МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 517. 968

САДЫКОВА ГУЛЬХАН КУРБАНБЕКОВНА

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Специальность 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., профессор Аширбаева А.Ж.

Ош - 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

R –множество вещественных чисел;

$R_+=[0,\infty)$, $R_{++}=(0,\infty)$;

R^n $(n\in N)$ – n-мерное вещественное евклидово пространство и его точки $x=(x_1, x_2, \dots,x_n)$;

$||\cdot||$ - норма;

для непрерывных (и ограниченных, если область определения не ограничена) функций будем подразумевать максимум модуля функции;

$T\in R_{++}$,$m,n\in N$- некоторые фиксированные числа;

$Q_m(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x)|\ 0\le t_1\le t_2\le t_3\le\ldots\le t_m\le T,\ x\in R\}$;

$Q_m^n(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x)|0\le t_1\le t_2\le t_3\le\ldots\le t_m\le T,\ x\in R^n\}$;

$Q_m=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x)|0\le t_1\le t_2\le t_3\le\ldots\le t_m<\infty,\ x\in R\}$;

$Q_m^n=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x)|\ 0\le t_1\le t_2\le t_3\le\ldots\le t_m<\infty,\ x\in R^n\}$;

Если в вышеуказанных пространствах отмечено знак “~”, это означает, $x\in R_+$;

Ω - подмножества евклидова пространства R^n;

$C(\Omega\to B)$ и $C^{(..)}(\Omega\to B)$ - пространства функций $\Omega\to B$, определенных и непрерывных (соответственно с дополнительными условиями); при $B=R$ обозначение «$\to R$» будем опускать;

$C(\Omega),C^{(k)}(\Omega), C^{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\delta)}(\Omega)$ – пространства функций, определенных и непрерывных (соответственно вместе со всеми своими производными до порядка k; соответственно вместе со своими производными до порядка α_i по i-му аргументу $(i=1,\dots,n)$) на Ω;

$\overline{C},\overline{C}^{(\dots)}$ - пространства функций с дополнительным условием ограниченности (соответственно и для указанных производных);

$Lip(N|_u,M|_v,\dots)$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной u с коэффициентом N, по переменной v с коэффициентом $M,\dots$; для функции одной переменной индекс будем опускать;

Дифференциальные операторы:

$$D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_n[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n] = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \omega_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

Операторы, преобразующие функции в функции, будем записывать сначала в полном виде: функция каких переменных получается; (после знака ;): на какую функцию (или несколько функций) и каких переменных действует оператор; связанные переменные в этой функции (по аналогии с записью интегралов), через двоеточие. В дальнейшем, если запись повторяется без изменений, операторы будем записывать и в кратком виде.

Например:

$$G(t; u(s,\xi) : s, \xi) = G(t; u) = \int_0^t \int_0^1 K(t, s, \xi) \frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi} d\xi ds + g(t), \quad (t, x) \in Q_1;$$

(оператор преобразует функцию двух переменных в функцию одной переменной, при этом используются значения функции-операнда в различных точках);

$$B(t; u(t,\xi) : \xi) = B(t; u) = \int_0^t u(t,\xi) d\xi, \quad (t, x) \in Q_1$$

(оператор преобразует функцию двух переменных в функцию одной переменной, при этом используются значения функции-операнда только с таким значением первой переменной);

$$H(u(s, \xi_1, \ldots \xi_n) : s, \xi_1, \ldots \xi_n) = H(u) = \int_0^1 \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty u^2(s, \xi_1, \ldots \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n ds$$

(если интеграл сходится) (оператор преобразует функцию многих переменных в число, по традиции такие операторы называются функционалами).

Если оператор $F(t,x,u(s,x):s)$, $t \geq 0$, фактически зависит только от значений $u(s,x)$ при $0 \leq s \leq t$, то будем называть его «вольтерровского типа»; если существует такое $T_* > 0$, что уравнение вида $F(t,x,u(s,x):s) = 0$, имеет решение при $0 \leq t \leq T_*$, то будем называть такое решение локальным.

Для единообразия зафиксируем значения букв:

$u(t,x)$ – неизвестная функция;

$v(\tau,t,x)$ – неизвестная функция с одной добавленной переменной;

$$p(\tau,t,x;v(\rho,t,x):\rho)=x-\int_{\tau}^{t}v(\rho,t,x)d\rho$$

- вспомогательный оператор;

МДА - метод дополнительного аргумента;

ИУ - интегральное уравнение;

СИУ-система интегральных уравнений;

ДУ-дифференциальное уравнение;

СНДУ-система нелинейных дифференциальных уравнений;

СНОУ-система нелинейных операторных уравнений;

СНИ.-ДУ-система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений;

НУ-начальное условие;

ПСО-принцип сжатых отображений;

СО-сжатое отображение;

ВУ-векторное уравнение;

ОУ-операторное уравнение;

ЧП-частные производные;

МПП-метод последовательных приближений.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. ДУ в ЧП и СДУ в ЧП часто встречаются в задачах механики сплошных сред, биомеханике и в различных областях физики, где происходят моделирование некоторой сплошной среды.

Для решения СДУ в ЧП сначала сводят уравнение к уравнению или системе уравнений первого-второго порядка, затем ее классифицируют и применяют один из методов, разработанных для уравнений различных типов. Нахождение решения, таким образом, трудно и всегда это не удается.

В настоящее время для нахождения решения СДУ в ЧП используется МДА. С его помощью можно найти точное решение некоторой системы.

В развитие МДА весомый вклад внесли ученые М.И. Иманалиев [23-30], Ю.А. Ведь [20], С.Н. Алексеенко [22-24], П.С. Панков [25-26], Т.И. Иманалиев [31-34], А.Ж. Аширбаева [1-13; 55-68], Э.А. Мамазиаева [48-54], Ж. И. Мамбетов [55-68] и др.

Т.М. Иманалиев применил МДА к системе линейных ДУ в ЧП ([34]). В [34] рассмотрено применение МДА к системе квазилинейных ДУ в ЧП.

М.И. Иманалиевым и С.Н. Алексеенко рассмотрена СНДУ в ЧП первого порядка и с помощью МДА доказано существование и единственность решения поставленной задачи ([23]).

А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов провели работу по распространению МДА в СДУ в ЧП нового класса ([55-68]).

В настоящее время распространение МДА для СНДУ в ЧП и СНИ.-ДУ в ЧП нового класса определяет актуальность данной работы.

Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими работами, проводимыми образовательными и научными учреждениями. Исследование по теме диссертации проводилось в рамках утвержденной тематики «Развитие метода дополнительного аргумента для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных» кафедры математического анализа Ошского государственного университета.

Цель и задачи исследования. Цель настоящей работы состоит в развитии МДА для решения следующих задач:

1) получить достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для СНИ.-ДУ в ЧП с одинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций;

2) получить достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для СНИ.-ДУ в ЧП с неодинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций;

3) построить решения систем двух НИ.-ДУ в ЧП с одинаковым и с неодинаковыми сомножителями;

4) обобщить полученные результаты с использованием развитого МДА для многомерного случая.

Научная новизна полученных результатов. Получены следующие результаты:

– найдены достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для СНИ.-ДУ в ЧП с одинаковым сомножителем, где сомножитель зависить от нескольких неизвестных функций;

– найдены достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для СНИ.-ДУ в ЧП с неодинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций;

– построены решения систем двух НИ.-ДУ в ЧП с одинаковым и с неодинаковыми сомножителями;

– полученные результаты с использованием развитого МДА обобщены для многомерного случая.

Практическая значимость полученных результатов. В диссертации получены новые результаты, которые подтверждены строгими доказательствами и вносят определенный вклад в теорию НИ.-ДУ в ЧП.

По полученным результатам работы построены решения конкретных задач. Разработанную схему применения МДА для решения СНИ.-ДУ в ЧП можно использовать при решении СНДУ и СИ.ДУ других классов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Доказательство теорем существования и единственности решения начальных задач для СНИ.-ДУ в ЧП с одинаковым сомножителем, где сомножитель зависить от нескольких неизвестных функций;

2. Доказательство теорем существования и единственности решения начальных задач для СНИ.-ДУ в ЧП с неодинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций;

3. Построение решения систем двух НИ.-ДУ в ЧП с неодинаковыми и с одинаковым сомножителями;

4. Осуществлено применения развитого МДА для СНИ.-ДУ в ЧП со многими пространственными переменными.

Личный вклад соискателя. В совместных работах [72; 74; 78-80] постановка задач принадлежит научному руководителю А.Ж. Аширбаевой, полученные основные результаты и оценки - соискателю.

Апробации результатов диссертации. Результаты исследований доложены и обсуждены на:

– международной научной конференции "III Борубаевские чтения", посвященной 35-летию Института математики НАН КР (г. Бишкек, май, 2019 г, опубликованы тезисы [73]);

– международной научной конференции «Проблемы современной математики и ее приложения», посвященной 70-летию академика А.А. Борубаева (г. Бишкек, с. Булан-Соготту, июнь, 2021 г., опубликованы тезисы [76]);

– IV международной научной конференции «Актуальные проблемы теорий оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений», приуроченная 50 - летию научно-педагогической деятельности и 75 - летнему юбилею профессора Акылбека Керимбекова (г. Бишкек, июнь, 2022 г.);

– шестой международной конференции по анализу и прикладной математике (ICAAM 2022) (г. Анталия, Турция, октябрь, 2022, опубликованы тезисы [81]);

– конференции “Жогорку окуу жайлардагы илим изилдөөлөрдүн фундаменталдык жана колдонмо маанилүүлүгү” (г. Жалал-Абад, 12 ноября, 2022 г.);

– региональном научном семинаре имени К. Алымкулова «Актуальные проблемы математики и их применения» (2018 – 2022 гг.)

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты работы опубликованы в статьях [72; 74-75; 77-80],а также опубликованы тезисы докладов [73;76;81].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, четырех глав, 18 разделов, выводов, списка использованных источников 86 наименований, всего 91 страница.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1. Результаты других исследований, наиболее близкие к данной работе

Ряд кыргызских ученых занимались МДА. Сначала исследовали решения линейных ДУ в ЧП первого порядка. Исследования решений различных НДУ в ЧП первого порядка рассматривались работах М.И. Иманалиева, С.Н. Алексеенко, П.С. Панкова, А.Ж. Аширбаевой и др. ([1-13; 20-22, 24-34; 69-71]).

В работе [1] были рассмотрены НДУ в ЧП первого порядка, доказаны единственность и существование решения. Построено единственное решение ряда уравнений. МДА применялся и для уравнений со степенными особенностями и со многими пространственными переменными.

Затем МДА был использован для ДУ в ЧП более высокого порядка. Такие применение можно увидеть в работах [2; 3; 5-13].

А.Ж. Аширбаева разработала общую схему применения МДА для ДУ в ЧП высшего порядка ([2]; [7]; [11]).

В настоящее время проводится ряд работ по применению МДА к СДУ в ЧП.

В [34] с помощью МДА рассмотрено исследование решения уравнения:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + a_i(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t,x)u_k(t,x) + f_i(t,x), \quad i=1,\dots,n. \quad (1.1.1)$$

с НУ

$$u_i(0,x) = \varphi_i(x), \quad (1.1.2)$$

где

$$a_i(t,x) \in C^{(0,1)}(R_+ \times R), \quad b_{ik}(t,x) \in C^{(0,1)}(R_+ \times R), \quad f_i(t,x) \in C^{(0,1)}(R_+ \times R),$$
$$i,k = 1,\dots,n.$$

Задача (1.1.1)-(1.1.2) сводится к СИУ вида:

$$u_i(t,x) = \varphi_i(p_i(0,t,x)) + \int_0^t \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(s,p_k(s,t,x))\nu_k(s,t,x)ds + \int_0^t f_i(s,p_k(s,t,x))ds,$$

где

функции $p_i(\tau,t,x), \quad \nu_k(\tau,t,x), \quad 0\le\tau\le t$ определены из систем:

$$\frac{\partial p_i(\tau,t,x)}{\partial t}+a_i(t,x)\frac{\partial p_i(\tau,t,x)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \nu_i(\tau,t,x)}{\partial t}+a_i(t,x)\frac{\partial \nu_i(\tau,t,x)}{\partial x}=0$$

с условиями

$$p_i(t,t,x)=x, \quad \nu_k(t,t,x)=u_k(t,x), \quad i,k=1,\ldots,n.$$

В [34] рассмотрена задача:

$$u_t(t,x)+g(t,x,u(t,x))u_x(t,x)=f(t,x,u(t,x)), \quad (t,x)\in R_+\times R \tag{1.1.3}$$

$$u(0,x)=\varphi(x), \quad x\in R. \tag{1.1.4}$$

Доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1.1.1. Пусть вектор-функции $\varphi(x)\in\overline{C}(R)\cap Lip(L_1)$,

$f(t,x,u)\in C^{(0,1,1)}(R_+\times R\times R)\cap Lip(L(t)\big|_x, L(t)\big|_u)$,

$g(t,x,u)\in C^{(0,1,1)}(R_+\times R\times R)\cap Lip(L(t)\big|_x, L(t)\big|_u)$,

причем $\int\limits_0^\infty L(s)ds(2+L_1)\le\alpha<1.$

Тогда задача (1.1.3) - (1.1.4) имеет единственное непрерывное и ограниченное, вместе со своими ЧП 1 - го порядка по по t решение, которое представляется в виде

$$u(t,x)=\varphi(x-\int\limits_0^t g(s,p(s,t,x)\nu(s,t,x))ds)+\int\limits_0^t f(s,p(s,t,x),\nu(s,t,x))ds,$$

вектор-функция $\nu(\tau,t,x)$ и скалярная функция $p(\tau,t,x)$ определены из системы:

$$\nu_t(\tau,t,x)+g(t,x,\nu(t,t,x))\nu_x(t,t,x)=0, \quad \nu(t,t,x)=u(t,x),$$

$$p_t(\tau,t,x)+g(t,x,\nu(t,t,x))p_x(t,t,x)=0, \quad p(t,t,x)=x.$$

Применение МДА для следующей задачи рассмотрено в [23]

$$u_t+\sum_{k=1}^n u_k u_{x_k}=f(t,x,u,\int\limits_{R^n}K(x,\xi)u(t,\xi)d\xi) \tag{1.1.5}$$

с НУ

$$u(0,x)=\varphi(x), \tag{1.1.6}$$

где $0 \le t \le T_* \le \infty$; $x \in R^n$; $\xi = colon(\xi_1,...,\xi_n)$,

$x = colon(x_1,...,x_n)$, $u(t,x) = colon(u_1,...,u_n)$,

$f = colon(f_1,...,f_n)$, $\varphi = colon(\varphi_1,...,\varphi_n) - n$ мерные вектор-функции;

$K = \{K_{ij}\} - (m \times n)$ – мерная матричная функция, $m = const.$

Задача (1.1.5), (1.1.6) сведена к СИУ

$$w(s,t,x) = \varphi\left(x - \int_0^t w(\tau,t,x)d\tau\right) + \int_0^s f\left(\rho, x - \int_\rho^t w(\tau,t,x)d\tau, w(\rho,t,x),\right.$$

$$\left.\int_{R^n} K(x - \int_\rho^t w(\tau,t,z)d\tau,\xi)w(\rho,\rho,\xi)d\xi\right)d\rho,$$

где w-$colon(w_1,...,w_n)$ - новая неизвестная функция, которая при $s = t$ удовлетворяет задаче (1.1.5), (1.1.6),

$$x - \int_0^t w(\tau,t,x)d\tau = colon\left(x_1 - \int_0^t w_1(\tau,t,x)d\tau,...,x_n - \int_0^t w_n(\tau,t,x)d\tau\right).$$

Применение МДА к системе уравнений другого класса рассматривается также в работах Ж.И. Мамбетова

В [57] рассмотрена СНДУ в ЧП вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x} = f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x)),(t,x) \in Q_1(T) \tag{1.1.7}$$

с НУ (1.1.4).

Доказана следующая

ТЕОРЕМА 1.1.2. Если

$f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T) \times R^n)$, $i = 1,2,..,n,$

то существует такое $0 < T_* \le T$, что задача (1.1.7)-(1.1.4) имеет единственное решение в пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

Рассмотрен конкретный пример.

ПРИМЕР 1.1.1. Рассмотрена задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) - x + 1, \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = 1 + t, \end{cases}$$

$u_1(0,x) = 1, \quad u_2(0,x) = x, \ x \in R.$

Для решения этой задача использован МПП.

В [63] рассматривается СНДУ в ЧП с одинаковым сомножителем $a(t,x,u_n(t,x))$, т.е. функция зависить только от одной неизвестной функции:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + a(t,x,u_n(t,x))\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x} = f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),\ldots,u_n(t,x)), \quad (1.1.8)$$

$(t,x) \in Q_1(T), \quad i = 1,2,\ldots,n.$

при НУ (1.1.4).

Доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1.1.3. Пусть для i=1,2,..,n $\varphi_i(x) \in Lip(L_i)$, $L_i > 0 - const,$

$f_i(t,x,u_1,u_2,\ldots,u_n) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n) \cap Lip(M_0^i\big|_x, M_1^i\big|_{u_1},\ldots,M_n^i\big|_{u_n}),\ M_j^i > 0 - const,$

$j = 0,1,2,\ldots,n, \quad a(t,x,u_n) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R) \cap Lip(N_0\big|_x, N_1\big|_{u_n}),\ N_0, N_1 > 0 - const.$

Тогда существует такое $0 < T_* \le T$, что система (1.1.8) с НУ (1.1.4) имеет единственное решение в пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

В [58] рассматривается следующая СДУ в ЧП в многомерном случае:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} u_{n+1-k}(t,x_1,..,x_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k} = \quad (1.1.9)$$

$$= f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),\ldots,u_n(t,x_1,..,x_n)),$$

i=1,2,…,n, $(t,x_1,..,x_n) \in Q_1^{\,n}(T),$

с НУ (1.1.6).

Доказано, что решение задачи совпадает при s=t с решением СИУ

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=\varphi_i(x_1-\int_0^t\omega_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n-\int_0^t\omega_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu)+$$

$$+\int_0^s f_i(\rho,x_1-\int_\rho^t\omega_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n-\int_\rho^t\omega_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,\omega_1(\rho,t,x_1,...,x_n),....,\omega_n)d\rho,$$

СДУ в ЧП вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^n a_k(t,x_1,...,x_n,u_{n+1-k}(t,x_1,..,x_n))\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=$$

$$=f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)), \qquad (1.1.10)$$

$i=1,2,..,n, \quad (t,x_1,..,x_n)\in Q_1^{\;n}(T),$

с НУ (1.1.6) рассмотрена в [59].

В [60] МДА построено решение следующей задачи:

$$\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x}=\int_0^1\int_0^1\sum_{p=1}^n H_{jp}(t)K_{jp}(\tau,\xi)u_p(\tau,\xi)d\tau d\xi,$$

$j=1,...,n,(t,x)\in Q_1$.

$u_i(0,x)=x, \quad i=1,2,..,n, \quad x\in R.$

1.2. Заключение по Главе 1

Из обзора, произведенного в этой главе, следует, что ранее в работах других авторов рассматривались с помощью МДА некоторые СНДУ в ЧП и СНИ.-ДУ в ЧП. Более общие СНДУ в ЧП и СНИ.-ДУ в ЧП не рассматривались. Другими методами такие более общие системы уравнений тоже не рассматривались.

ГЛАВА 2. МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1. Объект, предмет и задачи исследования

Объект исследования. В настоящей диссертационной работе рассматриваются:

1. СНИ-ДУ В ЧП с одинаковым сомножителем, где сомножитель зависить от нескольких неизвестных функций вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1(t,x),..u_n(t,x))\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}= f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x))+$$
$$+F_i(t,x;u_1(s,\xi),...,u_n(s,\xi):s,\xi),$$
$$(t,x)\in Q_1(T),$$

с НУ

$$u_i(0,x)=\varphi_i(x),\quad x\in R,\quad i=1,2,...,n,$$

где операторы $F_i,\quad i=1,2,...,n$ имеют один из следующих видов:

$$F_i(t;u_1(s,\xi),...,u_n(s,\xi):s,\xi)=\int_0^t\int_0^\infty K_i(t,s,\xi,u_1(s,\xi),...,u_n(s,\xi))d\xi ds,$$

$$F_i(t,x;u_1(s,\xi),...,u_n(s,\xi):s,\xi)= f_i(t,x,u_1,...,u_n,\int_{-\infty}^{\infty}K_i(x,\xi)u_i(t,\xi)d\xi)._n$$

$$F_i(t,x;u_1(s,\xi),...,u_n(s,\xi):s,\xi)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\xi^2-x^{-2})u_i(s,\xi)d\xi ds \text{ и.т.д.}$$

2. СНИ.-ДУ в ЧП с неодинаковымы сомножителями вида:

$$\begin{cases} D[a_1(t,x,u_1,...,u_n)]u_1(t,x)=a_1(t,x,u_1,...,u_n)+F_1(t;u_1) \\ D[a_2(t,x,,u_1,u_2)]u_2(t,x)=F_2(t,x;u_1,u_2) \\ D[a_3(t,x,u_1,u_2,u_3)]u_3(t,x)=F_3(t,x;u_1,u_2,u_3) \\ -------------------------------------- \\ D[a_n(t,x,u_1,...,u_n)]u_n(t,x)=F_n(t,x;u_1,...,u_n) \end{cases}$$

с НУ

$$u_1(0,x)=x,$$
$$u_\kappa(0,x)=\varphi_{\kappa-1}(x),\ \ x\in R,\quad \kappa=2,\ldots,n.$$

3. СНИ.-ДУ в ЧП со многими переменными вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=$$
$$=f_i(t,x_1,..,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_n)+F_i(t,x_1,\ldots,x_n;u_1,u_2,\ldots,u_n:s,\xi_1,\ldots,\zeta_n)$$

$$i=1,2,..,n,\quad (t,x_1,..,x_n)\in Q_n(T).$$

с НУ

$$u_i(0,x_1,..,x_n)=\varphi_i(x_1,..,x_n),\quad i=1,2,..,n,\quad (x_1,..,x_n)\in R^n.$$

4. СНИ.-ДУ в ЧП с n+1 независимыми переменными вида:

$$\begin{cases} D[a_{11}(t,x,u_1,\ldots,u_n),\ldots,a_{1n}(t,x,u_1,\ldots,u_n)]u_1(t,x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}(t,x,u_1,\ldots,u_n)+f(t) \\ D[a_{21}(t,x,,u_1,u_2),a_{22},\ldots,a_{2n}]u_2(t,x)=F_1(t,x;,u_1,u_2) \\ D[a_{31}(t,x,u_1,u_2,u_3),\ldots,a_{3n}(t,x,u_1,u_2,u_3)]u_3(t,x)=F_2(t,x;u_1,u_2,u_3) \\ -------------------------------- \\ D[a_{n1}(t,x,u_1,\ldots,u_n),\ldots,a_{nn}(t,x,u_1,\ldots,u_n)]u_n(t,x)=F_{n-1}(t,x;u_1,\ldots,u_n) \end{cases}$$

$$(t,x)\in Q_n(T),$$

с НУ:

$$u_1(0,x)=\sum_{k=1}^{n}x_k,$$
$$u_\kappa(0,x)=\varphi_\kappa(x),\ \ x\in R,\quad \kappa=2,\ldots,n.$$

Рассматриваются частные случае выше рассмотренных СНИ-ДУ в ЧП и проводится построение единственного решения МДА.

