-s| \leq \delta} |u(t) - u(s)|$;
- $\|\bullet\|_C$ – норма в $C[t_0, T]$, т.е. $\|u(t)\|_C = \sup_{t \in R} |u(t)|$ для любого $u(t) \in C[t_0, T]$;
- $K(t, s), f(t) \in G = \{(t, s): t_0 \leq t \leq T, \alpha(t) \leq s \leq t\}$;
- $\alpha(t) \in C^1[t_0, T]$ и $\alpha'(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0, T]$;
- $K(t, t) \in C[t_0, T]$ и $K(s, s) \geq m > 0$ при всех $s \in [t_0, T]$;
- Функция $K(t, s)$ удовлетворяет условия Липшица по t , т.е. $\forall t, \tau \in [t_0, T], (t > \tau)$ при всех $(t, s), (\tau, s) \in G, |K(t, s) - K(\tau, s)| \leq L(t - \tau), L > 0 - const$.
- При всех $(\tau, u_1), (\tau, u_2) \in [t_0, T] \times R, |K_1(\tau, u_2) - K_1(\tau, u_1)| \leq L_1(\tau)|u_2 - u_1|, L_1(\tau) \in C[t_0, T], K_1(t, 0) \equiv 0$ при $\forall t \in [t_0, T]$;
- Обозначим $C^\gamma[t_0, T], (0 < \gamma \leq 1)$ – пространство Гёльдора, т.е. функция $u(t)$ определенная в $[t_0, T]$ удовлетворяет условию $|u(t) - u(\tau)| \leq C|t - \tau|^\gamma$. Здесь $C > 0$ некоторая постоянная, зависящая $u(t)$, но не от t и τ .
- Пространства $C^\gamma[t_0, T], (0 < \gamma \leq 1)$ является Банаховым пространством с нормой $\|u(t)\| = \sup_{t \in [t_0, T]} |u(t)| + \sup_{t \in [t_0, T]} \frac{|u(t) - u(\tau)|}{|t - \tau|^\gamma}$.

Подписано в печать 19.12.23 г.

Объем: 1,5 п.л.

Заказ № 37

Формат бумаги 60x90 1/16

Тираж 120 экз.

Редакционно-издательский сектор “Билим” ОшГУ

Город Ош, улица Ленина 331.