Предмет исследования. Предметом исследования является изучение существования и единственности решения начальной задачи для СНИ.-ДУ в ЧП с одинаковым и неодинаковым сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций и применения МДА для СНИ.-ДУ в ЧП со многими пространственными переменными.

Задачи исследований. В диссертационной работе решаются следующие задачи:

- ✓ Установить достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для СНИ.-ДУ в ЧП с одинаковым сомножителем, где сомножитель зависить от нескольких неизвестных функций;
- ✓ Установить достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для СНИ.-ДУ в ЧП с неодинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций;
- ✓ Построить решения систем двух НИ.-ДУ в ЧП с неодинаковыми и одинаковым сомножителями;
- ✓ Осуществить применения развитого МДА для СНИ.-ДУ в ЧП со многими пространственными переменными.

2.2. Вспомогательные результаты

В диссертационной работе мы используем вспомогательные леммы.

Лемма 2.2.1. A - оператор в банаховом пространстве и

1) $\|A(0)\| \le \gamma, \quad \gamma - const;$

2) $\|Ax - Ay\| \le H\|x - y\|, \quad H < 1$ в шаре $\|\mathrm{x}\| \le \dfrac{\gamma}{1-H}$,

то он имеет в этом шаре одну неподвижную точку.

Лемма 2.2.2. Пусть M_1, M_2, M – метрические пространства, соответственно метрики этих пространств : ρ_1, ρ_2, ρ и функция $f : M_1 \times M_2 \to M$.

Если $f \in Lip(L_1|_x, L_2|_y)$, то она удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом (L_1+L_2) в целом в $M_1 \times M_2$ по метрике

$$\rho^*((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2)\}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\rho(B(x_1,x_2),B(y_1,y_2)) \le \rho(B(x_1,x_2),B(x_1,y_2)) + \rho(B(x_1,y_2),B(y_1,y_2)) \le$$

$$\le L_2\rho(x_2,y_2) + L_1\rho(x_1,y_1)) \le (L_1+L_2)\rho^*(x_1,x_2),(y_1,y_2)).$$

Лемма 2.2.3. Пусть $M_1, M_2, ..., M_k, M$ – метрические пространства, соответственно метрики этих пространств:

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k, \rho$ и функция $f : M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k \to M$.

Если $f \in Lip(L_1\big|_{x_1}, L_2\big|_{x_2}, ..., L_k\big|_{x_k})$, то она удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $(L_1+L_2+...+L_k)$ в целом в $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$ по метрике

$$\rho^*((x_1,x_2,...,x_k),(y_1,y_2,...,y_k)) = \max\{\rho_i(x_i,y_i) | i = 1,2,..,k\}.$$

Лемма 2.2.4 (Гронуолла-Беллмана). Если неотрицательная функция $z(t) \in C[0, T]$ удовлетворяет неравенству

$$z(t) \le a + L\int_0^t z(s)ds, a = const, L = const,$$

то $z(t) \le ae^{Lt}$; в частности, если $a=0$, то $z(t) \equiv 0$.

Лемма 2.2.5. Если функции u зависят от t $(0 \le t \le T)$, и, возможно, других переменных, оператор $F(t,x,\ldots;u)$ отображает непрерывные функции в непрерывные и удовлетворяет условию:

$$|F(t,x,\ldots;u_1) - F(t,x,\ldots;u_2)| \le L|| u_1 - u_2||_{C([0.t]\times W)}, L=const,$$

где W – возможное пространство других переменных,

функция $A(t,x,\ldots)$ и функция $F(t,x,\ldots;0)$ равномерно ограничены в рассматриваемой области:

$$|A(t,x,\ldots)| \le a = const, \ |F(t,x,\ldots;0)| \le f_0 = const,$$

то решение операторно-ИУ

$$u(t,x,...) = J(t,x,...;u) \equiv A(t,x,...) + \int_0^t F(s,x,...;u)ds, 0 \le t \le T \qquad (2.2.1)$$

существует и удовлетворяет неравенству

$|u(t,x,\dots)|\le(a+Tf_0)e^{Lt}$. (2.2.2)

Доказательство. Рассмотрим пространство C_M непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|u(t,x,\dots)|\le(a+Tf_0)e^{Mt}$, где $M>L$, с нормой

$|| u||_M = max\{|u((t,x,\dots)|e^{-Mt}: 0\le t\le T, W\}$.

В нем имеем:

$$|J(t,x,...;u)|\le|A(t,x,...)|+\left|\int_0^t F(s,x,...;u)ds\right|+\left|\int_0^t (F(s,x,...;u)-F(s,x,...;u))ds\right|\le$$

$$\le a+\int_0^t |F(s,x,\dots;u)|\,ds+\int_0^t |(F(s,x,\dots;u)-F(s,x,\dots;0))|\,ds\le$$

$$\le a+\int_0^t f_0 ds+\int_0^t L\max\{|u(\tau,x,\dots)|: 0\le\tau\le s\}ds\le$$

$$\le a+tf_0+\int_0^t L\max\{(a+Tf_0)e^{M\tau}\ |: 0\le\tau\le s\}ds\le$$

$$\le(a+Tf_0)(1+\int_0^t Le^{Ms}ds)\le(a+Tf_0)(1+\frac{L}{M}(e^{Mt}-1))\le$$

$$\le(a+Tf_0)(1+(e^{Mt}-1))=(a+Tf_0)e^{Mt}.$$

Таким образом, оператор J отображает пространство C_M в себя. Далее,

$$|J(t,x,...;u_1)-J(t,x,...;u_2)|=\left|\int_0^t (F(s,x,...;u_1)-F(s,x,...;u_2))ds\right|\le$$

$$\le\int_0^t L\max\{|u_1(\tau,x,...)-u_2(\tau,x,...)|: 0\le\tau\le s\}ds\le$$

$$\le\int_0^t L\max\{||u_1-u_2||_M\ e^{M\tau}: 0\le\tau\le s\}ds\le\int_0^t L\,||u_1-u_2||_M\ e^{Ms}ds=$$

$$= \frac{L}{M} \| u_1 - u_2 \|_M \ (e^{Mt} - 1) \le \frac{L}{M} \| u_1 - u_2 \|_M \ e^{Mt}.$$

Отсюда $\| J(u_1) - J(u_2) \|_M \le \dfrac{L}{M} \| u_1 - u_2 \|_M$ и на основании ПСО получаем, что уравнение (2.3.3) имеет единственное решение в C_M.

Переходя к пределу при $M \to L$, получаем (2.2.2). Лемма доказана.

2.3. Основы метода дополнительного аргумента

При исследовании СНДУ в ЧП первого порядка методом характеристик она сводится к нелинейной СИУ и эта система имеет суперпозицию неизвестных функций. А после нахождения решения от характеристических переменных требуется перейти от характеристических переменных к исходным переменным, чтобы получить решение исходной задачи. Последняя задача во многих случаях настолько сложна, что не может быть решена, но предполагается, что обратные преобразования переменных допустимы. Что бы избавиться от таких трудностей, кыргызские ученые разработали так называемый МДА.

Основы МДА изложены в работе М.И. Иманалиева [21]. Многие исследователи внесли свой вклад в дальнейшее развитие и совершенствование этого метода. Таким исследователям можно добавить Ю.А. Ведь, П.С. Панкова, С. Н. Алексеенко, А.Ж. Аширбаеву и др. Особенность этого метода в том, что он сводит задачу к СИУ, где не присутствует суперпозиция неизвестных функций. А как известно, можно использовать различные методы для получения решения СИУ. Здесь также можно использовать метод аппроксимации.

Мы используем следующую схему МДА, с использованием усовершенствованных обозначений, предложенных А.Ж. Аширбаевой.

Рассматривается начальная задача для ДУ в ЧП первого порядка с переменными *(t,x)*. В качестве помощника к этому аргументу t вводится новая переменная τ. А для неизвестной функции $u(t,x)$ рассматривается вспомогательная функция $v(\tau,t,x)$. В этой функции, когда τ=t, имеет место *v(t,t,x)=u(t,x).*

Вводится еще вспомогательный оператор от функции *v(τ,t,x)*:

$$p(\tau,t,x;v(\rho,t,x):\rho)=x-\int_{\tau}^{t}v(\rho,t,x)d\rho, \quad (\tau,t,x)\in Q_3(T). \qquad (2.3.1)$$

При использовании МДА применяются следующие леммы:

Лемма 2.3.1. Имеет место тождество

$$D[v(t,t,x)]p(\tau,t,x;v)\equiv-\int_{\tau}^{t}D[v(t,t,x)]v(\rho,t,x)d\rho.$$

Доказательство. Для (2.3.1) выполняются следующие преобразования:

$$D[v(t,t,x)]p(\tau,t,x;v)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+v(t,t,x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(x-\int_{\tau}^{t}v(\rho,t,x)d\rho\right)=$$

$$=-v(t,t,x)-\int_{\tau}^{t}\frac{\partial}{\partial t}v(\rho,t,x)d\rho+v(t,t,x)\left(1-\int_{\tau}^{t}\frac{\partial}{\partial x}v(\rho,t,x)d\rho\right)=$$

$$=-\int_{\tau}^{t}\frac{\partial}{\partial t}v(\rho,t,x)d\rho-v(t,t,x)\int_{\tau}^{t}\frac{\partial}{\partial x}v(\rho,t,x)d\rho=$$

$$=-\int_{\tau}^{t}\left(\frac{\partial}{\partial t}v(\rho,t,x)+v(t,t,x)\frac{\partial}{\partial x}v(\rho,t,x)\right)d\rho=-\int_{\tau}^{t}D[v(t,t,x)]v(\rho,t,x)d\rho.$$

Лемма 2.3.2. Если имеет место равенство

$$D[v(t,t,x)]v(\tau,t,x)=0, \qquad (2.3.2)$$

то имеет место также равенство

$$D[v(t,t,x)]p(\tau,t,x;v)=0\,. \qquad (2.3.3)$$

Лемма 2.3.3. Для $p(\tau,t,x;u)$ справедливо тождество

$$p(\tau,t,p(t,\theta,x;u);u)=p(\tau,\theta,x;u), \quad (\tau,t,\theta,x)\in Q_3(T). \qquad (2.3.4)$$

Доказательство. Из (2.3.1) имеем следующее:

$$p(\tau,t,p(t,\theta,x;u);u)=p(t,\theta,x;u)-\int_{\tau}^{t}u(s,p(s,t,p(t,\theta,x;u);u))ds,$$

$$p(\tau,\theta,x;u)=x-\int_{\tau}^{\theta}u(s,p(s,\theta,x;u))ds,$$

Обозначим $q(\tau,t,\theta,x;u)=\left|p(\tau,t,p(t,\theta,x;u);u)-p(\tau,\theta,x;u)\right|$.

Тогда имеем:

$$\left|p(\tau,t,p(t,\theta,x;u);u)-p(\tau,\theta,x;u)\right|\le\left|x-\int_{t}^{\theta}u(s,p(s,\theta,x;u))ds-\right.$$

$$\left.-\int_{\tau}^{t}u(s,p(s,t,p(t,\theta,x;u);u))ds-x+\int_{\tau}^{\theta}u(s,p(s,\theta,x;u))ds\right|\le$$

$$\le\left|-\int_{t}^{\theta}u(s,p(s,\theta,x;u))ds+\right.$$

$$\left.+\int_{\tau}^{\theta}u(s,p(s,\theta,x;u))ds-\int_{\tau}^{t}u(s,p(s,t,p(t,\theta,x;u);u))ds\right|\le$$

$$\le\left|\int_{\tau}^{t}u(s,p(s,t,p(t,\theta,x;u);u))ds-\int_{\tau}^{t}u(s,p(s,\theta,x;u))ds\right|=$$

$$=\left|\int_{\tau}^{t}(u(s,p(s,t,p(t,\theta,x;u);u))-u(s,p(s,\theta,x;u))ds\right|\le$$

$$\le\int_{\tau}^{t}L\left|p(s,t,p(t,\theta,x;u);u)-p(s,\theta,x;v)\right|ds.$$

Переписываем эту оценку в виде

$$q(\tau,t,\theta,x;u)\le\int_{\tau}^{t}Lq(s,t,\theta,x;u)ds. \qquad (2.3.5)$$

Из интегрального неравенства (2.3.5) для неотрицательной функции, в котором переменные t,θ,x играют роль параметров, в силу леммы Гронуолла-Беллмана, вытекает тождество

$$q(\tau,t,\theta,x;u)\equiv 0$$

и справедливость (2.3.4).

Аналогичные утверждения имеют место и для многомерного случая (вектора $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$).

2.4. Краткое содержание диссертации

Переходим к кратком изложению результатов работы.

В третьей главе работы рассмотрено исследование решений СНИ.-ДУ в ЧП с двумя независимыми переменными.

В 3.1. рассматривается начальная задача для СНДУ в ЧП:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + a(t,x,u_1(t,x),..u_n(t,x))\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x} = f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),\dots,u_n(t,x)) \qquad (3.1.1)$$

$(t,x) \in Q_1(T)$,

$$u_i(0,x) = \varphi_i(x), \quad x \in R, \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad (3.1.2)$$

Отличие этой работы от работы Ж.И. Мамбетова в том, что коэффициенты при ЧП первого порядка от неизвестных функций зависят от нескольких неизвестных функций. В работе Ж.М. Мамбетова соответствующие коэффициенты зависят только от одной неизвестной функции.

Доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 3.1.1. Для i=1,2,..,n,

$\varphi_i(x) \in \overline{C}^1(R) \cap Lip(L_i), \quad L_i > 0 - const,$

$f_i(t,x,u_1,u_2,\dots,u_n) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n) \cap Lip(M_0^i\big|_x, M_1^i\big|_{u_1},\dots,M_n^i\big|_{u_n}),\ M_j^i > 0 - const,$

$a(t,x,u_1,..u_n) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n) \cap Lip(N_0\big|_x, N_1\big|_{u_1},\dots,N_n\big|_{u_n}),\ N_i > 0 - const.$

Тогда существует такое $0 < T_* \le T$, что СНДУ в ЧП (3.1.1) с НУ (3.1.2) имеет единственное решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

В 3.2. рассмотрено использование развитую методику для

для СНИ.-ДУ в ЧП:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1(t,x),..u_n(t,x))\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}= f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x))+$$

$$+F_i(t,x;u_1(s,\xi),...,u_n(s,\xi):s,\xi),\quad (t,x)\in Q_1(T), \tag{3.2.1}$$

с НУ (3.1.2).

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть выпоняются все уловия теоремы 3.1.1 и

F1) операторы F_i– непрерывные по первой и второй переменной и $F_i \in Lip(H_0\big|_x)$;

F2) существует такие $H_i>0$, что для любого $T_*\leq T$

$$\| F_i(t,x;u_1^1(s,\xi),...,u_n^1(s,\xi)):s,\xi)-F_i(t,x;u_1^2(s,\xi),...,u_n^2(s,\xi)):s,\xi)\|_{Q_1(T_*)}\leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} H_i \| u_i^1(t,x)-u_i^2(t,x)\|_{Q_1(T_*)} .$$

Тогда существует такое $0<T_*\leq T,$ что СНИ.-ДУ в ЧП (3.2.1) с НУ (3.1.2) имеет единственное решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

Рассмотрен конкретный **ПРИМЕР 3.2.1:**

Рассмотрена СНИ.-ДУ в ЧП вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}+(u_1(t,x)+u_2(t,x))\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}=\int\limits_0^1 u_1(t,s)ds+f_1(t), \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}+(u_1(t,x)+u_2(t,x))\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x}= f_2(t), \end{cases} \tag{3.2.7}$$

$(t,x)\in Q_1^+(T),\quad f_i(t)\in C(R_+,R),\qquad (k=1,2),$

с НУ:

$$u_i(0,x)=\alpha_i+\beta_i x,\quad \alpha_i,\beta_i\in R,\quad x\in R_+,\quad i=1,2. \tag{3.2.8}$$

Задача (3.2.7)-(3.2.8) сведена к СИУ:

$$u_1(t,x))=\alpha_1+\beta_1\left[\frac{x-\alpha_3 t}{1+\beta_3 t}-\frac{1}{1+\beta_3 t}\int\limits_0^t\int\limits_0^s\int\limits_0^1 u_1(\nu,\xi)d\xi d\nu ds-\frac{1}{1+\beta_3 t}\int\limits_0^t\int\limits_0^s f_3(\nu)d\nu ds\right]+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_1(s,\xi)d\xi ds+\int\limits_0^t f_1(s)ds, \tag{3.2.18}$$

$$u_2(t,x)=\alpha_2+\beta_2\left[\frac{x-\alpha_3 t}{1+\beta_3 t}-\frac{1}{1+\beta_3 t}\int_0^t\int_0^s\int_0^1 u_1(\nu,\xi)d\xi d\nu ds-\frac{1}{1+\beta_3 t}\int_0^t\int_0^s f_3(\nu)d\nu ds\right]+$$
$$+\int_0^t f_2(s)ds. \qquad (3.2.19)$$

Для (3.2.18) применяется МПП.

В частности из (3.2.18), (3.2.19) можно получить решение однородной системы с НУ (3.2.1) в виде:

$$u_1(t,x))=\alpha_1+\beta_1\frac{x-\alpha_3 t}{1+\beta_3 t},\ u_2(t,x))=\alpha_2+\beta_2\frac{x-\alpha_3 t}{1+\beta_3 t}.$$

В 3.3. рассматривается СНОУ в ЧП вида:

$$\begin{cases} D[a_1(t,x,u_1,...,u_n)]u_1(t,x)=a_1(t,x,u_1,...,u_n)+F_1(t;u_1) \\ D[a_2(t,x,,u_1,u_2)]u_2(t,x)=F_2(t,x;u_1,u_2) \\ D[a_3(t,x,u_1,u_2,u_3)]u_3(t,x)=F_3(t,x;u_1,u_2,u_3) \\ ------------------------------------ \\ D[a_n(t,x,u_1,...,u_n)]u_n(t,x)=F_n(t,x;u_1,...,u_n) \end{cases} \qquad (3.3.1)$$

Система (3.3.1) рассматривается с НУ

$$\begin{cases} u_1(0,x)=x, \\ u_\kappa(0,x)=\varphi_{\kappa-1}(x), \qquad \kappa=2,...,n \end{cases}. \qquad (3.3.2)$$

Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Пусть

1) $\varphi_k(x)\in\overline{C}^{(1)}(R)\cap Lip(L_k), \quad k=1,...,n-1,$

$a_i(t,x,u_1,...,u_n)\in\overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n)\cap Lip(M_i\big|_x,N_i\big|_{u_i}),\ M_i>0-const,$

$N_i>0-const, i=2,...,n;$

2) оператор F_1– непрерывный по первой переменной и он удовлетворяет условию Липшица: существует такое $K_1>0$, что для любого $T_*\le T$:

$$\| F(t;u_1)-F(t;u_2)\|_{Q_1(T_*)}\le K_1\| u_1(t,x)-u_2(t,x)\|_{Q_1(T_*)},$$

3) операторы $F_i(t,x;u_1,u_2,...,u_i),\quad i=1,...,n$ отображают непрерывные функции в непрерывные и

$$F_i(t,x;u_1,u_2,...,u_i)\in Lip(P_i\big|_x,K_i\big|_{u_i}),\quad P_i,K_i-const,\quad i=2,...,n.$$

Тогда при $0<T_*\le T$ задача (3.3.1)-(3.3.2) имеет решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

В разделе 3.4 . проводится построение решения СНИ-ДУ в ЧП:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}+u_2(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}=u_2(t,x)+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u_1(s,\xi)d\xi ds+f(t)\\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x}=g(t,x,u_1(t,x)).\end{cases}\tag{3.4.1}$$

$$u_1(0,x)=x,\quad u_2(0,x)=\varphi(x),\ x\in R,\qquad (t,x)\in Q_1.\tag{3.4.2}$$

Функции, приведенные в задаче (3.4.1) - (3.4.2), достаточно гладкие, т.е.

$$\varphi(x)\in\overline{C}(R),\quad g(t,x,u_1)\in\overline{C}^{(1)}(Q_1\times R).$$

Построение решения конкретной СНИ-ДУ в ЧП рассмотрено в 3.4:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}=\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t,s,\xi)\dfrac{\partial u_1(s,\xi)}{\partial\xi}d\xi\, ds+f(t)\\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x}=g(t,x,u_1(t,x)).\end{cases}\tag{3.5.1}$$

с НУ (3.4.2).

Получено решение задачи (3.5.1), (3.4.2) в виде:

$$u_1(t,x)=x-[1+t]^{-1}\{xt+\int\limits_0^t\int\limits_0^\eta[\int\limits_0^\rho\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho d\eta\}+$$
$$+\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^\rho\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)\right]d\rho.$$

$$u_2(t,x)=\varphi(p(0,t,x))+\int\limits_0^t g(s,p(s,t,x),u_1(s,p(s,t,x))ds,$$

где функция $p(s,t,x)-$решение следующего ИУ:

$$p(s,t,x)=x-\int\limits_s^t u_1(\nu,p(\nu,t,x))d\nu.$$

В четвертой главе рассмотрено решение СНИ.-ДУ в ЧП многомерном случае.

В 4.1. рассмотрено развитие МДА СДУ в ЧП первого порядка:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=$$

$$=f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)), \qquad (4.1.1)$$

$$i=1,2,..,n, \quad (t,x_1,..,x_n)\in Q_1^n(T),$$

$$u_i(0,x_1,..,x_n)=\varphi_i(x_1,..,x_n), \quad i=1,2,..,n, \quad (x_1,..,x_n)\in R^n, \qquad (4.1.2)$$

ТЕОРЕМА 4.1.1. Пусть функции $\varphi_i(x_1,...,x_n)\in \overline{C}^1(R^n)$,

$a_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n),\ f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\in \overline{C}^{\,0,\underbrace{1,...,1}_{n\,раз},\underbrace{1,...,1}_{n\,раз}}(Q_1^n(T)\times R^n)$,

i=1,2,..,n.

Тогда задача (4.1.1), (4.1.2) имеет единственное, ограниченное решение в $Q_1^n(T_*)$, где T_* ($0\le T_*\le T$) определяется из исходных данных.

Использование развитую методику для следующей СНИ.-ДУ в ЧП с НУ (4.1.2) рассмотрено в 4.2:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=$$

$$=f_i(t,x_1,..,x_n,u_1,u_2,...,u_n)+F_i(t,x_1,...,x_n;u_1,u_2,...,u_n:s,\xi_1,...,\zeta_n), \qquad (4.2.1)$$

$$i=1,2,..,n, \quad (t,x_1,..,x_n)\in Q_2^n(T).$$

ТЕОРЕМА 4.2.1. Пусть выпоняются все уловия теоремы 4.1.1 и

F1) операторы F_i– непрерывные по первым n+1 переменным и $F_i\in Lip(H_0^1\big|_{x_1},H_0^2\big|_{x_2},...,H_0^n\big|_{x_n}),\ H_0^i>0-const,\ i=1,2,...,n;$;

F2) существует такие $H_i>0$, что для любого $T_*\le T$

$$\Big\| F_i(t,x_1,...,x_n;u_1^1(s,\xi),...,u_n^1(s,\xi)):s,\xi_1,...,\zeta_n) -$$
$$- F_i(t,x_1,...,x_n;u_1^2(s,\xi),...,u_n^2(s,\xi)):s,\xi_1,...,\zeta_n)\Big\|_{Q_1^n(T_*)} \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} H_i \,\| u_i^1(t,x_1,...,x_n) - u_i^2(t,x_1,...,x_n)\|_{Q_1^n(T_*)} .$$

Тогда задача (4.2.1), (4.1.2) имеет единственное, ограниченное решение в $Q_1^n(T_*)$, где T_* ($0 \le T_* \le T$) определяется из исходных данных.

В 4.3. рассмотрено решение СНИ.-ДУ с ЧП с неодинаковыми сомножителями и с n+1 независымыми переменными:

$$\begin{cases} D[a_{11}(t,x,u_1,...,u_n),...,a_{1n}(t,x,u_1,...,u_n)]u_1(t,x) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(t,x,u_1,...,u_n) + f(t) \\ D[a_{21}(t,x,,u_1,u_2),a_{22},...,a_{2n}]u_2(t,x) = F_1(t,x;,u_1,u_2) \\ D[a_{31}(t,x,u_1,u_2,u_3),...,a_{3n}(t,x,u_1,u_2,u_3)]u_3(t,x) = F_2(t,x;u_1,u_2,u_3) \\ -------------------------------------- \\ D[a_{n1}(t,x,u_1,...,u_n),...,a_{nn}(t,x,u_1,...,u_n)]u_n(t,x) = F_{n-1}(t,x;u_1,...,u_n) \end{cases} \tag{4.3.1}$$

$x = (x_1, x_2,...,x_n),\ (t,x) \in Q_1^n(T).$

Система (4.3.1) рассматривается с НУ

$$\begin{aligned} &u_1(0,x) = \sum_{k=1}^{n} x_k, \\ &u_\kappa(0,x) = \varphi_\kappa(x),\ x \in R^n, \quad \kappa = 2,...,n. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Для решения данной задачи использована МДА

Рассмотрен следующий **Пример 4.3.1**:

$$\begin{cases} D[a_{11}(t,x,y,u_1,u_2),.a_{12}(t,x,y,u_1,u_2)]u_1(t,x,y) = \sum_{k=1}^{2} a_{1k}(t,x,y,u_1,u_2) + \int_0^1\int_0^1 u(t,\xi,\eta)d\xi d\eta \\ D[a_{21}(t,x,y,u_1,u_2),a_{22}(t,x,y,u_1,u_2)]u_2(t,x,y) = b(t,x,y,u_1,u_2), \end{cases} \tag{4.3.9}$$

где

$(t,x,y) \in \widetilde{Q}_1^2(T) = [0,T] \times R_+^2,$

Систему (4.3.9) рассмотрим с НУ:

$$u_1(0,x,y) = x + y,$$
$$u_2(0,x,y) = \varphi(x,y),\ (x,y) \in R_+^2. \qquad (4.3.10)$$

Заданные функции достаточно гладкие: $\varphi(x,y)) \in C^{(1)}(R_+^2),\ a_{ij}(t,x,y,u_1,u_2) \in \overline{C}^{(1)}\tilde{Q}_1^2(T) \times R^2),$

$b(t,x,y,u_1,u_2) \in \overline{C}^{(1)}(\tilde{Q}_1^2(T) \times R^2),\ i,\ j = 1{,}2.$

В 4.3. построено решения СИ.-ДУ в ЧП с вырожденным ядром вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x,y)}{\partial t} + u_1(t,x,y)\dfrac{\partial u_1(t,x,y)}{\partial x} + u_2(t,\mathrm{x},\mathrm{y})\dfrac{\partial u_1(t,x,y)}{\partial y} = u_1(t,x,y) + \\ + u_2(t,x,y) + \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 H_1(t)K_1(s,\xi,\eta)u_1(s,\xi,\eta)d\xi d\eta ds, \\ \dfrac{\partial u_2(t,x,y)}{\partial t} + u_2(t,x,y)\dfrac{\partial u_2(t,x,y)}{\partial x} + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 u_1(t,\xi,\eta)d\xi d\eta\,\dfrac{\partial u_2(t,x,y)}{\partial y} = \\ = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 H_2(t)K_2(s,\xi,\eta)u_2(s,\xi,\eta)d\xi d\eta ds \end{cases} \qquad (4.4.1)$$

с НУ

$$u_i(0,x,y) = x + y, \quad i = 1{,}2, \quad (t,x,y) \in \tilde{Q}_1^2. \qquad (4.4.2)$$

2.5. Заключение по Главе 2

Определены объект, предмет исследований и поставлены задачи для исследований. Приведены вспомогательные результаты. Дана краткая информация о МДА. Приведены основные леммы, используемые в этом методе. Также представлена краткая информация об основных результатах, полученных в диссертационной работе.

ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

3.1. Применение метода дополнительного аргумента к решению системы, где коэффициенты при частных производных неизвестных функций зависят от нескольких неизвестных функций

Рассматривается начальная задача для СНДУ в ЧП:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1(t,x),..u_n(t,x))\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}= f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x)) \qquad (3.1.1)$$

$(t,x)\in Q_1(T)$,

$$u_i\left(0,x\right)=\varphi_i(x), \quad x\in R, \quad i=1,2,\ldots,n. \qquad (3.1.2)$$

Отличие этой работы от работы Ж.И. Мамбетова в том, что коэффициенты при ЧП первого порядка от неизвестных функций зависят от нескольких неизвестных функций. В работе Ж.М. Мамбетова соответствующие коэффициенты зависят только от одной неизвестной функции.

ТЕОРЕМА 3.1.1. Для i=1,2,..,n,

$\varphi_i(x)\in \overline{C}^{\,1}(R)\cap Lip(L_i), \quad L_i>0-const,$

$f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n)\cap Lip(M_0^i\big|_x, M_1^i\big|_{u_1},...,M_n^i\big|_{u_n}),\ M_j^i>0-const,$

$a(t,x,u_1,..u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n)\cap Lip(N_0\big|_x, N_1\big|_{u_1},...,N_n\big|_{u_n}),\ N_i>0-const.$

Тогда существует такое $0<T_*\le T$, что СНДУ в ЧП (3.1.1) с НУ (3.1.2) имеет единственное решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T))$ пространство таких функций $q(s,\tau,x)$, из $C^{(1)}(Q_2(T))$, что $q(s,\tau,x)-x\in \overline{C}^{(1)}(Q_2(T))$.

1. ДУ в ЧП (3.1.1) с НУ (3.1.2) в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))$ эквивалентно СИУ:

$u_i(t,x)=\varphi_i(q(0,t,x))+$

$$+\int_0^t f_i(\nu,q(\nu,t,x),u_1(\nu,q(\nu,t,x)),u_2(\nu,q(\nu,t,x)),\ldots,u_n(\nu,q(\nu,t,x)))d\nu, \qquad (3.1..3)$$

$$q(s,t,x)=x-\int_s^t a(\nu,q(\nu,t,x),u_1(\nu,q(\nu,t,x),\ldots,u_n(\nu,q(\nu,t,x))d\nu, \qquad (3.1.4)$$

$(s,t,x)\in Q_2(T), \quad i=1,2,\ldots,n,$

в пространстве $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T\ ))\times\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n.$

В самом деле, применяя МДА для СНДУ в ЧП (3.1.1) с НУ (3.1.2), сводим задачу к СИУ (3.1.3),(3.1.4).

Пусть теперь $u_i(t,x),\ q(s,t,x), \quad i=1,2,..,n$ - решение СИУ (3.1.3), (3.1.4).

Тогда $u_i(t,x), \quad i=1,2,..,n,$ удовлетворяют уравнению (3.1.1) и НУ (3.1.2).

В самом деле, из (3.1.3), (3.1.4) имеем:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1,\ldots,u_n)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}=\varphi_i'(q(0,t,x))\left[\frac{\partial q(0,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1,\ldots,u_n)\frac{\partial q(0,t,x)}{\partial x}\right]+$$
$$+\int_0^t\left[f_{i_x}+f_{i_{u_1}}u_{1x}+..+f_{i_{u_n}}u_{nx}\right]\left[\frac{\partial q(\nu,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1,\ldots,u_n)\frac{\partial q(\nu,t,x)}{\partial x}\right]d\nu+ \qquad (3.1.5)$$
$$+f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),\ldots,u_n(t,x)),$$

$$\frac{\partial q(s,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1,\ldots,u_n)\frac{\partial q(s,t,x)}{\partial x}=-\int_s^t\left[a_x+\sum_{i=1}^n a_{u_i}u_{ix}\right]\times \qquad (3.1.6)$$
$$\times\left[\frac{\partial q(\nu,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1,\ldots,u_n)\frac{\partial q(\nu,t,x)}{\partial x}\right]d\nu,$$

Для всякой функции $a(t,x,u_1,..u_n)\in\overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n)$ из ИУ (3.1.6) имеем

$$\frac{\partial q(s,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1,\ldots,u_n)\frac{\partial q(s,t,x)}{\partial x}=0, \quad q(s,s,x)=x, \quad (s,t,x)\in Q_2(T).$$

Следовательно, из равенства (3.1.5) получается уравнение (3.1.1).

2. СИУ (3.1.3), (3.1.4) имеет единственное решение.

Преобразуем ИУ (3.1.3).

В СИУ (3.1.3), (3.1.4) как в [11] заменяем x на $q(t,\tau,x), \quad \tau\ge t$:

$$u_i(t,q(t,\tau,x)) = \varphi_i(q(0,t,q(t,\tau,x))) +$$
$$+\int_0^t f_i(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)),u_1(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)),u_2(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)),\ldots,u_n(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)))d\nu,$$
$$(t,\tau,x)\in Q_2(T), \tag{3.1.7}$$

$$q(s,t,q(t,\tau,x)) = q(t,\tau,x) - \int_s^t a(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)),u_1(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)),\ldots,u_n)d\nu,$$
$$(s,t,\tau,x)\in Q_3(T). \tag{3.1.8}$$

Из (3.1.8), используя (3.1.4), получаем
$$q(s,t,p(t,\tau,x)) - q(s,\tau,x) = -\int_s^t [a(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x),u_1(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)),\ldots,u_n) -$$
$$-a(\nu,q(\nu,\tau,x),u_1(\nu,q(\nu,\tau,x)),\ldots,u_n(\nu,q(\nu,\tau,x)))]\,d\nu,$$
$$(s,t,\tau,x)\in Q_3(T).$$
Отсюда имеем:
$$\left|q(s,t,q(t,\tau,x)) - q(s,\tau,x)\right| \le$$
$$\le \int_s^t \left(N_0 + N_1 + \ldots + N_n)|\alpha(\nu)|\right)|q(\nu,t,q(t,\tau,x)) - q(\nu,\tau,x)|d\nu,$$
$$(s,t,\tau,x)\in Q_3(T), \tag{3.1.9}$$
где $\alpha(t)\in \overline{C}(R_+)$ - известная функция, определяемая по исходным данным.

Из интегрального неравенства (3.1.9) вытекает «тождество транзитивности», см. Лемму 1.1.3:
$$q(s,t,q(t,\tau,x)) = q(s,\tau,x), \quad (s,t,\tau,x)\in Q_3(T). \tag{3.1.10}$$

Тогда из (3.1.7), (3.1.8) имеем:
$$\omega_i(t,\tau,x) = \varphi_i(q(0,\tau,x)) + \int_0^t f_i(\nu,q(\nu,\tau,x),\omega_1(\nu,\tau,x),\omega_2(\nu,\tau,x),\ldots,\omega_n(\nu,\tau,x))d\nu, \tag{3.1.11}$$

$$q(s,\tau,x) = x - \int_s^\tau a(\nu,q(\nu,\tau,x),\omega_1(\nu,\tau,x),\ldots,\omega_n(\nu,\tau,x))d\nu, \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{3.1.12}$$

где обозначено
$$\omega_i(s,\tau,x) = u_i(s,q(s,\tau,x)), \qquad i=1,2,\ldots,n. \tag{3.1.13}$$

В СИУ (3.1.11), (3.1.12) приравнивая t на τ, получаем СИУ (3.1.3), (3.1.4). Учитывая обозначение (3.1.13), имеем $\omega_i(t,t,x)=u_i(t,x)$, i=1,2,…,n.
Итак достаточно доказать существование решение СИУ (3.1.11), (3.1.12).

Следовательно, используя МДА для СДУ в ЧП (3.1.1) с НУ (3.1.2), свели задачу к СИУ (3.1.3), (3.1.4), которая эквивалентна СИУ (3.1.11), (3.1.12).

Запишем эту СИУ (3.1.11),(3.1.12) в виде одного ВУ, аналогично тому, как это делали в [11]:

$$\theta(s,\tau,x)=A(s,\tau,x;\theta), \qquad (3.1.14)$$

в котором $\theta=(\theta_0,\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)$ - вектор-функция переменных (s,τ,x), компоненты вектор –функции: $\theta_0=q(s,\tau,x),\theta_1=\omega_1(s,\tau,x)$, $\theta_2=\omega_2(s,\tau,x)$, …, $\theta_n=\omega_n(s,\tau,x)$, а компоненты оператора $A=(A_0,A_1,A_2,...,A_n)$:

$$A_0(s,\tau,x;\theta)=x-\int_s^\tau a(\nu,\theta_0(\nu,\tau,x),\theta_1(\nu,\tau,x),...,\theta_n(\nu,\tau,x)), \qquad (3.1.15)$$

)

$$A_i(s,\tau,x;\theta)=\varphi_i(\theta_0(0,\tau,x))+$$

$$\int_0^s f_i(\tau,\theta_0(\nu,\tau,x),\theta_1(\nu,\tau,x),\theta_2(\nu,\tau,x),...,\theta_n(\nu,\tau,x))d\nu, \quad i=1,...,n. \qquad (3.1.16)$$

Поскольку пространство $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T_*))\times\left(\overline{C}^{(1)}(Q_2(T_*))\right)^n$ не является линейным, введем в нем метрику

$$\rho(\theta^1,\theta^2)=\max\left\{\sup\left\{\left|\theta_i^1(s,\tau,x)-\theta_i^2(s,\tau,x)\right|:(t,x)\in Q_2(T_*)\right\}:i=0,...,n\right\}. \quad (3.1.17)$$

Обозначим $\theta_x=(x,0,...,0)\in\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T_*))\times\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$,

$$M=\max\{\|a\|_n T,\max\{\|\varphi_i\|_n+\|f_i\|_n T:i=1,..,n\}\}.$$

Имеем:

$$\rho(A(\theta),\theta_x)\le\max\{\|a\|_n T,\max\{\|\varphi_i\|_n+\|f_i\|_n T:i=1,..,n\}\}=M.$$

Покажем, что система уравнений (3.1.14)-(3.1.15)-(3.1.16) имеет в шаре $S(\theta_x,M)$ пространства $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T_*))\times\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$ решение при некотором $T_*\le T$.

Справедливы следующие оценки

$$\left|A_0(\theta^1)-A_0(\theta^2)\right|\le(N_0+N_1+\ldots+N_n)T_*\left\|\theta^1-\theta^2\right\|_n,$$

$$\left|A(\theta^1)-A_i(\theta^2)\right|\le\Omega_i(T_*)\left\|\theta^1-\theta^2\right\|_n,$$

где

$$\Omega_i(T)=(L_i+\sum_{k=0}^{n} M_k^i)T.$$

Отсюда следует, что оператор А при

$$T_*=\min\{T,1/(N_0+N_1+\ldots+N_n);1/(L_i+\sum_{k=0}^{n}M_k^i):i=1,2,\ldots,n\},$$

осуществляет СО шара $S(\theta_x,M)$ на себя.

Следовательно, по ПСО уравнение (3.1.13) имеет одно и только одно решение. Таким образом, задача (3.1.1)-(3.1.2) также имеет единственное решение. Теорема 3.1.1. доказана.

3.2. Использование развитой методики для решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

Рассматривается начальная задача для СНИ.-ДУ в ЧП:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1(t,x),..u_n(t,x))\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}=f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),\ldots,u_n(t,x))+$$

$$+F_i(t,x;u_1(s,\xi),\ldots,u_n(s,\xi):s,\xi),\quad (t,x)\in Q_1(T),\qquad (3.2.1)$$

с НУ (3.1.2).

Операторы в (3.2.1), где $i=1,2,\ldots,n$ имеют один из следующих видов:

$$F_i(t;u_1(s,\xi),\ldots,u_n(s,\xi):s,\xi)=\int_0^t\int_0^\infty K_i(t,s,\xi,u_1(s,\xi),\ldots,u_n(s,\xi))d\xi ds,$$

$$F_i(t,x;u_1(s,\xi),\ldots,u_n(s,\xi):s,\xi)=f_i(t,x,\int_{-\infty}^{\infty}K_i(x,\xi)u_i(t,\xi)d\xi)._n$$

$$F_i(t,x;u_1(s,\xi),...,u_n(s,\xi):s,\xi)=\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\xi^2-x^{-2})u_i(s,\xi)d\xi ds \text{ и.т.д.}$$

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть выпоняются все уловия теоремы 3.1.1 и

F1) операторы F_i– непрерывные по первой и второй переменной и $F_i\in Lip(H_0|_x)$;

F2) существует такие $H_i>0$, что для любого $T_*\le T$

$$\| F_i(t,x;u_1^1(s,\xi),...,u_n^1(s,\xi)):s,\xi)-F_i(t,x;u_1^2(s,\xi),...,u_n^2(s,\xi)):s,\xi)\|_{Q_1(T_*)}\le$$
$$\le\sum_{i=1}^n H_i\| u_i^1(t,x)-u_i^2(t,x)\|_{Q_1(T_*)}.$$

Тогда существует такое $0<T_*\le T,$ что СНИ.-ДУ в ЧП (3.2.1) с НУ (3.1.2) имеет единственное решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. СНИ.-ДУ в ЧП (3.2.1) с НУ (3.1.2) в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))$ эквивалентна СИУ (3.1.4) и

$$u_i(t,x)=\varphi_i(q(0,t,x))+\int\limits_0^t F_i(\nu,q(\nu,t,x),u_1(s,\xi),u_2(s,\xi),...,u_n(s,\xi):s,\xi)d\nu+$$
$$+\int\limits_0^t f_i(\nu,q(\nu,t,x),u_1(\nu,q(\nu,t,x)),u_2(\nu,q(\nu,t,x)),...,u_n(\nu,q(\nu,t,x)))d\nu \qquad (3.2..2)$$

$(s,t,x)\in Q_2(T),\quad i=1,2,...,n,$

в пространстве $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T\ ))\times\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

В самом деле, из (3.2.2), (3.1.4) имеем (3.1.6) и следующее равенство:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1,...,u_n)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}=\varphi_i'(q(0,t,x))\left[\frac{\partial q(0,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1,...,u_n)\frac{\partial q(0,t,x)}{\partial x}\right]+$$
$$+\int\limits_0^t\left[f_{i_x}+f_{i_{u_1}}u_{1x}+..+f_{i_{u_n}}u_{nx}\right]\left[\frac{\partial q(\nu,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1,...,u_n)\frac{\partial q(\nu,t,x)}{\partial x}\right]d\nu+$$
$$+\int\limits_0^t F_{i_x}\left[\frac{\partial q(\nu,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1,...,u_n)\frac{\partial q(\nu,t,x)}{\partial x}\right]d\nu \qquad (3.2.3)$$
$$+f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x))+F_i(t,x;u_1(s,\xi),...,u_n(s,\xi):s,\xi).$$

СИУ (3.1.11), (3.1.12) для поставленной задачи (3.2.1), (3.1.2), принимает следующий вид (3.1.11) и:

$$\omega_i(t,\tau,x) = \varphi_i(q(0,\tau,x)) + \int_0^t f_i(\nu, q(\nu,\tau,x), \omega_1(\nu,\tau,x), \omega_2(\nu,\tau,x), \ldots, \omega_n(\nu,\tau,x))d\nu +$$

$$+\int_0^t F_i(\nu, q(\nu,\tau,x); \omega_1(s,s,\xi), \omega_2(s,s,\xi), \ldots, \omega_n(s,s,\xi) : s,\xi)d\nu \tag{3.2.4}$$

Здесь примется обозначение (3.1.13).

Записываем СИУ (3.2.4), (3.1.12) в виде ВУ:

$$\theta(s,\tau,x) = \tilde{A}(s,\tau,x;\theta), \tag{3.2.5}$$

где $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ - вектор-функция переменных (s,τ,x) ,где

$\theta_0 = q(s,\tau,x), \theta_1 = \omega_1(s,\tau,x)$, $\theta_2 = \omega_2(s,\tau,x)$, …, $\theta_n = \omega_n(s,\tau,x)$.

Имеем (3.1.15) и следующие операторы:

$$\tilde{A}_i(s,\tau,x;\theta) = \varphi_i(\theta_0(0,\tau,x)) + \int_0^t F_i(\nu, \theta_0(\nu,\tau,x); \theta_1(s,s,\xi), \theta_2(s,s,\xi), \ldots, \theta_n(s,s,\xi) : s,\xi)d\nu +$$

$$+\int_0^s f_i(\tau, \theta_0(\nu,\tau,x), \theta_1(\nu,\tau,x), \theta_2(\nu,\tau,x), \ldots, \theta_n(\nu,\tau,x))d\nu, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{3.2.6}$$

Используя метрику (3.1.17) и обозначения из раздела 3.1. получаем следующие оценки:

$$\left|A_0(\theta^1) - A_0(\theta^2)\right| \le (N_0 + N_1 + \ldots + N_n)T_* \left\|\theta^1 - \theta^2\right\|_n,$$

$$\left|\tilde{A}(\theta^1) - \tilde{A}_i(\theta^2)\right| \le \tilde{\Omega}_i(T_*) \left\|\theta^1 - \theta^2\right\|_n,$$

где

$$\tilde{\Omega}_i(T) = (L_i + \sum_{k=0}^{n} (M_k^i + H_i)T.$$

Следовательно, по ПСО уравнение (3.2.5) имеет одно и только одно решение при

$$T_* = \min\{T, 1/(N_0 + N_1 + \ldots + N_n); 1/(L_i + \sum_{k=0}^{n}(M_k^i + H_i) : i = 1,2,\ldots,n\}.$$

ПРИМЕР 3.2.1. Рассмотрим СНИ.-ДУ в ЧП вида:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + (u_1(t,x) + u_2(t,x))\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = \int\limits_0^1 u_1(t,s)ds + f_1(t), \\
\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + (u_1(t,x) + u_2(t,x))\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = f_2(t),
\end{cases}
\tag{3.2.7}
$$

$(t,x) \in Q_1^+(T), \quad f_i(t) \in C(R_+, R), \qquad (k = 1{,}2),$

с НУ:

$$
u_i(0,x) = \alpha_i + \beta_i x, \quad \alpha_i, \beta_i \in R, \quad x \in R_+, \quad i = 1{,}2 \tag{3.2.8}
$$

Задача (3.2.7)-(3.2.8) с помощью МДА сводится к СИУ:

$$
\begin{cases}
u_1(t,x) = \alpha_1 + \beta_1 q(0,t,x)) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_1(s,\xi) d\xi ds + \int\limits_0^t f_1(s)ds, \\
u_2(t,x) = \alpha_2 + \beta_2 q(0,t,x)) + \int\limits_0^t f_2(s)ds,
\end{cases}
\tag{3.2.9}
$$

$$
q(s,t,x) = x - \int\limits_s^t \left(u_1(\nu, p(\nu,t,x) + u_1(\nu, p(\nu,t,x)\right) d\nu, \tag{3.2.10}
$$

$(s,t,x) \in Q_2^+(T).$

В СИУ (3.2.9) как в 3.1 заменяя x на $q(t,\tau,x), \quad \tau \geq t$ и используя (3.1.10), имеем:

$$
\begin{cases}
u_1(t,q(t,\tau,x)) = \alpha_1 + \beta_1 q(0,\tau,x)) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_1(s,\xi) d\xi ds + \int\limits_0^t f_1(s)ds, \\
u_2(t,q(t,\tau,x)) = \alpha_2 + \beta_2 q(0,\tau,x)) + \int\limits_0^t f_2(s)ds.
\end{cases}
\tag{3.2.11}
$$

Из (3.2.11) суммируя уравнения системы, получаем:

$$
u_1(t,q(t,\tau,x)) + u_2(t,q(t,\tau,x)) = \alpha_3 + \beta_3 q(0,\tau,x)) +
$$

$$
+ \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_1(s,\xi) d\xi ds + \int\limits_0^t f_3(s)ds, \tag{3.2.12}
$$

$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_3 = \beta_1 + \beta_2, \quad f_3(t) = f_1(t) + f_2(t),$

$(t,\tau,x) \in Q_2^+(T).$

Интегрируя (3.2.12) по t от 0 до τ, имеем:

$$
\int\limits_0^\tau (u_1(s,q(s,\tau,x)) + u_2(s,q(s,\tau,x)) ds = (\alpha_3 + \beta_3 q(0,\tau,x))\tau +
$$

$$+\int_0^\tau\int_0^s\int_0^1 u_1(\nu,\xi)d\xi d\nu ds+\int_0^\tau\int_0^s f_3(\nu)d\nu ds. \qquad (3.2.13)$$

Подставляя (3.2.10) в (3.2.13), находим:

$$\int_0^\tau (u_1(s,q(s,\tau,x))+u_2(s,q(s,\tau,x))ds=\frac{(\alpha_3+\beta_3 x)\tau}{1+\beta_3\tau}+$$
$$+\frac{1}{1+\beta_3\tau}\int_0^\tau\int_0^s\int_0^1 u_1(\nu,\xi)d\xi d\nu ds+\frac{1}{1+\beta_3\tau}\int_0^\tau\int_0^s f_3(\nu)d\nu ds. \qquad (3.2.14)$$

Из (3.2.14), (3.2.10) имеем:

$$q(0,\tau,x)=x-\int_0^\tau \left(u_1(\nu,p(\nu,\tau,x)+u_1(\nu,p(\nu,\tau,x))\right)d\nu=$$
$$=\frac{x-\alpha_3\tau}{1+\beta_3\tau}-\frac{1}{1+\beta_3\tau}\int_0^\tau\int_0^s\int_0^1 u_1(\nu,\xi)d\xi d\nu ds-\frac{1}{1+\beta_3\tau}\int_0^\tau\int_0^s f_3(\nu)d\nu ds. \qquad (3.2.15)$$

Теперь подставляем (3.2.15) в СИУ (3.2.11).

$$u_1(t,q(t,\tau,x))=\alpha_1+\beta_1\left[\frac{x-\alpha_3\tau}{1+\beta_3\tau}-\frac{1}{1+\beta_3\tau}\int_0^\tau\int_0^s\int_0^1 u_1(\nu,\xi)d\xi d\nu ds-\frac{1}{1+\beta_3\tau}\int_0^\tau\int_0^s f_3(\nu)d\nu ds\right]+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 u_1(s,\xi)d\xi ds+\int_0^t f_1(s)ds, \qquad (3.2.16)$$

$$u_2(t,q(t,\tau,x))=\alpha_2+\beta_2\left[\frac{x-\alpha_3\tau}{1+\beta_3\tau}-\frac{1}{1+\beta_3\tau}\int_0^\tau\int_0^s\int_0^1 u_1(\nu,\xi)d\xi d\nu ds-\frac{1}{1+\beta_3\tau}\int_0^\tau\int_0^s f_3(\nu)d\nu ds\right]+$$
$$+\int_0^t f_2(s)ds. \qquad (3.2.17)$$

В (3.2.17) приравнивая τ=t, получаем следуюшую СИУ:

$$u_1(t,x))=\alpha_1+\beta_1\left[\frac{x-\alpha_3 t}{1+\beta_3 t}-\frac{1}{1+\beta_3 t}\int_0^t\int_0^s\int_0^1 u_1(\nu,\xi)d\xi d\nu ds-\frac{1}{1+\beta_3 t}\int_0^t\int_0^s f_3(\nu)d\nu ds\right]+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 u_1(s,\xi)d\xi ds+\int_0^t f_1(s)ds, \qquad (3.2.18)$$

$$u_2(t,x)=\alpha_2+\beta_2\left[\frac{x-\alpha_3 t}{1+\beta_3 t}-\frac{1}{1+\beta_3 t}\int_0^t\int_0^s\int_0^1 u_1(\nu,\xi)d\xi d\nu ds-\frac{1}{1+\beta_3 t}\int_0^t\int_0^s f_3(\nu)d\nu ds\right]+$$
$$+\int_0^t f_2(s)ds. \qquad (3.2.19)$$

Далее для (3.2.18) применяя МПП, находим $u_1(t,x)$, затем подставляя ее в (3.2.19) найдем $u_2(t,x)$.

В частности из (3.2.18), (3.2.19) можно получить решение однородной системы с НУ (3.2.1) в виде:

$$u_1(t,x)) = \alpha_1 + \beta_1 \frac{x - \alpha_3 t}{1 + \beta_3 t}, \; u_2(t,x)) = \alpha_2 + \beta_2 \frac{x - \alpha_3 t}{1 + \beta_3 t}.$$

3.3. Решение систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с неодинаковыми сомножителями

В данной работе рассматривается СНОУ в ЧП вида:

$$\begin{cases} D[a_1(t,x,u_1,...,u_n)]u_1(t,x) = a_1(t,x,u_1,...,u_n) + F_1(t;u_1) \\ D[a_2(t,x,,u_1,u_2)]u_2(t,x) = F_2(t,x;u_1,u_2) \\ D[a_3(t,x,u_1,u_2,u_3)]u_3(t,x) = F_3(t,x;u_1,u_2,u_3) \\ -- \\ D[a_n(t,x,u_1,...,u_n)]u_n(t,x) = F_n(t,x;u_1,...,u_n) \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Система (3.3.1) рассматривается с НУ

$$\begin{cases} u_1(0,x) = x, \\ u_\kappa(0,x) = \varphi_{\kappa-1}(x), \quad \kappa = 2,...,n \end{cases}. \tag{3.3.2}$$

Для решения данной задачи используем МДА. (Рассмотрененная задача (3.3.1)-(3.3.2) путем введения дополнительной переменной сводится к СИУ, удобной для исследования).

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Пусть

1) $\varphi_k(x) \in \overline{C}^{(1)}(R) \cap Lip(L_k), \quad k = 1,...,n-1,$

$a_i(t,x,u_1,...,u_n) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T) \times R^n) \cap Lip(M_i\big|_x, N_i\big|_{u_i}),\ M_i > 0 - const,$

$N_i > 0 - const, i=2,...,n;$

2) оператор F_1– непрерывный по первой переменной и он удовлетворяет условию Липшица: существует такое $K_1>0$, что для любого

$T_* \leq T$:

$$\| F(t;u_1) - F(t;u_2) \|_{Q_1(T_*)} \leq K_1 \| u_1(t,x) - u_2(t,x) \|_{Q_1(T_*)},$$

3) операторы $F_i(t,x;u_1,u_2,...,u_i), \quad i=1,...,n$ отображают непрерывные функции в непрерывные и

$$F_i(t,x;u_1,u_2,...,u_i) \in Lip(P_i\big|_x, K_i\big|_{u_i}), \quad P_i, K_i - const, \quad i=2,...,n.$$

Тогда при $0 < T_* \leq T$ задача (3.3.1)-(3.3.2) имеет решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для доказательства теоремы 3.3.1. воспользуемся МДА.

Используем обозначения и метрику (3.1.17) из раздела 3.1.

Рассмотрим сначала первое уравнение системы (3.3.1). Это уравнение с условием (3.3.2) с использованием МДА сводиться к следующему ИУ:

$$u_1(t,x) = x + \int_0^t F_1(s;u_1)ds \tag{3.3.3}$$

В самом деле, из (3.3.3) получаем:

$$D[a_1(t,x,u_1,...,u_n)]u_1(t,x) = \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + a_1(t,x,u_1,...,u_n)\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} =$$
$$= a_1(t,x,u_1,...,u_n) + F_1(t;u_1).$$

ЛЕММА 3.3.1. Существует такое $T_1^* > 0$, что ИУ (3.3.3) имеет единственное решение в $\overline{C}(Q_1(T_1^*))$.

Доказательство леммы 3.3.1

Имеем при $t \leq T_1^* \leq T$:

$$|u_1(t,x)| = \left| x + \int_0^t F_1(s;u_1)ds \right| \leq |x| + \left| \int_0^t F_1(s;u_1)ds \right| \leq \|x\| + \| F(t;0) \| t \leq \Omega_0(T_1^*),$$

где $\Omega_0(S) \equiv \|x\| + \| F(t;0) \| S.$

Далее, при $0 \leq t \leq T_1^* \leq T$:

$$|u_1^1(t,x) - u_1^2(t,x)| \leq \left| x + \int_0^t F_1(s;u_1^1)ds - x - \int_0^t F_1(s;u_1^2)ds \right| \leq$$

$$\leq \int_0^t K_1 \| u_1^2 - u_1^2 |_{Q_1(t)} ds \leq K_1 T \| u_1^2 - u_1^2 |_{Q_1(t)}$$

Мы должны выбрать число Т так, чтобы уравнение (3.3.3) имело решение в пространстве функций $\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_1^*))$. По ПСО выберем Т следующим образом: *T_1*= 1/K_1.*

Лемма 3.3.1. доказана.

Теперь подставляя найденную функцию $u_1(t,x)=\tilde{u}_1(t,x)$ во второе уравнение системы (3.3.1) получаем следующую задачу относительно неизвестной функции $u_2(t,x)$:

$$D[\tilde{a}_2(t,x,u_2)]u_2(t,x)=\tilde{F}_2(t,x;u_2) \qquad (3.3.4_1)$$

с НУ (3.3.2),

где

$$\tilde{F}_2(t,x;u_2)=F_2(t,x;\tilde{u}_1,u_2), \quad \tilde{a}_2(t,x,u_2)=a_2(t,x,\tilde{u}_1,u_2).$$

ЛЕММА 3.3.2$_1$. В пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_2^*))$ задача (3.3.4$_1$)-(3.3.2) эквивалентна СИУ:

$$u_2(t,x)=\varphi_1(p_1(0,t,x))+\int_0^t \tilde{F}_2(\nu,p_1(\nu,t,x);u_2(\nu,p_1(\nu,t,x))d\nu, \qquad (3.3.5_1)$$

$$p_1(s,t,x)=x-\int_s^t \tilde{a}_2(\nu,p_1(\nu,t,x),u_2(\nu,p_1))d\nu, \qquad (3.3.6_1)$$

$(s,t,x)\in Q_2(T)$.

Доказательство леммы 3.3.2$_1$. Для решения новой задачи (3.3.4$_1$)-(3.3.2) воспользуемся МДА. Подробную информацию об особенностях этого метода и сведении ОУ к СИУ можно найти в работах [47-49].

Сводим задачу (3.3.4$_1$)-(3.3.2) к СИУ (3.3.5$_1$)-(3.3.6$_1$), используя результаты работ [48-49].

Рассмотрим теперь, удовлетворяет ли решение СИУ (3.3.5$_1$)-(3.3.6$_1$) поставленной задаче. Для этого мы найдем необходимые ЧП, поставляем их в уравнение (3.3.4$_1$) и проверяем выполнение НУ (3.3.2).

Из уравнения (3.3.5$_1$) имеем:

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}+\tilde{a}_2(t,x,u_2)\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x}=\varphi_1'(p_1(0,t,x))\left[\frac{\partial p_1(0,t,x)}{\partial t}+\tilde{a}_2(t,x,u_2)\frac{\partial p_1(0,t,x)}{\partial x}\right]+$$
$$+\int_0^t\left[\tilde{F}_{2x}+\tilde{F}_{2u_2}u_{2x}\right]\left[\frac{\partial p_1(\nu,t,x)}{\partial t}+\tilde{a}_2(t,x,u_2)\frac{\partial p_1(\nu,t,x)}{\partial x}\right]d\nu+$$
$$+\tilde{F}_2(t,x;u_2(t,x)).$$

Мы получаем следующее уравнение из уравнения ($3.3.6_1$):

$$\frac{\partial p_1(s,t,x)}{\partial t}+\tilde{a}_2(t,x,u_2)\frac{\partial p_1(s,t,x)}{\partial x}=0$$

Если мы применим его к приведенному выше уравнению, мы получим, что решение системы ($3.3.5_1$)-($3.3.6_1$) удовлетворяет задаче ($3.3.4_1$)-(3.3.2).

Лемма $3.3.2_1$ доказана.

ЛЕММА $3.3.2_2$. СИУ ($3.3.5_1$)-($3.3.6_1$) имеет единственное решение.

Доказательство леммы $3.3.2_2$. Чтобы доказать единственность решения СИУ, мы преобразуем ИУ ($3.3.5_1$). Другими словами, мы заменяем следующие переменные: t на s, x на $p_1(s,t,x)$. Затем мы используем равенство (2.3.4) и равенство, которое было доказано в работе А.Ж. Аширбаевой [11]:

$$p_1(s,\theta,p_1(\theta,t,x))=p_1(s,t,x),\quad (s,\theta,t,x)\in Q_3(T). \qquad (3.3.7_1)$$

После преобразования ИУ ($3.3.5_1$), используя ($3.3.7_1$), из ($3.3.5_1$)-($3.3.6_1$) получаем следующую СИУ:

$$\omega_1(s,t,x)=\varphi_1(p_1(0,t,x))+\int_0^s\tilde{F}_2(\tau,p_1(\tau,t,x);\omega_1(\tau,t,x))d\tau, \qquad (3.3.8_1)$$

$$p_1(s,t,x)=x-\int_s^t\tilde{a}_2(\nu,p_1(\nu,t,x),\omega_1(\nu,t,x))d\nu, \qquad (3.3.9_1),$$

$$(s,t,x)\in Q_2(T).$$

где обозначено

$$\omega_1(s,t,x)=u_2(s,p_1(s,t,x)). \qquad (3.3.10_1)$$

Рассмотрим взаимосвязь между системами ($3.3.5_1$),($3.3.6_1$) и ($3.3.8_1$), ($3.3.9_1$). Сначала мы получили систему ($3.3.8_1$), ($3.3.9_1$) из системы ($3.3.5_1$), ($3.3.6_1$), заменяя переменные и введя обозначение ($3.3.10_1$).

Следовательно, СИУ ($3.3.8_1$), ($3.3.9_1$) при $t=\tau$ совпадает с СИУ ($3.3.5_1$),($3.3.6_1$). Согласно ($3.3.10_1$) имеем $\omega_1(t,t,x)=u_2(t,x)$.

Мы видим, что решения СИУ ($3.3.8_1$), ($3.3.9_1$) достаточно для решения СИУ ($3.3.5_1$), ($3.3.6_1$), эквивалентной исходной задаче ($3.3.5_1$)-($3.3.6_1$). Решение начальной задачи таким способом - особенность МДА.

Для определения существования и единственности решения СИУ ($3.3.8_1$), ($3.3.9_1$) запишем систему в виде ВУ:

$$\theta_1(s,t,x)=A_1(s,t,x;\theta_1), \qquad (3.3.11_1)$$

где $\theta_1=(\theta_1^1,\theta_1^2)$ - функция переменных (s,t,x) и $\theta_1^1=p_1(s,t,x)$, $\theta_1^2=\omega_1(s,t,x)$.

Следовательно, оператор $A_1=(A_1^1,A_1^2)$ и:

$$A_1^1(s,t,x;\theta_1)=x-\int_s^t \tilde{a}_2(\nu,\theta_1^1(\nu,t,x),\theta_1^2(\nu,t,x))d\nu,$$

$$A_1^2(s,t,x;\theta_1)=\varphi_1(\theta_1^1(0,t,x))+\int_0^s \tilde{F}_2(\tau,\theta_1^1(\tau,t,x);\theta_1^2(\tau,t,x))d\tau,$$

$(s,t,x)\in Q_2(T)$.

Используя условия теоремы 3.3.1 для заданных функций, получим следующую оценку:

$$\rho(A_1(\theta_1),\theta_{1x})\le \max\{\|\tilde{a}_2\|_n T,\max\{\|\varphi_1\|_n+\|\tilde{F}_2\|_n T\}=H_1.$$

Используем ПСО. Докажем, что оператор А осуществляет СО шара $S(\theta_{1x},H_1)$ на себя. Тем самым докажем, что задача ($3.3.8_1$)-($3.3.9_1$)-($3.3.14_1$) имеет в шаре $S(\theta_{1x},H_1)$ пространства $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T_2^*))\times\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_2^*))$ решение при некотором $T_2^*\le T$.

Получаем оценки:

$$\left|A_1^1(\theta_1^*)-A_1^1(\theta_1^{**})\right|\le (M_1+N_2)T_2^*\left\|\theta_1^*-\theta_1^{**}\right\|_n,$$

$$\left|A_1^2(\theta_1^*)-A_1^2(\theta_1^{**})\right|\le \Omega_1(T_2^*)\left\|\theta_1^*-\theta_1^{**}\right\|_n,$$

где

$$\Omega_1(T)=(L_1+P_2+K_2)T.$$

Согласно приведенным выше оценкам, мы выбрали T_2^* для существования и единственности решения уравнения ($3.3.11_1$) по ПСО:

$T_2^* = \min\{T, 1/(N_0 + N_1); 1/(L_1 + P_2 + K_2)\}$.

Следовательно, задача ($3.3.4_1$)-(3.3.2) также имеет единственное решение.

Мы решили первое и второе уравнения системы (3.3.1). Подставим найденные функции в третье уравнение данной системы и будем решать третье уравнение системы (3.3.1) по известным функциям:

Следовательно, мы получаем следующую задачу:

$$D[\tilde{a}_3(t,x,u_3)]u_3(t,x) = \tilde{F}_3(t,x;u_3) \qquad (3.3.4_2)$$

с условием (3.3.2),

где

$$\tilde{F}_3(t,x;u_3) = F_3(t,x;\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,u_3),$$
$$\tilde{a}_3(t,x,u_3) = a_3(t,x,\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,u_3).$$

ЛЕММА 3.3.3₁. В пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))$ задача ($3.3.4_2$)-(3.3.2) эквивалентна СИУ:

$$u_3(t,x) = \varphi_2(p_2(0,t,x)) + \int_0^t \tilde{F}_3(\nu, p_2(\nu,t,x); u_3(\nu, p_2(\nu,t,x))d\nu, \qquad (3.3.5_2)$$

$$p_2(s,t,x) = x - \int_s^t \tilde{a}_3(\nu, p_2(\nu,t,x), u_3(\nu, p_2))d\nu, \qquad (3.3.6_2)$$

$(s,t,x) \in Q_2(T)$.

Доказательство леммы 3.3.3₁.

Как и в лемме $3.3.2_1$, мы используем МДА. Сведем задачу ($3.3.4_2$)-(3.3.2) к решению СИУ ($3.3.5_2$)-($3.3.6_2$).

Рассмотрим теперь, удовлетворяет ли решение СИУ ($3.3.5_2$)-($3.3.6_2$) уравнению ($3.3.4_2$) и НУ (3.3.2). Для этого найдем необходимые ЧП из ($3.3.5_2$)-($3.3.6_2$) и поставляем их в уравнение ($3.3.4_2$):

$$\frac{\partial u_3(t,x)}{\partial t}+\tilde{a}_3(t,x,u_3)\frac{\partial u_3(t,x)}{\partial x}=\varphi_2'(p_2(0,t,x))\left[\frac{\partial p_2(0,t,x)}{\partial t}+\tilde{a}_3(t,x,u_3)\frac{\partial p_2(0,t,x)}{\partial x}\right]+$$

$$+\int_0^t\left[\tilde{F}_{3_x}+\tilde{F}_{3_{u_3}}u_{3x}\right]\left[\frac{\partial p_2(\nu,t,x)}{\partial t}+\tilde{a}_3(t,x,u_3)\frac{\partial p_2(\nu,t,x)}{\partial x}\right]d\nu+$$

$$+\tilde{F}_3(t,x;u_3(t,x)).$$

Из ($3.3.6_2$) следует соотношение

$$\frac{\partial p_2(s,t,x)}{\partial t}+\tilde{a}_3(t,x,u_2)\frac{\partial p_2(s,t,x)}{\partial x}=0.$$

Отсюда видим, что решение системы уравнений ($3.3.5_2$)-($3.3.6_2$) удовлетворяет уравнению ($3.3.4_2$) и НУ (3.3.2).

ЛЕММА $3.3.3_2$. СИУ ($3.3.5_2$)-($3.3.6_2$) имеет единственное решение.

Доказательство леммы $3.3.3_2$. Как и в лемме $3.3.2_2$, заменяем переменные в системе ($3.3.5_2$)-($3.3.6_2$): t на s, x на $p_1(s,t,x)$. Используем равенство, которое можно назвать «тождеством транзитивности МДА»:

$$p_2(s,\theta,p_2(\theta,t,x))=p_2(s,t,x),\quad (s,\theta,t,x)\in Q_3(T)\ . \qquad (3.3.7_2)$$

После замены переменных и использования равенство ($2.3.7_2$) получаем следующее:

$$\omega_2(s,t,x)=\varphi_2(p_2(0,t,x))+\int_0^s\tilde{F}_3(\tau,p_2(\tau,t,x);\omega_2(\tau,t,x))d\tau, \qquad (3.3.8_2)$$

$$p_2(s,t,x)=x-\int_s^t\tilde{a}_3(\nu,p_2(\nu,t,x),\omega_2(\nu,t,x))d\nu, \qquad (3.3.9_2),$$

$(s,t,x)\in Q_2(T),$

где

$$\omega_2(s,t,x)=u_3(s,p_2(s,t,x)). \qquad (3.3.10_2)$$

Из ($3.3.8_2$), ($3.3.9_2$), ($3.3.10_2$) имеем $\omega_2(t,t,x)=u_3(t,x)$.

Далее исследуем существование решение СИУ ($3.3.8_2$), ($3.3.9_2$).

ВУ СИУ ($3.3.8_2$), ($3.3.9_2$) записывается в виде:

$$\theta_2(s,t,x)=A_2(s,t,x;\theta_2), \qquad (3.3.11_2)$$

где $\theta_2 = (\theta_2^1, \theta_2^2)$, $\theta_2^1 = p_2(s,t,x)$, $\theta_2^2 = \omega_3(s,t,x)$, $A_2 = (A_2^1, A_2^2)$,

$$A_2^1(s,t,x;\theta_2) = x - \int_s^t \tilde{a}_3(\nu, \theta_2^1(\nu,t,x), \theta_2^2(\nu,t,x))d\nu,$$

$(s,t,x) \in Q_2(T)$.

$$A_2^2(s,t,x;\theta_2) = \varphi_2(\theta_2^1(0,t,x)) + \int_0^s \tilde{F}_3(\tau, \theta_2^1(\tau,t,x); \theta_2^2(\tau,t,x))d\tau,$$

Используя (3.3.3), (3.3.4) для заданных функций, обозначим
$H_2 = \max\{\|\tilde{a}_3\|_n T, \max\{\|\varphi_2\|_n + \|\tilde{F}_3\|_n T\}\}$.

Имеем:

$$\rho(A(\theta), \theta_x) \le \max\{\|\tilde{a}_3\|_n T, \max\{\|\varphi_2\|_n + \|\tilde{F}_3\|_n T\} = H_2.$$

Рассмотрим шар $S(\theta_{2x}, H_2)$ пространства $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T_3^*)) \times \overline{C}^{(1)}(Q_1(T_3^*))$.
В этом шаре мы выбираем $T_3^* \le T$. так, чтобы СИУ (3.3.8$_2$)-(3.3.9$_2$)-(3.3.11$_2$) имела единственное решение.

Получаем оценки:

$$\left|A_2^1(\theta_2^*) - A_2^1(\theta_2^{**})\right| \le (M_2 + N_3)T_3^* \|\theta_2^* - \theta_2^{**}\|_n,$$

$$\left|A_2^2(\theta_2^*) - A_2^2(\theta_2^{**})\right| \le \Omega_1(T_3^*) \|\theta_2^* - \theta_2^{**}\|_n,$$

где

$$\Omega_2(T) = (L_2 + P_3 + K_3)T.$$

На основе ПСО мы показали, что оператор А при $T_3^* = \min\{T, 1/(N_1 + N_2); 1/(L_2 + P_3 + K_3)\}$ осуществляет СО.

Следовательно, (3.3.11$_2$) имеет единственное решение.

Мы видим, что существование единственного решения системы (3.3.11$_2$) достаточно для определения существования единственного решения СИУ (3.3.4$_2$)-(3.3.2) эквивалентной исходной задаче (3.3.5$_2$)-(3.3.8$_2$).

Продолжая этот процесс, будем решать последнее уравнение системы (3.3.1) по известным функциям $u_1(t,x) = \tilde{u}_1(t,x), u_2(t,x) = \tilde{u}_2(t,x), \ldots, u_{n-1}(t,x) = \tilde{u}_{n-1}(t,x)$:

$$D[\tilde{a}_n(t,x,u_n)]u_n(t,x) = \tilde{F}_n(t,x;u_n) \qquad (3.3.4_{n-1})$$

с НУ (3.3.2),

где

$$\tilde{a}_n(t,x,u_n)=a_n(t,x,\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,....,\tilde{u}_{n-1},u_n),$$
$$\tilde{F}_n(t,x;u_n)=\tilde{F}_n(t,x;\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,....,\tilde{u}_{n-1},u_n).$$

ЛЕММА 3.3.N$_1$. В пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))$ задача (3.3.4$_{n-1}$)-(3.3.2) эквивалентна СИУ:

$$u_n(t,x)=\varphi_{n-1}(p_{n-1}(0,t,x))+\int_0^t\tilde{F}_n(\nu,p_{n-1}(\nu,t,x);u_n(\nu,p_{n-1}(\nu,t,x))d\nu, \quad (3.3.4_{n-1})$$

$$p_{n-1}(s,t,x)=x-\int_s^t\tilde{a}_n(\nu,p_{n-1}(\nu,t,x),u_n(\nu,p_{n-1}))d\nu, \qquad (3.3.6_{n-1})$$

$(s,t,x)\in Q_2(T)$.

Доказательство леммы 3.3.N$_1$. Доказательство этой леммы 3.3.N$_1$ аналогично доказательству предыдущих лемм 3.3.2$_1$ и 3.3.3$_1$. Сначала МДА сводим систему (3.3.4$_{n-1}$)-(3.3.2) к СИУ (3.3.5$_{n-1}$)-(3.3.6$_{n-1}$). Затем докажем, что решение системы ИУ (3.3.5$_{n-1}$)-(3.3.6$_{n-1}$) удовлетворяет поставленной задаче. Чтобы проверить это, мы берем ЧП, которые нам нужны из (3.3.5$_{n-1}$), (3.3.6$_{n-1}$) и подставляем их в (3.3.4$_{n-1}$).

Следовательно, получаем:

$$\frac{\partial u_n(t,x)}{\partial t}+\tilde{a}_n(t,x,u_n)\frac{\partial u_n(t,x)}{\partial x}=\varphi'_{n-1}(p_{n-1}(0,t,x))\left[\frac{\partial p_{n-1}(0,t,x)}{\partial t}+\tilde{a}_n(t,x,u_n)\frac{\partial p_{n-1}(0,t,x)}{\partial x}\right]+$$
$$+\int_0^t\left[\tilde{F}_{n_x}+\tilde{F}_{n_{u_3}}u_{nx}\right]\left[\frac{\partial p_{n-1}(\nu,t,x)}{\partial t}+\tilde{a}_n(t,x,u_3)\frac{\partial p_{n-1}(\nu,t,x)}{\partial x}\right]d\nu+$$
$$+\tilde{F}_n(t,x;u_n(t,x)).$$

$$\frac{\partial p_{n-1}(s,t,x)}{\partial t}+\tilde{a}_n(t,x,u_2)\frac{\partial p_{n-1}(s,t,x)}{\partial x}=0.$$

ЛЕММА 3.3.N$_2$. СИУ (3.3.5$_{n-1}$)-(3.3.6$_{n-1}$)) имеет единственное решение.

Доказательство леммы 3.3.N$_2$. Доказательство этой леммы такое же, как и в предыдущих леммах 3.3.2-3.3.4. Сначала мы заменяем переменные, затем используем транзитивное равенство:

$$p_{n-1}(s,\theta,p_{n-1}(\theta,t,x))=p_{n-1}(s,t,x), \quad (s,\theta,t,x)\in Q_3(T)\ . \qquad (3.3.7_{n-1})$$

Мы получаем следующую систему:

$$\omega_{n-1}(s,t,x)=\varphi_{n-1}(p_{n-1}(0,t,x))+\int_0^s \widetilde{F}_n(\tau,p_{n-1}(\tau,t,x);\omega_{n-1}(\tau,t,x))d\tau, \qquad (3.3.8_{\text{n-1}})$$

$$p_{n-1}(s,t,x)=x-\int_s^t \widetilde{a}_n(\nu,p_{n-1}(\nu,t,x),\omega_{n-1}(\nu,t,x))d\nu, \qquad (3.3.9_{\text{n-1}})$$

$(s,t,x)\in Q_2(T),$

где

$$\omega_{n-1}(s,t,x)=u_n(s,p_{n-1}(s,t,x)). \qquad (3.3.10_{\text{n-1}})$$

Имеем $\omega_{n-1}(t,t,x)=u_n(t,x).$

Запишем ВУ СИУ ($2.3.8_{\text{n-1}}$),($2.3.9_{\text{n-1}}$):

$$\theta_n(s,t,x)=A_n(s,t,x;\theta_n), \qquad (3.3.11_{\text{n-1}})$$

где

$\theta_n=(\theta_n^1,\theta_n^2)$, $\theta_n^1=p_{n-1}(s,t,x)$, $\theta_n^2=\omega_{n-1}(s,t,x)$, $A_n=(A_n^1,A_n^2)$,

$$A_n^1(s,t,x;\theta_n)=x-\int_s^t \widetilde{a}_n(\nu,\theta_n^1(\nu,t,x),\theta_n^2(\nu,t,x))d\nu,$$

$(s,t,x)\in Q_2(T).$

$$A_n^2(s,t,x;\theta_n)=\varphi_{n-1}(\theta_n^1(0,t,x))+\int_0^s \widetilde{F}_n(\tau,\theta_n^1(\tau,t,x);\theta_n^2(\tau,t,x))d\tau.$$

Используя (3.3.3). (3.3.4), введем обозначение

$H_{n-1}=\max\{\|\widetilde{a}_n\|_n T,\max\{\|\varphi_{n-1}\|_n+\|\widetilde{F}_n\|_n T\}\}.$

Имеем:

$$\rho(A(\theta_n),\theta_{nx})\le\max\{\|\widetilde{a}_n\|_n T,\max\{\|\varphi_{n-1}\|_n+\|\widetilde{F}_n\|_n T\}=H_{n-1}.$$

Рассмотрим шар $S(\theta_{nx},H_{n-1})$ пространства $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T_n^*))\times\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_n^*))$. Покажем, что $T_n^*\le T$ СИУ ($3.3.8_{\text{n-1}}$)-($3.3.9_{\text{n-1}}$)-($3.3.11_{\text{n-1}}$ *)* имеет в этом шаре решение.

Получаем необходимые оценки:

$$\left|A_n^1(\theta_n^*)-A_n^2(\theta_n^{**})\right|\le(M_{n-1}+N_n)T_n^*\|\theta_n^*-\theta_n^{**}\|_n,$$

$$\left|A_n^2(\theta_n^*)-A_n^2(\theta_n^{**})\right|\le\Omega_1(T_n^*)\left\|\theta_n^*-\theta_n^{**}\right\|_n,$$

где

$$\Omega_1(T)=(L_{n-1}+P_n\;+K_n)T.$$

Определим:

$$T_n^*=\min\{T,1/(N_{n-2}+N_{n-1});1/(L_{n-1}+P_n+K_n)\}.$$

Таким образом, задача (3.3.4$_{n-1}$)-(3.3.2) также имеет единственное решение.

Следовательно, решая каждое уравнение системы (3.3.1) последовательно МДА определили:

$$T_*=\min\{T_1^*,T_2^*,...,T_n^*\}.$$

Исходя из этого, мы доказали существование и единственность решения задачи (3.3.1)-(3.3.2) на основе ПСО в $\left(\overline{C}^{(1)}(G_{n+1}(T_*))\right)^n$.

Следовательно, МДА можно применить к СНОУ. Здесь мы можем найти существование и единственность локального решения начальной задачи с использованием ПСО.

В данной работе исследованы решений СНОУ в ЧП первого порядка МДА, при помощи которого рассмотренная система уравнений приводится к СИУ. При этом в СИУ не присутствует суперпозиция неизвестных функций.

Теорема 3.3.1. доказана.

3.4 . Построение решения системы двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с неодинаковыми сомножителями

В данном разделе рассмотрено применение МДА для построения решения СНИ.-ДУ в ЧП для конкретного случая.

Рассмотрим конкретную СНИ-ДУ в ЧП и найдем ее решение МДА:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_2(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 u_1(s,\xi)d\xi ds + f(t) \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = g(t,x,u_1(t,x)). \end{cases} \qquad (3.4.1)$$

$$u_1(0,x) = x, \quad u_2(0,x) = \varphi(x), \; x \in R, \qquad (t,x) \in Q_1. \qquad (3.4.2)$$

Функции, приведенные в задаче (3.4.1) - (3.4.2), достаточно гладкие, т.е.

$$\varphi(x) \in \overline{C}(R), \quad g(t,x,u_1) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1 \times R),$$

Задачи построения решения СНУ в ЧП рассмотрены в работах А. Ж. Аширбаевой, Ж. И., Мамбетова [60;61]. В этих работах построено решение СНУ в ЧП с одинаковым нелинейным сомножителем МДА. В этих работах одинаковые сомножители зависели от одной неизвестной функции.

В данной работе проводится построение решения СНИ-ДУ в ЧП с неодинаковыми сомножителями.

Сначала находим решение первого уравнения системы (3.4.1) МДА. В результате использования метода, как правило:

$$u_1(t,x) = x - \int\limits_0^t u_2(\nu, q(\nu,t,x))d\nu + \int\limits_0^t u_2(\nu, q(\nu,t,x))d\nu + Ct + \int\limits_0^t f(s)ds, \qquad (3.4.3)$$

где $q(s.t.x)$-решение ИУ:

$$q(s,t,x) = x - \int\limits_s^t u_2(\nu, q(\nu,t,x))d\nu,$$

Из (3.4.3) имеем

$$u_1(t,x) = x + Ct + \int\limits_0^t f(s)ds, \qquad (3.4.4)$$

где

$$C = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 u_1(s,\xi)d\xi ds.$$

Интегрируя обе части уравнения (3.4.4) от 0 до 1 по t и x, получаем:

$$C = \frac{1}{2}(1+C) + b, \qquad (3.4.5)$$

$$b = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^s f(\nu) d\nu d\xi ds.$$

Из (3.4.5) определим: C=1+2b.

Подставляя найденное значение C в (3.4.4) получаем:

$$u_1(t,x) = x + (1+2b)t + \int_0^t f(s)ds = x + F(t),$$

$$F(t) = (1+2b)t + \int_0^t f(s)ds.$$

Положив эту функцию во второе уравнение системы (3.4.1), получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + (x + F(t)\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = g(t,x,x+F(t)). \qquad (3.4.6)$$

Применяем теперь МДА для задачи (3.4.6)-(3.4.2):

$$u_2(t,x) = \varphi(p(0,t,x)) + \int_0^t g(s, p(s,t,x), p(s,t,x) + F(s))ds,$$

где *p(s,t,x)*-решение следующего ИУ, для которого можно применять МПП

$$p(s,t,x) = x - \int_s^t F(\nu)d\nu - \int_s^t p(\nu,t,x)d\nu, \ (s,t,x) \in Q_2. \qquad (3.4.7)$$

Уравнение (3.4.7) имеет единственное решение, удовлетворяющее ДУ:

$$\frac{\partial p\ (s,t,x)}{\partial t} + (x + F(t))\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial x} = 0, \quad p(s,s,x) = x.$$

Итак, решение поставленной задачи имеет вид:

$$u_1(t,x) = x + F(t),$$

$$u_2(t,x) = \varphi(p(0,t,x)) + \int_0^t g(s, p(s,t,x), p(s,t,x) + F(s))ds.$$

В частности, если система (3.4.1) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_2(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = \displaystyle\int_0^1 u_1(t,s)ds + g(t,x,u_1(t,x)). \end{cases} \qquad (3.4.8)$$

то решение ИУ (3.4.7) принимает вид:

$$p(s,t,x) = xe^{-(t-s)}. \tag{3.4.9}$$

В самом деле (3.4.9) является решением уравнения (3.4.7):

$$xe^{-(t-s)} = x - \int_s^t xe^{-(t-\nu)} d\nu = x - xe^{-(t-\nu)}\Big|_s^t = x - x + xe^{-(t-s)} = xe^{-(t-s)}.$$

Из (3.4.9) имеем:

$$\frac{\partial p\ (s,t,x)}{\partial t} + x\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial x} = 0, \quad p(s,s,x) = x.$$

Тогда решение задачи (3.4.8)-(3.4.2) имеет вил:

$$u_1(t,x) = x,$$

$$u_2(t,x) = \frac{t}{2} + \varphi(xe^{-t}) + \int_0^t g(s, xe^{-(t-s)}, xe^{-(t-s)})ds. \tag{3.4.10}$$

Проверим что, решение (3.4.10) удовлетворяет систему (3.4.8):

$$\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_2(t,x)\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) = u_2(t,x)$$

Теперь проверим второе уравнение системы:

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = \frac{1}{2} - \varphi'(xe^{-t})xe^{-t} + g(t,x,x+t) +$$

$$+\int_0^t [-g'_x xe^{-(t-s)} - g'_u xe^{-(t-s)}]ds +$$

$$+x\left[\varphi'(e^{-t})e^{-t} + \int_0^t [g'_x e^{-(t-s)} + g'_u)e^{-(t-s)}]ds\right] = \frac{1}{2} + g(t,x,x+t) = \frac{1}{2} + g(t,x,x+t).$$

Особенность МДА состоит в том, что с его помощью можно построить решение некоторой СНИ-ДУ в ЧП. Этот метод может быть в дальнейшем применен к новым типам систем.

3.5. Построение решений систем двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с частной производной под знаком интеграла

Рассмотрим конкретную СНИ-ДУ в ЧП и найдем ее решение МДА:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,s,\xi)\dfrac{\partial u_1(s,\xi)}{\partial \xi} d\xi\, ds + f(t) \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = g(t,x,u_1(t,x)). \end{cases} \tag{3.5.1}$$

с НУ (3.4.2).

Сначала находим решение первого уравнения системы (3.5.1) МДА.

Пусть $\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |K(t,s,\xi)| d\xi ds \le \gamma = const.$

Используем схему применения МДА, приведенную в 3.2, где

$$n=2, \quad \psi(x)=-x, \quad \varphi(x)=x, \quad f_1=0,\ f_2=g(t,x,u_1), \quad F_2=0,$$

$$F_1(t,x;u) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi} d\xi ds + g(t), \tag{3.5.2}$$

Для задачи (3.5.1), (3.4.2) уравнение (3.2.2) принимает следующий вид:

$$u_1(t,x) = p(0,t,x) + \int\limits_0^t [\int\limits_0^{\rho} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\rho,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi} d\xi ds + f(\rho)] d\rho, \quad (t,x)\in Q_1, \tag{3.5.3}$$

где $p(s.t.x)$-решение ИУ:

$$p(s,t,x) = x - \int\limits_s^t u_1(\nu, p(\nu,t,x)) d\nu, \tag{3.5.4}$$

В (3.5.3), заменяя x на $q(t,\theta,x),\ \theta \ge t,$ получаем

$$v(t,\theta,x) = q(0,\theta,x) + \int\limits_0^t [\int\limits_0^{\rho} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (K(\rho,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi} d\xi ds + f(\rho)] d\rho, \tag{3.5.5}$$

$(t,\theta,x)\in Q_2$,

где $v(t,\theta,x) = u(t, p(t,\theta,x;v)),$

$$p(\tau,t,p(t,\theta,x;v);v) = p(\tau,\theta,x;v), \quad (\tau,t,\theta,x)\in Q_3.$$

Подставляя (3.5.4) в (3.5.5), имеем

$$v(t,\theta,x) = x - \int_0^{\theta} v(\rho,\theta,x)d\rho + \int_0^t [\int_0^{\rho}\int_{-\infty}^{\infty} K(\rho,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi} d\xi ds + f(\rho)]d\rho, \tag{3.5.6}$$

$(t,\theta,x)\in Q_2$.

Для функции $v(t,\theta,x)\in C^{(2)}(Q_2)$, являющейся при малых t решением ИУ (3.5.6), выполняются равенства

$$\frac{\partial v(t,\theta,x)}{\partial x}\Big|_{t=\theta} = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}. \tag{3.5.7}$$

В самом деле, определим из (3.5.6)

$$\frac{\partial v(t,\theta,x)}{\partial x} = 1 - \int_0^{\theta} \frac{\partial v(\rho,\theta,x)}{\partial x} d\rho. \tag{3.5.8}$$

Уравнение (3.5.8) при $t=\tau$ совпадает с уравнением

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 1 - \int_0^{t} \frac{\partial v(\rho,t,x)}{\partial x} d\rho,$$

которое получено из (3.5.4) непосредственно.

Далее, интегрируя (3.5.8) по t от 0 до θ, находим

$$\int_0^{\theta} \frac{\partial v(\tau,\theta,x)}{\partial x} d\tau = \frac{\theta}{1+\theta}. \tag{3.5.9}$$

Подставляя (3.5.9) в (3.5.8), имеем

$$\frac{\partial v(t,\theta,x)}{\partial x} = \frac{1}{1+\theta}.$$

Отсюда при $t=\theta$, согласно (3.5.7), следует

$$\frac{\partial v(t,t,x)}{\partial x} = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \frac{1}{1+t}. \tag{3.5.10}$$

Подставляя (3.5.10) в (3.5.6), имеем

$$v(t,\theta,x) = x - \int_0^{\theta} v(\rho,\theta,x)d\rho + \int_0^t [\int_0^{\rho}\int_{-\infty}^{\infty} K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s} d\xi ds + g(\rho)]d\rho, \tag{3.5.11}$$

$(t,\theta,x)\in Q_2$.

Из (3.5.11) получаем

$$\int_0^\theta v(\tau,\theta,x)d\tau = [1+\theta]^{-1}\{x\theta + \int_0^\theta\int_0^\eta[\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds + g(\rho)]d\rho d\eta\}. \qquad (3.5.12)$$

Подставляя (3.5.12) в (3.5.11), получаем

$$\begin{gathered} v(t,\theta,x) = x - [1+\theta]^{-1}\{x\theta + \int_0^\theta\int_0^\eta\left[\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds + g(\rho)]d\rho d\eta\} + \right. \\ \left. + \int_0^t [\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds + g(\rho)\right]d\rho, \end{gathered} \qquad (3.5.13)$$

$(t,\theta,x)\in Q_2$.

Полагая $t=\theta$, получаем решение задачи (3.5.1), (3.4.2) в виде:

$$\begin{gathered} u_1(t,x) = x - [1+t]^{-1}\{xt + \int_0^t\int_0^\eta[\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds + g(\rho)]d\rho d\eta\} + \\ \left. + \int_0^t [\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds + g(\rho)\right]d\rho. \end{gathered} \qquad (3.5.14)$$

Далее подставляя (3.5.14) во второе уравнение системы (3.5.1), получаем уравнение относительно неизвестной функции u_2 (t,x):

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = g(t,x,u_1(t,x))$$

С НУ (3.4.2).

В свою очередь последная задача имеет единственное решение в виде:

$$u_2(t,x) = \varphi(p(0,t,x)) + \int_0^t g(s,p(s,t,x),u_1(s,p(s,t,x))ds,$$

где $u_1(t,x)$ определено в виде (3.5.14), а функция $p(s,t,x)$ − решение следующего ИУ:

$$p(s,t,x) = x - \int_s^t u_1(\nu,p(\nu,t,x))d\nu.$$

3.6. Заключение по Главе 3

В данной главе получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для СНИ.-ДУ в ЧП с одинаковым сомножителем, где сомножитель зависит от нескольких неизвестных функций. Найдены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для СНИ.-ДУ в ЧП с неодинаковым сомножителем, где сомножитель зависит от нескольких неизвестных функций. Построено решение системы двух НИ.-ДУ в ЧП с неодинаковыми и одинаковым сомножителями.

ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

4.1. Развитие метода дополнительного аргумента для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных со многими переменными

Рассмотрим решение СДУ в ЧП первого порядка, где коэффициенты при ЧП первого порядка зависят от нескольких неизвестных функций с помощью МДА. В МДА составляется СИУ эквивалентная исходной системе, к которой применяется ПСО. Для задач СНДУ применение этого метода удобно для получения результатов.

Рассмотрим задачу Коши для СДУ в ЧП первого порядка:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=$$
$$=f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)), \qquad (4.1.1)$$

$$i=1,2,..,n, \quad (t,x_1,..,x_n)\in Q_1^n(T),$$

$$u_i(0,x_1,..,x_n)=\varphi_i(x_1,..,x_n), \quad i=1,2,..,n, \quad (x_1,..,x_n)\in R^n, \qquad (4.1.2)$$

В [23] развит МДА в СДУ в ЧП (4.1.1), (4.1.2) с

$$a_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)=u_i(t,x_1,..,x_n), \quad i=1,..,n.$$

Доказательство существования решения СДУ в ЧП (4.1.1), (4.1.2) с $a_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)=a_i(t,x_1,...,x_n,u_{n-1})$ приведено в [58].

ТЕОРЕМА 4.1.1. Пусть функции $\varphi_i(x_1,...,x_n)\in \overline{C}^{1}(R^n)$,

$$a_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n),\ f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\in \overline{C}^{\,0,\underbrace{1,...,1}_{n\,раз},\underbrace{1,...,1}_{n\,раз}}(Q_1^n(T)\times R^n),$$

i=1,2,..,n.

Тогда задача (4.1.1), (4.1.2) имеет единственное, ограниченное решение в $Q_1^n(T_*)$, где T_* ($0 \le T_* \le T$) определяется из исходных данных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для задачи (4.1.1), (4.1.2) используем МДА. Рассматриваемая задача эквивалентна СИУ:

$$u_i(t,x_1,...,x_n) = \varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),...,p_n(0,t,x_1,...,x_n)) +$$

$$+\int_0^t f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_1(\nu,p_1,...,p_n),....,u_n(\nu,p_1,...,p_n))d\nu, \tag{4.1.3}$$

$$p_i(s,t,x_1,...,x_n) = x_i - \int_s^t a_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n,u_1(\nu,p_1,...,p_n),..u_n))d\nu, \tag{4.1.4}$$

$$i=1,2,..,n, \quad (s,t,x_1,..,x_n) \in Q_2^n(T).$$

В самом деле, следуя за главой 3, используя МДА решение задачи (4.1.1), (4.1.2) сводим к СИУ (4.1.3), (4.1.4). Далее обратно, дифференцируя (4.1.3), (4.1.4), получаем справедливость (4.1.1), (4.1.2).

Из (4.1.3) имеем:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k} =$$

$$= f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)) +$$

$$+\sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\left[\frac{\partial p_i(0,t,x_1,..,x_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial p_i(0,t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}\right] +$$

$$+\int_0^t \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_l}\left[\frac{\partial p_l(\nu,t,x_1,..,x_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial p_l(\nu,t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}\right]d\nu +$$

$$+\int_0^t \sum_{r=1=}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_r} \frac{\partial u_r}{\partial x_l} \left[\frac{\partial p_l(\nu,t,x_1,..,x_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n) \frac{\partial p_l(\nu,t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k} \right] d\nu. \tag{4.1.5}$$

Из (4.1.4) следует:

$$\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n) \frac{\partial p_l(s,t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k} = 0, \tag{4.1.6}$$

$$p_i(t,t,x_1,...,x_n) = x_i, \; i = 1,2,..,n.$$

Учитывая (4.1.6), из (4.1.5) получается уравнение (4.1.1). СИУ (4.1.3), (4.1.4) удовлетворяет условию (4.1.2).

Заменим в (4.1.3) переменную t через s, переменные x_i через $p_i(s,t,x_1,...,x_n), \quad i = 1,2,...,n.$

Используем следующее равенство:

$p_i(s,t,x_1,...,x_n) = p_i(s,\tau, p_1(\tau,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\tau,t,x_1,...,x_n))$, имеем:

$$u_i(s, p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n)) = \varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),...,p_n(0,t,x_1,...,x_n)) +$$

$$+\int_0^s f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_1(\nu,p_1,...,p_n),....,u_n(\nu,p_1,...,p_n))d\nu \tag{4.1.7}$$

Введя обозначение

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n) = u_i(s, p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n)),$$

из (4.1.7), (4.1.4) имеем следующую СИУ:

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n) = \varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),...,p_n(0,t,x_1,...,x_n)) +$$

$$+\int_0^s f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),\omega_1(s,t,x_1,...,x_n),....,\omega_n(s,t,x_1,...,x_n))d\nu \tag{4.1.8}$$

$$p_i(s,t,x_1,\ldots,x_n) = x_i -$$

$$-\int_s^t a_i(\nu, p_1(\nu,t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,p_n,\omega_1(s,t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,\omega_n(s,t,x_1,\ldots,x_n))d\nu \qquad (4.1.9)$$

СИУ (4.1.8), (4.1.9) имеет единственное решение, принадлежащее $\overline{C}^{(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\,раз},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\,раз})}(Q_2^n(T)\times R^n)$.

Для этого запишем СИУ (4.1.8),(4.1.9) в виде ВУ:

$$\theta(s,t,x_1,x_2,\ldots,x_n) = A(s,t,x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta), \qquad (4.1.10)$$

в котором $\theta = (\theta_0^1,\theta_0^2,\ldots,\theta_0^n,\theta_1^1,\theta_1^2,\ldots,\theta_1^n)$ - функция переменных $(s,t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$, где $\theta_0^i = p_i(s,t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\theta_1^i = \omega_i(s,t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $i = 1,2,\ldots,n,$ а операторы $A = (A_0^1,A_0^2,\ldots,A_0^n,A_1^1,A_1^2,\ldots,A_1^n)$ определяются равенствами:

$$A_0^i\theta = x_i - \int_s^t a_i(\nu,\theta_0^1(\nu,t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,\theta_0^n(\nu,t,x_1,\ldots,x_n),\theta_1^1(\nu,t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,\theta_1^n(\nu,t,x_1,\ldots,x_n))d\nu,$$

$i = 1,2,\ldots,n.$

$$A_1^i\theta = \varphi_i(\theta_0^1(0,t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,\theta_0^n(0,t,x_1,\ldots,x_n)) +$$

$$+\int_0^s f_i(\rho,\theta_0^1(\rho,t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,\theta_0^n(\rho,t,x_1,\ldots,x_n),\theta_1^1(\rho,t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,\theta_1^n(\rho,t,x_1,\ldots,x_n)d\rho,$$

Обозначим $M = \max\{\max\{\|a_i\|_{Q_2^n(T)}T, \|\varphi_i\|_{R^n} + \|f_i\|_{Q_2^n(T)}T\} : i = 1,..n\}$.

Покажем, что уравнение (4.1.10) при достаточно малом $T_* < T$ имеет в шаре $S : \rho(\theta_x,\theta) \le M$ единственное решение.

Имеем при $t \le T_* \le T$:

$$\|A_0^i\theta - x_i\| \le \|a_i\|_{Q_2^n(T)}T; \|A_1^i\theta\| \le \|\varphi_i\| + \|f_i\|_{Q_2^n(T)}T, i = 1,\ldots,n,$$

то есть оператор *A* отображает шар *S* в себя.

Далее,

$$\left|A_0^i\theta^1 - A_0^i\theta^2\right| \le \Omega_{0i}(T)\rho(\theta^1,\theta^2), \qquad \left|A_1{}^i\theta^1 - A_1{}^i\theta^2\right| \le \Omega_{i1}(T)\rho(\theta^1,\theta^2),$$

где

$$\Omega_{0i}(S) = (\sum_{k=1}^{n} L_k^i + K_k^i)S; \quad \Omega_{1i}(S) = \sum_{k=1}^{n} H_k^i S + \sum_{k=1}^{n}(M_k^i + N_k^i)S, i = 1,\ldots,n,$$

$$a_i(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_n) \in Lip(L_1^i\big|_{x_1}, L_2^i\big|_{x_2},\ldots,L_n^i\big|_{x_n}, K_1^i\big|_{u_1}, K_2^i\big|_{u_2},\ldots,K_n^i\big|_{u_n}),$$

$$\varphi_i(x_1,\ldots,x_n) \in Lip(H_1^i\big|_{u_1}, H_2^i\big|_{u_2},\ldots,H_n^i\big|_{u_n}),\ H_j^i > 0 - const,\ i, j = 1,2,\ldots,n,$$

$$f_i(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_n) \in Lip(M_1^i\big|_{x_1}, M_2^i\big|_{x_2},\ldots,M_n^i\big|_{x_n}, N_1^i\big|_{u_1}, N_2^i\big|_{u_2},\ldots,N_n^i\big|_{u_n}),$$

$M_j^i > 0 - const,\ N_j^i > 0 - const, i,j=1,2,\ldots,n.$

Отсюда следует, что оператор A при

$$T^* = \min\{\Lambda(T;\Omega_{1i}(S):S):\ j = 0,1; i = 1,\ldots,n\}$$

осуществляет СО шара S на себя.

Следовательно, по ПСО уравнение (4.1.10) имеет одно и только одно решение. Теорема 4.1.1 доказана.

Получены условия существования единственного решения применением и развитием МДА, применение которого наиболее эффективно для данного класса задач.

4.2. Использование развитой методики для решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных со многими переменными

Рассмотрим с НУ (4.1.2) следующую СНИ.-ДУ в ЧП вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=$$
$$=f_i(t,x_1,..,x_n,u_1,u_2,...,u_n)+F_i(t,x_1,...,x_n;u_1,u_2,...,u_n:s,\xi_1,...,\zeta_n), \qquad (4.2.1)$$

$i=1,2,..,n, \quad (t,x_1,..,x_n)\in Q_2^n(T).$

ТЕОРЕМА 4.2.1. Пусть выпоняются все уловия теоремы 4.1.1 и

F1) операторы F_i– непрерывные по первым n+1 переменным и $F_i\in Lip(H_0^1\big|_{x_1},H_0^2\big|_{x_2},...,H_0^n\big|_{x_n}),\ H_0^i>0-const,\ i=1,2,...,n;$;

F2) существует такие $H_i>0$, что для любого $T_*\le T$

$$\big\|F_i(t,x_1,...,x_n;u_1^1(s,\xi),...,u_n^1(s,\xi)):s,\xi_1,...,\zeta_n)-$$
$$-F_i(t,x_1,...,x_n;u_1^2(s,\xi),...,u_n^2(s,\xi)):s,\xi_1,...,\zeta_n)\big\|_{Q_1^n(T_*)}\le$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}H_i\,\|u_i^1(t,x_1,...,x_n)-u_i^2(t,x_1,...,x_n)\|_{Q_1^n(T_*)}.$$

Тогда задача (4.2.1), (4.1.2) имеет единственное, ограниченное решение в $Q_1^n(T_*)$, где T_* ($0\le T_*\le T$) определяется из исходных данных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства данной теоремы мы используем доказательство теоремы 4.1.1. задачи (4.1.1), (4.1.2) используя МДА. Рассматриваемая задача эквивалентна СИУ (4.1.4) и:

$$u_i(t,x_1,...,x_n)=\varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),...,p_n(0,t,x_1,...,x_n))+$$
$$+\int_0^t f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_1(\nu,p_1,...,p_n),....,u_n(\nu,p_1,...,p_n))d\nu+$$
$$+\int_0^t F_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n);u_1,....,u_n)d\nu \qquad (4.2.2)$$

$i=1,2,..,n, \quad (s,t,x_1,..,x_n)\in Q_2^n(T).$

В самом деле, следуя за параграфом 4.1., используя МДА решение задачи (4.2.1), (4.1.2) сводим к СИУ (4.2.2), (4.1.4).

Далее обратно, дифференцируя (4.2.2), (4.1.4), получаем справедливость (4.2.1), (4.1.2).

Из (4.2.2) имеем:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=$$

$$=f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n))+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\left[\frac{\partial p_i(0,t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial p_i(0,t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}\right]+$$

$$+\int_0^t\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_l}+\frac{\partial F_i}{\partial x_l}\right)\left[\frac{\partial p_l(\nu,t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial p_l(\nu,t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}\right]d\nu+$$

$$+\int_0^t\sum_{r=1=}^{n}\ \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial u_r}\frac{\partial u_r}{\partial x_l}\left[\frac{\partial p_l(\nu,t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial p_l(\nu,t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}\right]d\nu.$$

(4.2.3)

Для поставленной задачи СИУ (4.1.8) принимает следующий вид:

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=\varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),...,p_n(0,t,x_1,...,x_n))+ \qquad (4.2.4)$$

$$+\int_0^s f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),\omega_1(s,t,x_1,...,x_n),....,\omega_n(s,t,x_1,...,x_n))d\nu$$

$$+\int_0^s F_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n);\omega_1(s,s,\xi_1,...,\zeta_n),....,\omega_n(s,s,\xi_1,...,\zeta_n))d\nu$$

Для поставленной задачи получаем следующие ОУ:

$$A_0^i\theta=x_i-\int_s^t a_i(\nu,\theta_0^1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n,\theta_1^1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,\theta_1^n)d\nu,$$

$$A_1^i\theta=\varphi_i(\theta_0^1(0,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n(0,t,x_1,...,x_n))+$$

$$+\int_0^s f_i(\rho,\theta_0^1(\rho,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n(\rho,t,x_1,...,x_n),\theta_1^1(\rho,t,x_1,...,x_n),....,\theta_1^n(\rho,t,x_1,...,x_n)d\rho+$$

$$+\int_0^s F_i(\rho,\theta_0^1(\rho,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n(\rho,t,x_1,...,x_n);\theta_1^1(s,s,\xi_1,...,\zeta_n),....,\theta_1^n(s,s,\xi_1,...,\zeta_n)d\rho,$$

$i=1,2,...,n.$

Обозначим через:

$$M=\max\{\max\{\|a_i\|_{Q_1^n(T)}T,\|\varphi_i\|_{R^n}+\|f_i+F_i\|_{Q_1^n(T)}T\}:i=1,..n\}.$$

Имеем при $t\le T_*\le T$:

$$\|A_0^i\theta-x_i\|\le\|a_i\|_{Q_1^n(T)}T;\quad \|A_1^i\theta\|\le\|\varphi_i\|+\|f_i+F_i\|_{Q_1^n(T)}T,\ i=1,...,n,$$

Имеем:

$$\left|A_0^i\theta^1-A_0^i\theta^2\right|\le\Omega_{0i}(T)\rho(\theta^1,\theta^2),$$

$$\left|A_1{}^i\theta^1-A_1{}^i\theta^2\right|\le\tilde{\Omega}_{i1}(T)\rho(\theta^1,\theta^2),$$

где

$$\Omega_{0i}(S)=(\sum_{k=1}^n L_k^i+K_k^i)S;$$

$$\tilde{\Omega}_{1i}(S)=\sum_{k=1}^n H_k^iS+\sum_{k=1}^n(M_k^i+N_k^i+H_k)S,i=1,...,n.$$

Отсюда следует, что оператор A при

$$T^*=\min\{\Lambda(T;\Omega_{1i}(S):S):\ j=0,1;i=1,...,n\}$$

осуществляет СО шара S на себя.

Следовательно, по ПСО поставленная задача имеет одно и только одно решение. Теорема 4.2.1. доказана.

4.3. Решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с неодинаковыми сомножителями и с n+1 независимыми переменными

Мы рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} D[a_{11}(t,x,u_1,\dots,u_n),\dots,a_{1n}(t,x,u_1,\dots,u_n)]u_1(t,x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}(t,x,u_1,\dots,u_n)+\ f(t) \\ D[a_{21}(t,x,,u_1,u_2),a_{22},\dots,a_{2n}]u_2(t,x)=F_1(t,x;,u_1,u_2) \\ D[a_{31}(t,x,u_1,u_2,u_3),\dots,a_{3n}(t,x,u_1,u_2,u_3)]u_3(t,x)=F_2(t,x;u_1,u_2,u_3) \\ ------------------------------------ \\ D[a_{n1}(t,x,u_1,\dots,u_n),\dots,a_{nn}(t,x,u_1,\dots,u_n)]u_n(t,x)=F_{n-1}(t,x;u_1,\dots,u_n) \end{cases} \qquad (4.3.1)$$

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n),\ (t,x)\in Q_1^n(T).$

Система (4.3.1) рассматривается с НУ

$$u_1(0,x)=\sum_{k=1}^{n}x_k,$$
$$u_\kappa(0,x)=\varphi_\kappa(x),\ x\in R^n,\quad \kappa=2,\dots,n. \qquad (4.3.2)$$

Для решения данной задачи используем МДА. Приведем задачу (4.3.1)-(4.3.2) к СИУ используя МДА. Затем по ПСО докажем существование и единственность решения СИУ.

Используя результаты раздела 3.3. для многомерного случая, считая заданных функций и операторов в (4.3.1) достаточно гладкими и удовлетворяющими условиями Липшица по переменным $x_1,\dots,x_n$ и $u_1,\dots,u_n$ исследуем с помощью МДА задачу (4.3.1) с НУ (4.3.2).

Рассмотрим сначала первое уравнение системы (4.3.1). Это уравнение с условием (4.3.2) сводиться к следующему ИУ:

$$u_i(t,x)=\sum_{k=1}^{n}x_k-\int_0^t\sum_{k=1}^{n}a_{1k}(t,p_1(\nu,t,x),u_1(\nu,p_1),\dots.,u_n(\nu,p_1)))d\nu+$$

$$+\int_0^t\sum_{k=1}^{n}a_{1k}(t,p_1(\nu,t,x),u_1(\nu,p_1),\dots.,u_n(\nu,p_1)))d\nu+\int_0^t f(s)ds, \qquad (4.3.3)$$

где

$p_1(s,t,x)=(p_{11}(s,t,x),p_{12}(s,t,x),\dots,p_{1n}(s,t,x))$ - решение следующей СИУ:

$$p_{1k}(s,t,x)=x_k-\int_s^t a_{1k}(\nu,p_1(\nu,t,x),u_1(\nu,p_1),..u_n(\nu,p_1))d\nu,\quad k=1,\dots,n, \tag{4.3.4}$$

$(s,t,x)\in Q_2^n(T)$.

Из (4.3.3) имеем:

$$u_1(t,x)=\sum_{k=1}^n x_k+\int_0^t f(s)ds. \tag{4.3.5}$$

Система уравнений (4.3.4) имеет единственное решение, удовлетворяющее СДУ:

$$\frac{\partial p_{1k}(s,t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^n a_{1i}(t,x,u_1,\dots,u_n)\frac{\partial p_{1k}(s,t,x)}{\partial x_i}=0,\quad p_{1k}(s,s,x)=x_k,\quad k=1,..n.$$

Воспользуясь преимуществом МДА, мы нашли неизвестную функцию $u_1(t,x)$ в виде (4.3.5).

Теперь подставляя найденную функцию $u_1(t,x)$ во второе уравнение системы (4.3.1) получаем следующую задачу относительно неизвестной функции $u_2(t,x)$:

$$D[\tilde{a}_{21}(t,x,u_2),\tilde{a}_{22},\dots,\tilde{a}_{2n}]u_2(t,x)=\tilde{F}_1(t,x;u_2) \tag{4.3.6$_1$}$$

с условием (4.3.2),

где

$$\tilde{a}_{2i}(t,x,u_2)=a_{2i}(t,x,\sum_{k=1}^n x_k+\int_0^t f(s)ds,u_2),$$

$$\tilde{F}_1(t,x;u_2)=F_1(t,x;\sum_{k=1}^n x_k+\int_0^t f(s)ds,u_2),\quad i=1,\dots,n.$$

Применяя МДА для задачи (4.3.6), (4.3.3), сводим задачу к СИУ:

$$u_2(t,x)=\varphi(p_2(0,t,x))+\int_0^t \tilde{F}_1(\nu,p_2(\nu,t,x),u_2(\nu,p_2(\nu,t,x))d\nu, \tag{4.3.7$_1$}$$

где

где $p_2(s,t,x) = (p_{21}(s,t,x), p_{22}(s,t,x),\ldots,p_{2n}(s,t,x))$ - решение следующей СИУ:

$$p_{2k}(s,t,x) = x_k - \int_s^t \tilde{a}_{2k}(\nu, p_2(\nu,t,x), u_2(\nu, p_2))d\nu, \quad k = 1,\ldots,n, \qquad (4.3.8_1)$$
$$(s,t,x) \in Q_2^n(T).$$

Система уравнений (4.3.4) имеет единственное решение, удовлетворяющее СДУ:

$$\frac{\partial p_{2k}(s,t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{2i}(t,x,u_2)\frac{\partial p_{2k}(s,t,x)}{\partial x_i} = 0, \quad p_{2k}(s,s,x) = x_k, \quad k = 1,..n.$$

Применим ПСО для СИУ ($4.3.7_1$), ($4.3.8_1$).

При $0 < T_1^* \le T$ (T_1^* определяется из исходных данных как в разделе 3.3) задача ($4.3.7_1$), (4.3.3) имеет единственное решение в $\overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T_1^*))$.

Теперь будем решать третье уравнение системы (4.3.1) по известным функциям $u_1(t,x), u_2(t,x)$:

$$D[\tilde{a}_{31}(t,x,u_3), \tilde{a}_{32},\ldots,\tilde{a}_{3n}]u_3(t,x) = \tilde{F}_2(t,x,u_3) \qquad (4.3.6_2)$$

с условием (4.3.2),

где

$$\tilde{a}_{3i}(t,x,u_3) = a_{3i}(t,x,\sum_{k=1}^{n} x_k + \int_0^t f(s)ds, u_2, u_3),$$
$$\tilde{F}_2(t,x;u_3) = F_2(t,x;\sum_{k=1}^{n} x_k + \int_0^t f(s)ds, u_2, u_3).$$

Применяя МДА для задачи ($4.3.6_2$), (4.3.3), сводим задачу к СИУ:

$$u_3(t,x) = \varphi(p_3(0,t,x)) + \int_0^t \tilde{F}_2(\nu, p_3(\nu,t,x); u_3(\nu, p_3(\nu,t,x))d\nu, \qquad (4.3.7_2)$$

где $p_3(s,t,x) = (p_{31}(s,t,x), p_{32}(s,t,x),\ldots,p_{3n}(s,t,x))$ - решение следующей СИУ:

$$p_{3k}(s,t,x) = x_k - \int_s^t \tilde{a}_{3k}(\nu, p_3(\nu,t,x), u_3(\nu, p_3))d\nu, \quad k = 1,\ldots,n, \qquad (4.3.8_2)$$
$$(s,t,x) \in Q_2^n(T).$$

Система уравнений ($4.3.8_2$) имеет единственное решение, удовлетворяющее СДУ:

$$\frac{\partial p_{3k}(s,t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\widetilde{a}_{3i}(t,x,u_3)\frac{\partial p_{3k}(s,t,x)}{\partial x_i}=0,\quad p_{2k}(s,s,x)=x_k,\quad k=1,..n.$$

По ПСО система уравнений ($4.3.7_2$), ($4.3.8_2$) при $0<T_2^*\le T$ (T_2^* определяется из исходных данных) имеет решение в $\overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T_2^*))$.

Продолжая этот процесс, будем решать последнее уравнение системы (4.3.1) по известным функциям $u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_{n-1}(t,x)$:

$$D[\widetilde{a}_{n1}(t,x,u_n),\widetilde{a}_{n2},...,\widetilde{a}_{nn}]u_n(t,x)=\widetilde{F}_{n-1}(t,x;u_n) \qquad (4.3.6_n)$$

с НУ (4.3.2),

где

$$\widetilde{a}_{ni}(t,x,u_n)=a_{ni}(t,x,\sum_{k=1}^{n}x_k+\int_0^t f(s)ds,u_2,u_3,...,u_n),$$

$$\widetilde{b}_{n-1}(t,x,u_n)=b_{n-1}(t,x,\sum_{k=1}^{n}x_k+\int_0^t f(s)ds,u_2,u_3,...,u_n),\quad i=1,...,n.$$

Применяя МДА для задачи ($4.3.6_n$), (4.3.3), сводим задачу к СИУ:

$$u_n(t,x)=\varphi(p_n(0,t,x))+\int_0^t\widetilde{F}_{n-1}(\nu,p_n(\nu,t,x);u_n(\nu,p_n(\nu,t,x))d\nu, \qquad (4.3.7_n)$$

где

где $p_n(s,t,x)=(p_{n1}(s,t,x),p_{n2}(s,t,x),...,p_{nn}(s,t,x))$ - решение следующей СИУ:

$$p_{nk}(s,t,x)=x_k-\int_s^t\widetilde{a}_{nk}(\nu,p_n(\nu,t,x),u_n(\nu,p_n))d\nu,\quad k=1,...,n,$$
$$(s,t,x)\in Q_2^n(T). \qquad (4.3.8_n)$$

Система уравнений ($4.3.8_n$) имеет единственное решение, удовлетворяющее СДУ

$$\frac{\partial p_{nk}(s,t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\widetilde{a}_{ni}(t,x,u_3)\frac{\partial p_{nk}(s,t,x)}{\partial x_i}=0,\quad p_{nk}(s,s,x)=x_k,\quad k=1,..n.$$

По ПСО система уравнений (4.3.7n), (4.3.8n) при $0 < T_{n-1}^* \le T$ (T_{n-1}^* определяется из исходных данных) имеет решение в $\overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T_{n-1}^*))$.

Следовательно, при $0 < T_* \le T$, где $T_* = \min\{T_1^*, T_2^*, \ldots, T_{n-1}^*\}$ задача (4.3.1)-(4.3.2) имеет решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T_*))\right)^n$.

Рассмотрим следующий **Пример 4.3.1**:

$$\begin{cases} D[a_{11}(t,x,y,u_1,u_2),.a_{12}(t,x,y,u_1,u_2)]u_1(t,x,y) = \sum_{k=1}^{2} a_{1k}(t,x,y,u_1,u_2) + \int_0^1\int_0^1 u(t,\xi,\eta)d\xi d\eta \\ D[a_{21}(t,x,y,u_1,u_2),a_{22}(t,x,y,u_1,u_2)]u_2(t,x,y) = b(t,x,y,u_1,u_2), \end{cases} \qquad (4.3.9)$$

где

$(t,x,y) \in \tilde{Q}_1^2(T) = [0,T] \times R_+^2$,

Систему (4.3.9) рассмотрим с НУ:

$$\begin{aligned} &u_1(0,x,y) = x + y, \\ &u_2(0,x,y) = \varphi(x,y),\ (x,y) \in R_+^2. \end{aligned} \qquad (4.3.10)$$

Заданные функции достаточно гладкие: $\varphi(x,y)) \in C^{(1)}(R_+^2), a_{ij}(t,x,y,u_1,u_2) \in \overline{C}^{(1)}\tilde{Q}_1^2(T) \times R^2)$,

$b(t,x,y,u_1,u_2) \in \overline{C}^{(1)}(\tilde{Q}_1^2(T) \times R^2), i, j = 1,2.$

Из первого уравнения примера 4.3.1 МДА имеем:

$$u_1(t,x) = x - \int_0^t a_{11}(\nu, p_1(\nu,t,x,y), p_2(\nu,t,x,y), u_1(\nu,p_1,p_2), u_n(\nu,p_1,p_2))d\nu +$$

$$+ y - \int_0^t a_{12}(\nu, p_1(\nu,t,x,y), p_2(\nu,t,x,y), u_1(\nu,p_1,p_2), u_n(\nu,p_1,p_2))d\nu +$$

$$+ \int_0^t a_{11}(\nu, p_1(\nu,t,x,y), p_2(\nu,t,x,y), u_1(\nu,p_1,p_2), u_n(\nu,p_1,p_2))d\nu +$$

$$+ \int_0^t a_{12}(\nu, p_1(\nu,t,x,y), p_2(\nu,t,x,y), u_1(\nu,p_1,p_2), u_n(\nu,p_1,p_2))d\nu +$$

$$+ \int_0^t\int_0^1\int_0^1 u_1(s,\xi,\eta)d\eta d\xi ds, \qquad (4.3.11)$$

здесь

$p_1(s,t,x,y),\quad p_2(s,t,x,y)$ - решение СИУ:

$$\begin{cases} p_1(s,t,x,y) = x - \int\limits_s^t a_{11}(\nu, p_1(\nu,t,x,y), p_2(\nu,t,x,y), u_1(\nu, p_1, p_2), u_2(\nu, p_1, p_2))d\nu, \\ p_2(s,t,x,y) = y - \int\limits_s^t a_{12}(\nu, p_1(\nu,t,x,y), p_2(\nu,t,x,y), u_1(\nu, p_1, p_2), u_2(\nu, p_1, p_2))d\nu, \end{cases}$$

$$(s,t,x,y) \in \widetilde{Q}_2^2(T), \tag{4.3.12}$$

Из (4.3.11) имеем:

$$u_1(t,x,y) = x + y + \int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u_1(s,\xi,\eta)d\eta d\xi ds. \tag{4.3.13}$$

Из (3.3.12) получается:

$$D[a_{11}(t,x,y,u_1,u_2),.a_{12}(t,x,y,u_1,u_2)]p_1(s,t,x,y) = 0,\quad p_1(s,s,x,y) = x,$$

$$D[a_{11}(t,x,y,u_1,u_2),.a_{12}(t,x,y,u_1,u_2)]p_2(s,t,x,y) = 0,\quad p_2(s,s,x,y) = y.$$

Для (4.3.13) применятся МПП полагая $u_1^0(t,x,y) = 0$:

$$u_1^N(t,x,y) = x + y + \int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u_1^{N-1}(s,\xi,\eta)d\eta d\xi ds,\quad \mathrm{N} = 1,2,3,...,$$

$$u_1^1(t,x,y) = x + y,$$

$$u_1^2(t,x,y) = x + y + \int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (\xi+\eta)d\eta d\xi ds = x + y + t,$$

$$u_1^3(t,x,y) = x + y + \int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (\xi+\eta+s)d\eta d\xi ds = x + y + t + \frac{t^2}{2},$$

$$u_1^4(t,x,y) = x + y + \int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (\xi+\eta+s+\frac{s^2}{2})d\eta d\xi ds = x + y + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!},$$

$$u_1^n(t,x,y) = x + y + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + ... + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} u_1^n(t,x) = u_1(t,x)$, где

$$u_1(t,x,y) = x + y + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots = x + y + e^t - 1.$$

Далее как в (4.3.6$_1$), получаем СДУ в ЧП:

$$D[\tilde{a}_{21}(t,x,y,u_2), \tilde{a}_{22}(t,x,y,u_2)]u_2(t,x,y) = \tilde{b}(t,x,y,u_2), \qquad (4.3.14)$$

где

$$\tilde{a}_{2i}(t,x,y,u_2) = a_{2i}(t,x,y,x+y+e^t-1,u_2),$$
$$\tilde{b}(t,x,y,u_2) = b_1(t,x,y,x+y+e^t-1,u_2), \quad i=1,2.$$

Задача (4.3.14), (4.3.2) в свою очередь с использованием нашего метода сводиться к СИУ:

$$\begin{cases} u_2(t,x,y) = \varphi(q_1(0,t,x,y), q_2(0,t,x,y)) + \\ + \int\limits_0^t \tilde{b}(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y), u_2(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y))d\nu, \\ q_1(s,t,x,y) = x - \int\limits_s^t \tilde{a}_{21}(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y), u_2(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y)))d\nu, \\ q_2(s,t,x,y) = y - \int\limits_s^t \tilde{a}_{22}(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y), u_2(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y)))d\nu, \end{cases} \qquad (3.3.15)$$

$(s,t,x,y) \in \tilde{Q}_2^2(T).$

$q_1(s,t,x,y), q_2(s,t,x,y)$ - для них справедливы:

$$D[a_{21}(t,x,y,u_1,u_2), .a_{22}(t,x,y,u_1,u_2)]q_1(s,t,x,y) = 0, \quad q_1(s,s,x,y) = x,$$

$$D[a_{21}(t,x,y,u_1,u_2), .a_{22}(t,x,y,u_1,u_2)]q_2(s,t,x,y) = 0, \quad q_2(s,s,x,y) = y.$$

Для $a_{21}(t,x,y,u_1,u_2),\, a_{22}(t,x,y,u_1,u_2) \in \overline{C}^{(1)}(\tilde{Q}_1^2(T) \times R^2)$ справедливы:

$$q_1(s,\tau,q_1(\tau,t,x,y),q_2(\tau,t,x,y)) = q_1(s,\tau,x,y),$$

$$q_2(s,\tau,q_1(\tau,t,x,y),q_2(\tau,t,x,y)) = q_2(s,\tau,x,y), \qquad (4.3.16)$$
$$(s,t,x,y) \in \tilde{Q}_2^3(T).$$

Используя эти равенства из системы(3.3.15) имеем:

$$\begin{cases} \omega(s,t,x,y) = \varphi(q_1(0,t,x,y), q_2(0,t,x,y)) + \\ + \int\limits_0^t \widetilde{b}_1(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y), \omega(\nu,t,x,y))d\nu, \\ q_1(s,t,x,y) = x - \int\limits_s^t \widetilde{a}_{21}(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y), \omega(\nu,t,x,y))d\nu, \\ q_2(s,t,x,y) = y - \int\limits_s^t \widetilde{a}_{22}(\nu, q_1(\nu,t,x,y), q_2(\nu,t,x,y), \omega(\nu,t,x,y))d\nu, \end{cases} \tag{4.3.17}$$

здесь

$$\omega(s,t,x,y) = u_2(s, q_1(s,t,x,y), q_2(s,t,x,y)).$$

(4.3.17) запишем в виде ВУ:

$$\theta = A\theta, \tag{4.3.18}$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ - а функции $\theta_1 = \omega(s,t,x,y)$, $\theta_2 = q_1(s,t,x,y)$, $\theta_3 = q_2(s,t,x,y)$, а $A = (A_1, A_2, A_3)$ и:

$$\begin{cases} A_1\theta = \varphi(\theta_2(0,t,x,y), \theta_3(0,t,x,y)) + \\ + \int\limits_0^t \widetilde{b}_1(\nu, \theta_2(\nu,t,x,y), \theta_3(\nu,t,x,y), \theta_1(\nu,t,x,y))d\nu, \\ A_2\theta = x - \int\limits_s^t \widetilde{a}_{21}(\nu, \theta_2(\nu,t,x,y), \theta_3(\nu,t,x,y), \theta_1(\nu,t,x,y))d\nu, \\ A_3\theta = y - \int\limits_s^t \widetilde{a}_{22}(\nu, \theta_2(\nu,t,x,y), \theta_3(\nu,t,x,y), \theta_1(\nu,t,x,y))d\nu, \end{cases} \tag{4.3.19}$$

Система (4.3.19) в области $\widetilde{Q}_1^2(T)$ при $T < T_*$ имеем решение удовлетворяющие неравенству $\|\theta - \theta_0\| \le M$.

Используем норму:

$$\|\theta\| = \max_{0 \le i \le 3} \max_{(t,x) \in G_3(T)} \left\{ |\theta_i|, \quad i = 1,2,3 \right\}.$$

Имеем:

$$|A_1\theta - \varphi| \le M_0 T,$$

$$|A_2\theta - x| \le M_1 T,$$

$$\left|A_3\theta - y\right| \le M_2 T\,,$$

$$\left|\tilde{b}_1(t,x,y,u_2)\right| \le M_0 = const, \qquad \left|a_{2ii}(t,x,y,u_2)\right| \le M_i = const, \quad i = 1,2.$$

Справедливы:

$$\left|A_1\theta^1 - A_1\theta^2\right| \le \Omega_1(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|,$$

$$\left|A_2\theta^1 - A_2\theta^2\right| \le \Omega_2(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|,$$

$$\left|A_3\theta^1 - A_3\theta^2\right| \le \Omega_3(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|,$$

Здесь:

$$\Omega_1(T) = L_1 + L_2 + (K_1 + K_2 + K_3)T,$$

$$\Omega_2(T) = (N_1 + N_2 + N_3)T,$$

$$\Omega_3(T) = (H_1 + H_2 + H_3)T,$$

$$\varphi(x,y) \in Lip(L_1\big|_x, L_2\big|_y), \quad L_1, L_2 \ge 0, \quad L_1, L_2 - const,$$

$$\tilde{b}_1(t,x,y,u_2) \in Lip(K_1\big|_x, K_2\big|_y, K_3\big|_{u_2}), \quad K_1, K_2, K_3 \ge 0, \quad K_1, K_2, K_3 - const,$$

$$\tilde{a}_{21}(t,x,y,u_2) \in Lip(N_1\big|_x, N_2\big|_y, N_3\big|_{u_2}), \quad N_1, N_2, N_3 \ge 0, \quad N_1, N_2, N_3 - const,$$

$$\tilde{a}_{22}(t,x,y,u_2) \in Lip(H_1\big|_x, H_2\big|_y, H_3\big|_{u_2}), \quad H_1, H_2, H_3 \ge 0, \quad H_1, H_2, H_3 - const.$$

Решения уравнение $\Omega_i(T) = 1,\, i = 1,2,3$ обозначим T_1, T_2, T_3.

Тогда при $T < T^* = \min\{T_1\ , T_2, T_3\}$ поставленная задача примера 4.3.1 имеем единственное решение.

4.4. Построение решений одной системы интегро-дифференциальных уравнений с тремя независимымы переменными

Рассматривается следующая СИ.-ДУ в ЧП с вырожденным ядром вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x,y)}{\partial t} + u_1(t,x,y)\dfrac{\partial u_1(t,x,y)}{\partial x} + u_2(t,\text{x},\text{y})\dfrac{\partial u_1(t,x,y)}{\partial y} = u_1(t,x,y) + \\ + u_2(t,x,y) + \int_0^1\int_0^1\int_0^1 H_1(t)K_1(s,\xi,\eta)u_1(s,\xi,\eta)d\xi d\eta ds, \\ \dfrac{\partial u_2(t,x,y)}{\partial t} + u_2(t,x,y)\dfrac{\partial u_2(t,x,y)}{\partial x} + \int_0^1\int_0^1 u_1(t,\xi,\eta)d\xi d\eta\dfrac{\partial u_2(t,x,y)}{\partial y} = \\ = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 H_2(t)K_2(s,\xi,\eta)u_2(s,\xi,\eta)d\xi d\eta ds \end{cases} \tag{4.4.1}$$

с НУ

$$u_i(0,x,y) = x + y, \quad i = 1,2, \quad (t,x,y) \in \tilde{Q}_1^2. \tag{4.4.2}$$

Пусть:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |K_i(s,\xi,\eta)| d\xi d\eta ds \le \gamma = const, \ \int_0^1\int_0^1\int_0^1 K_1(s,\xi,\eta)H_1(s)d\xi d\eta ds \ne -1,$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 K_2(s,\xi,\eta)\left[\int_0^s H_2(\nu)d\nu - \frac{1}{1+s}\int_0^s\int_0^\tau H_2(\nu)d\nu d\tau\right]d\xi d\eta ds \ne -1.$$

Сводим первое уравнение системы к ИУ с помощью МДА:

$$u_1(t,x,y) = x - \int_0^t u_1(s, p_1(s,t,x,y), p_2(s,t,x,y))ds + y -$$
$$- \int_0^t u_2(s, p_1(s,t,x,y), p_2(s,t,x,y))ds + \int_0^t u_1(s, p_1(s,t,x,y), p_2(s,t,x,y))ds + \tag{4.4.3}$$
$$+ \int_0^t u_2(s, p_1(s,t,x,y), p_2(s,t,x,y))ds + C_1\int_0^t H_1(s)ds,$$

где

$p_1(s,t,x,y), p_2(s,t,x,y)$-решения СИУ:

$$p_1(s,t,x,y) = x - \int_s^t u_1(s, p_1(s,t,x,y), p_2(s,t,x,y))ds,$$

$$p_2(t,x,y) = y - \int_s^t u_2(s, p_1(s,t,x,y), p_2(s,t,x,y))ds,$$

Из (3) получаем:

$$u_1(t,x,y) = x + y + H_1(t)C_1, \qquad (4.4.4)$$

где $C_i = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 K_i(s,\xi,\eta)u_i(s,\tau,\xi)d\xi d\eta ds, \quad i = 1{,}2..$

Умножая обе части уравнения на $K_1(t,x,y)$, затем интегрируя по t, x,y от нуля до 1, получаем:

$$C_1 = A + BC_1, \qquad (4.4.5)$$

$$A = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 K_1(s,\xi,\eta)(\eta+\xi)d\xi d\eta ds, \quad B = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 K_1(s,\xi,\eta)H_1(s)d\xi d\eta ds.$$

Из (4.4.5) получаем:

$$C_1 = A/(1-B).$$

Следовательно:

$$u_1(t,x,y) = x + y + f(t), \quad f(t) = H_1(t)A/(1-B).$$

Рассмотрим второе уравнение системы, где $u_1(t,x,y)$ уже известная нам уже функция. Применяем МДА:

$$\begin{aligned} u_2(t,x,y) &= x - \int_0^t u_2(s,q_1(s,t,x,y),q_2(s,t,x,y))ds + y - \\ &- \int_0^t\int_0^1\int_0^1 (\xi+\eta+f(s))d\xi d\eta ds + C_2\int_0^t H_2(s)ds, \end{aligned} \qquad (4.4.6)$$

$$q_1(s,t,x,y) = x - \int_s^t u_2(s,q_1(s,t,x,y),q_2(s,t,x,y))ds,$$

$$q_2(s,t,x,y) = y - \int_s^t\int_0^1\int_0^1 (\xi+\eta+f(s))d\xi d\eta ds.$$

Далее заменяя в (4.4.6) t на s, x на $q_1(s,t,x,y)$, y на $q_2(s,t,x,y)$, этом учитывая равенство транзитивности в МДА, имеем:

$$\begin{aligned} u_2(s,q_1(s,t,x,y),q_2(s,t,x,y)) &= q_1(0,s,q_1(s,t,x,y),q_2(s,t,x,y)) + \\ &+ q_2(0,s,q_1(s,t,x,y),q_2(s,t,x,y)) + C_2\int_0^s H_2(\nu)d\nu. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\omega_2(s,t,x,y) = x - \int_0^t \omega_2(\nu,t,x,y)d\nu + q_2(0,t,x,y)) + C_2\int_0^s H_2(\nu)d\nu, \qquad (4.4.7)$$

где введено следующее обозначение:

$$\omega_2(s,t,x,y) = u_2(s,q_1(s,t,x,y),q_2(s,t,x,y)). \qquad (4.4.8)$$

В (4.4.8) при s=t имеем: $\omega_2(t,t,x,y) = u_2(t,x,y)$.

Из (4.4.7) интегрирую по s от нуля до t, находим:

$$\int_0^t \omega_2(\nu,t,x,y)d\nu = \frac{x}{1+t} + q_2(0,t,x,y)t + \frac{C_2}{1+t}\int_0^t\int_0^s H_2(\nu)d\nu. \qquad (4.4.9)$$

Подставляя (4.4.9) в (4.4.7), получаем:

$$\omega_2(s,t,x,y) = \frac{xt}{1+t} - q_2(0,t,x,y)t - \frac{C_2}{1+t}\int_0^t\int_0^s H_2(\nu)d\nu + q_2(0,t,x,y)) + C_2\int_0^s H_2(\nu)d\nu.$$

Отсюда

$$\omega_2(s,t,x,y) = \frac{xt}{1+t} + q_2(0,t,x,y)(1-t) + C_2\left[\int_0^s H_2(\nu)d\nu - \frac{1}{1+t}\int_0^t\int_0^s H_2(\nu)d\nu ds\right]. \qquad (4.4.10)$$

Приравнивая s=t в (4.4.10), получаем:

$$u_2(t,x,y) = \frac{xt}{1+t} + q_2(0,t,x,y)(1-t) + C_2\left[\int_0^t H_2(\nu)d\nu - \frac{1}{1+t}\int_0^t\int_0^s H_2(\nu)d\nu ds\right]. \qquad (4.4.11)$$

Умножая обе части уравнения на $K_2(t,x,y)$, затем интегрируя по t, x,y от нуля до 1, получаем:

$$C_2 = D + C_2 E, \qquad (4.4.12)$$

где

$$D = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 K_2(s,\xi,\eta)\left(\frac{\xi s}{1+s} + q_2(0,s,\xi,\eta)(1-s)\right)d\xi d\eta ds,$$

$$E = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 K_2(s,\xi,\eta)\left[\int_0^s H_2(\nu)d\nu - \frac{1}{1+s}\int_0^s\int_0^\tau H_2(\nu)d\nu d\tau\right]d\xi d\eta ds \neq -1.$$

Тогда из (4.4.12) находим C_2, затем которую подставляя в (4.4.11), получаем решение СИ.-ДУ в ЧП (4.4.1) в виде:

$$u_1(t,x,y) = x + y + H_1(t)A/(1-B),$$

$$u_2(t,x,y) = \frac{xt}{1+t} + q_2(0,t,x,y)(1-t) + \frac{D}{1-E}\left[\int_0^t H_2(\nu)d\nu - \frac{1}{1+t}\int_0^t\int_0^s H_2(\nu)d\nu ds\right].$$

4.5. Заключение по Главе 4

В данной главе получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для СНИ.-ДУ в ЧП с одинаковым сомножителем, где сомножитель зависит от нескольких неизвестных функций со многими переменными. Найдены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для СНИ.-ДУ в ЧП с неодинаковым сомножителем, где сомножитель зависит от нескольких неизвестных функций со многими переменными. С помощью МДА построено решение одной системы интегро-дифференциальных уравнений с тремя независимымы переменными.

ВЫВОДЫ

В диссертации методом дополнительного аргумента получены достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для СНИ.-ДУ в ЧП с одинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций. Найдены достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для СНИ.-ДУ в ЧП с неодинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций.

Построены решения систем двух НИ.-ДУ в ЧП с неодинаковыми и одинаковым сомножителями.

Полученные результаты с использованием развитого метода дополнительного аргумента обобщены для многомерного случая.

Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами.

В диссертации получены новые результаты, которые вносят определенный вклад в теорию НИ.-ДУ в ЧП.

Построенные схемы применения метода дополнительного аргумента для решения СНИ.-ДУ в ЧП можно использовать при решении систем нелинейных уравнений других классов.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Аширбаевой Айжаркын Жоробековне за постановку проблемы исследования и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аширбаева А.Ж. Развитие метода дополнительного аргумента для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных: Автореф. дисс.канд. физ.–матем. наук. 01.01.02. [Текст] / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек, 1995. – 15 с.
2. Аширбаева А.Ж. Метод дополнительного аргумента в теории нелиней-ных дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка [Текст] / А.Ж. Аширбаева, М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1997. – Вып. 26. – С. 3–8.
3. Аширбаева А.Ж. Исследование решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка типа Уизема [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1999. –Вып.28. – С.159–165.
4. Аширбаева А.Ж. О существовании и единственности решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с (n+1) независимыми переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Вестник ОшГУ. Серия физико-математических наук. – 2001. – № 3. – С. 59-63.
5. Аширбаева А.Ж. Построение решений одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка с невырожденным ядром [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Вестник ОшГУ. Серия физико-математических наук. – 2001. – № 4. – С.68–72.
6. Аширбаева А.Ж. Исследование решений дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка с n+1 независимыми переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С. 85–89.
7. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро–

дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента: Автореф. дисс. … докт. физ.–матем. наук, 01.01.02 [Текст] / А.Ж. Аширбаева. – Бищкек, 2012. – 34 с.

8. Аширбаева А.Ж. Исследование решений интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ч.Б. Жолдошева // Вестник ОшГУ, Серия естественных и медицинских наук. – 2012. – № 2. – Вып. 1. – С. 150–153.
9. Аширбаева А.Ж. Исследование решений нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып.44. – С. 37–43.
10. Аширбаева А.Ж. Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Материаловедение. – Бишкек. – 2013. – № 2. – С. 258-261.
11. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого поря-дка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
12. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.
13. Аширбаева А.Ж. Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып. 46. – С. 37–40.

14. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.
15. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Я.В. Быков. – Фрунзе: КГУ, 1957. – 327 с.
16. Владимиров В.С. Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Владимиров. – Москва: Наука, 1988. – 512 с.
17. Габов С.А. О свойстве разрушения уединенных волн, описываемых уравнениями Уизема [Текст] / С.А. Габов // Докл. АН СССР. – 1979. –Т. 246, № 6. – С. 1292-1295.
18. Габов С.А. Об уравнении Уизема [Текст] / С.А. Габов //Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 242. – № 5. – С.993–996.
19. Джураев Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А.С. Сопуев. – Ташкент: ФАН, 2000. –144 с.
20. Иманалиев М.И. О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом [Текст] / М.И.Иманалиев, Ю.А. Ведь //Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 3. – С. 465–477.
21. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными [Текст] / М.И. Иманалиев. – Бишкек: Илим, 1992. –112 с.
22. Иманалиев М.И. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Имана-лиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 1992. –Т. 323. – № 3. – С. 410–414.
23. Иманалиев М.И. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады АН. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С.1111–1115.

24. Иманалиев М.И. К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 1993. –Т. 329. – № 5. – С. 543–546.
25. Иманалиев М.И. К теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега - де Фриза [Текст] / М.И. Иманалиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Доклады Российской АН. – 1995. – Т. 342. – № 1. – С.17–19.
26. Иманалиев М.И. Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных волновых уравнений в частных производных [Текст] / М.И. Иманалиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Доклады Российской АН. – 1995. – Т. 343. – № 5. – С. 596–598.
27. Иманалиев М.И. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 2001. –Т. 379. – № 1. – С.16–21.
28. Иманалиев М.И. К теории почти солитонных решений нелинейного дифференциального уравнения в частных производных типа Кортевега-де Фриза четвертого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, У.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С.17–23.
29. Иманалиев М.И. К теории почти солитонных решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, У.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып. 33. – С.17–23.
30. Иманалиев М.И. О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, К.Какишов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36.

– С.19–28.

31. Иманалиев Т.М. Интегро-дифференциальные уравнения с частными производными типа Вольтера первого порядка [Текст] / Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып. 23. – С.34–38.
32. Иманалиев Т.М. Об одном эффекте в теории интегро-дифференциаль-ных уравнений в частных производных [Текст] / Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып. 23. – С. 38–41.
33. Иманалиев Т.М. Нарушение единственности решений задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных [Текст] / Т.М. Иманалиев // Асимптотические методы теории сингулярно возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: тез.докл. всесоюз. конф. –Бишкек: Илим, 1991. – С. 51.
34. Иманалиев Т.М. Обоснование и развитие метода дополнительного аргумента для решения дифференциальных уравнений в частных производных: Автореф. дисс. … докт. физ.–матем. наук. 01.01.02. [Текст] / Т.М. Иманалиев. – Бишкек, 2000 – 25 с.
35. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка [Текст] / Э. Камке. – Москва: Наука, 1966. – 28с.
36. Колоджеро Ф. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений [Текст] / Ф. Колоджеро, А. Дегаперис. – Москва: Мир, 1985. – 469 с.
37. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального ана-лиза [Текст] /А.Н. Колмогоров, С.И. Фомин. – Москва: Наука, 1968. – 496 с.
38. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики [Текст] / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – Москва: Высшая школа, 1970. – 712 с.
39. Краснов М.Л. Интегральные уравнения [Текст] / М.Л. Краснов.

– Москва: Наука, 1975. – 303 с.

40. Курант Р. Уравнения с частными производными [Текст] / Р. Курант. – Москва: Мир, 1964. – 830 с.
41. Курант Р. Методы математической физики [Текст] / Р. Курант, Д. Гильберт. – Ленинград: ГИТТЛ, 1951. – Т. 2. – 544 с.
42. Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике [Текст] / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – Москва: Наука, 1980. – 688 с.
43. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения [Текст] / О.А. Ладыженская. – Москва: Гостехиздат, 1953. – 280 с.
44. Мамазиаева Э.А. Построение решений нелинейных интегро–дифференциальных уравнений второго порядка с частной производной под знаком интеграла [Текст] / Э.А. Мамазиаева// Исследования по инте-гро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. –Вып.47. –С.44-48.
45. Мамазиаева Э.А. Исследование решений нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными [Текст] / Э.А. Мамазияева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. –Вып.47. –С. 137–141.
46. Мамазиаева Э.А. Сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Известия ОшТУ. – Ош, 2015. – № 1. –С. 87–90.
47. Мамазиаева Э.А. Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – Ош, 2014. – № 3. –С. 27–32.
48. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник КРСУ. 2015. –Т.15 –№5. – С. 61–64.

49. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Наука и новые технологии. 2015. –№2. – С. 8–11.
50. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Естественные и математические науки в современном мире. 2016. –№42. – С.111–124.
51. Мамазиаева Э.А. Применение метода дополнительного аргумента для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными [Текст] / Э.А. Мамазияева // Проблемы современной науки и образования. 2016. –№8(50). –С.10–15.
52. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Проблемы современной науки и образования. 2016. –№14(56). –С.10–16.
53. Mamaziaeva E. Investigation of solutions of partial operator-differential equations of second order by the method of additional argument [Текст] / Ashirbaeva A., Mamaziaeva E. // Abstracts of the V Congress of Turkic world mathematicians, Bulan-Sogottu, Kyrgyzstan. 2014 / Ed. by Academician A. Borubaev. – P. 166.
54. Mamaziaeva E. Solving of non-linear partial differential equations of second order with many variables by means of the method of additional argument [Текст] / Mamaziaeva E., Ashirbaeva A. // Abstracts of the Issyk-Kul International Mathematical Forum, Bosteri, Kyrgyzstan. 2015 / Ed. by Academician A.Borubaev. – P. 50.

55. Мамбетов Ж.И. Решение системы интегро-дифференциальных уравнений методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. Специальный выпуск – Ош, 2013. – № 1. –С. 91–94.
56. Мамбетов Ж.И. Исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного ар-гумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Вестник ЖАГУ. – Жалал-Абад, 2016. – № 1(32). –С. 34–37.
57. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Естественные и математические науки в современном мире. Новосибирск, 2017. –№1(48). –С.111–124.
58. Мамбетов Ж.И. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Биш-кек, 2017. –№5. – С. 87–90.
59. Мамбетов Ж.И. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазиаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. –№5. – С. 81–86.
60. Мамбетов Ж.И. Построение решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром [Текст] / Ж.И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. – Ош, 2017. – № 4. –С. 113-116.
61. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими пере-

менными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Международный научно-исследовательский журнал. 2018. –№3(69). – С.6-10.

62. Мамбетов Ж.И. Применение метода дополнительного аргумента для системы интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Известия ОшТУ. – Ош, 2015. – № 1. –С. 103–105.
63. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с тремя перемен-ными [Текст] / Ж.И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. – Ош, 2018. – № 2. –С.55-60.
64. Mambetov Zh. Using the method of additional argument for system of integro-differential equations [Текст] / Ashirbaeva A., Mambetov J. // Abst-racts of the V Congress of Turkic world mathematicians, Bulan-Sogottu, Kyrgyzstan. 2014 / Ed. by Academician A. Borubaev. – P. 167.
65. Mambetov Zh. Using the method of additional argument for non-linear partial differential equations [Текст] / Mambetov Zh. // Abstracts of the V International Scientific Conference «Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics», Bishkek, 2016 / Ed. by Academician A. Borubaev. – P. 43.
66. МамбетовЖ.И. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных пер-вого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Abstracts of Third International Scientific Conference «Actual problems of the theory of control, topology and operator equations» Bishkek, Cholpon-Ata, 19-22 June, 2017 / Ed. by Academician A. Borubaev. – P. 61.
67. Mambetov Zh. Method of additional argument for system of non-linear partial differential equations of the first order [Текст] / Ashirbaeva A., Mambetov Zh. // Abstracts of VI Congress of the Turkic World Mathematical Society, October 2‒5, 2017 Astana, Kazakhstan/ Ed. by Acad. B.T. Zhumagulov. – P. 37.
68. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // II Борубаевские чтения, г. Бишкек, 1 марта 2018 года. Тезисы докладов. – С. 18.

69. Панков П.С. Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / П.С. Панков, Т.М. Иманалиев, Г.М. Кененбаева // Юбилейная науч. конф., посвященная 50-летию развития математики в Академии наук Казахстана: Тез. докл. – Алматы, 1995. – С. 164.
70. Панков П.С. Численное решение задачи о движении волн Римана на основе метода дополнительного аргумента [Текст] / П.С. Панков, О.Д. Будникова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С.35–38.
71. Панков П.С. Квазикоммутативность дифференциальных операторов и ее приложение к обоснованию метода дополнительного аргумента [Текст] / П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1999. – Вып. 28. – С. 30–34.
72. Садыкова Г. К. Развитие метода дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова // Международный научно-исследовательский журнал. – Екатеринбург,2019. – №4-1(82). – С.6-10.
73. Sadykova G . Development of the method of additional argument for a system of non-linear partial differential equations [Текст] /A. Ashirbaeva, G. Sadykova // Abstracts of International Scientific Conference "III Borubaev's Readings" , Bishkek, May 24, 2019. / Ed. by Academician A.Borubaev. – P.21.
74. Садыкова Г. К. Развитие метода допольнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - Бишкек, 2019. – №12. – С.35-39.
75. Садыкова Г. К. Исследование решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

[Текст] / Г.К. Садыкова // Известия ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2019. – №11. – С.15-19.

76. Sadykova G. Solution of a system of first-order nonlinear partial differential equations with n+1 independent variables [Текст] / A.Ashirbaeva, G.Sadykova //Theses of International Scientific Conference “Problems of modern mathematics and its applications”. June 16 -19, 2021, Issyk-Kul, Bishkek, Kyrgyzstan /Ed. by Academician A. Borubaev. – P.89.
77. Садыкова Г. К. Построение решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. [Текст] / Г.К.Садыкова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2021. – №7. – С.10-13.
78. Садыкова Г. К. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с n+1 независимыми переменными. [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова // Евразийское научное объединение. – Москва, 2021. – № 8–1(78). – С.6–8.
79. Садыкова Г. К. Решение системы операторных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова // Евразийское научное объединение. – Москва, 2021.– № 11–1 (81). –С.1–5.
80. Садыкова Г.К. Үч көз карандысыз өзгөрүлмөлүү жекече туундулуу сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелердин системасын чыгаруу [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова // Вестник Ошского государственного университета. – Ош, 2022. – №1. – С.103–111.
81. Sadykova G. Solving of system partial operator equations of the first order by the method of additional argument. [Текст] / A. Ashirbaeva, G. Sadykova // Abstract book of the conference ICAAM 2022. October 31-November 6, 2022, Antalya, Turkey / Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics. –P.102.
82. Соболев С.Л. Уравнения математической физики [Текст] / С.Л. Соболев. – Москва: Наука, 1966. – 443 с.

83. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 736 с.
84. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных [Текст] / Ф.Трикоми. – Москва: ИЛ, 1957. – 444 с.
85. Уизем Дж.Б. Линейные и нелинейные волны [Текст] / Дж.Б. Уизем. – Москва: Мир, 1977. – 622 с.
86. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров [Текст] / С. Фарлоу. –Москва: Мир, 1985. – 384 с.