УДК 517.968.74
DOI 10.58649/1694-8033-2025-1(121)-290-294

ЖАПАРОВА З.А., БЕКЕШОВА А. А., ЧОРОБЕК У. Т.
Ж. Баласагын атындагы КУУ
ЖАПАРОВА З.А., БЕКЕШОВА А.А., ЧОРОБЕК У. Т.
КНУ имени Ж. Баласагына
JAPAROVA Z.A., BEKESHOVA A.A., CHOROBEK U. T.
KNU named after J. Balasagyn

МОНОТОНДУУ ЧЕКТЕЛГЕН КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ БИР ТЕКТҮҮ ВОЛЬТЕРРА ТИБИНДЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН СПЕЦИФИКАЛЫК ЭМЕС АСИМПТОТИКАЛЫК ТУРУМДУУЛУГУ

НЕСПЕЦИФИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МОНОТОННЫМИ ОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

NON-SPECIFIC ASYMPTOTIC STABILITY OF SOLUTIONS OF A LINEAR HOMOGENEOUS VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH MONOTONE BOUNDED COEFFICIENTS

Кыскача мүнөздөмө: В. Вольтерра тибиндеги теңдемелерди өзгөртүп түзүү ыкмасын, А.Крупниктин методу менен, Ю.А.Вед менен З.Пахыровдун интегралдык барабарсыздык леммасын жана Люстерник-Соболев леммасын колдонуу менен жарым октогу монотондуу коэффициенттүү Вольтерра тибиндеги экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү интегро-дифференциалдык теңдеменин чыгарылыштарынын асимптотикалык турумдуулугунун жетиштүү шарттары түзүлөт. Иллюстративдик мисалдар келтирилген.

Аннотация: В статье получило развитие преобразование уравнений В. Вольтерра с помощью метода А Круупника, применения леммы об интегральном неравенстве Ю.А. Ведя и З. Пахырова и леммы Люстерника-Соболева. Устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного однородного интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа Вольтерра с монотонными коэффициентами на полуоси. Приводится иллюстративный пример.

Abstract: By developing the method of transforming V. Volterra equations, by using A. Kruupnik's method, by applying the lemma on the integral inequality of Yu. A. Ved' and Z. Pakhyrov, and the Lyusternik-Sobolev lemma, sufficient conditions for the asymptotic stability of solutions of a linear homogeneous integro-differential equation of the second order of the Volterra type with monotone coefficients on the semiaxis are established. An illustrative example is given.

Негизги сөздөр: интегро-дифференциалдык теңдеме; теңдемелерди өзгөртүп түзүү; коэффициенттердин монотондуулугу; коэффициенттердин чектелиши; асимптотикалык турумдуулук.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; преобразование уравнений; монотонность коэффициентов; ограниченность коэффициентов; асимптотическая устойчивость.

Keywords: Integro-differential equation; transformation of equations; monotonicity of coefficients; boundedness of coefficients; asymptotic stability.

В конце XIX – начале XX века во многом благодаря великому италянскому математику В. Вольтерру появились работы, в которых изучены общие и качественные свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений, содержащие интегралы с переменными верхними пределами интегрирования. Впоследствии эти уравнения получили названия: “Интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра”, “Интегральные уравнения типа Вольтерра” в знак признания заслуг В.Вольтерра. В этих работах заложены основы общей и качественной теории интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. Отметим, что многие исследования В. Вольтерра проведены в связи с изучением биологических и механических процессов с учетом их предыстории и оказали благотворное влияние на формирование современной общей и качественной теории уравнений типа Вольтерра. Исследования показали, что уравнения типа Вольтерра являются наиболее удобными математическими моделями для описания и изучения многих процессов с учетом их предыстории. Поэтому появилась необходимость всестороннего изучения свойств решений уравнений типа Вольтерра.

«Под специфическим признаком для решений интегро-дифференциальных уравнений имеется в виду такой признак, утверждение которого не имеет места для решений соответствующего дифференциального уравнения. Таким образом, специфические признаки – это такие теоремы и следствия, утверждения которых верны только при наличии интегральных возмущений (членов)». Следовательно, специфический признак – это особый критический случай влияния интегральных возмущений.

Все фигурирующие функции являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0, t \geq \tau \geq t_0; I = [t_0, \infty)$; ИДУ-интегро-дифференциальное уравнение, ДУ-дифференциальное уравнение; под асимптотической устойчивостью решений линейного однородного ИДУ типа Вольтерра понимается стремление к нулю при $t \to \infty$ всех его решений и их первых производных; асимптотическая устойчивость называется неспецифической для ИДУ второго порядка, если асимптотическая устойчивость сохраняется для решений соответствующего ДУ второго порядка.

Задача 1. Установить достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного однородного ИДУ второго порядка вида:

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)d\tau = 0, t \geq t_0 \qquad (1)$$

в случае, когда асимптотическая устойчивость соответствующего ДУ второго порядка:

$$x''(t\,) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0, t \geq t_0. \qquad (2)$$

Для решения этой задачи развивается метод преобразования уравнений В. Вольтерра $[1, \text{с}. 194 - 217]$, а именно этот метод развивается в статье А. Круупника [2], в результате устанавливаются достаточные условия для $x^{(k)}(t) \in L^2(I)$ $(k = 0,1)$, затем в силу монотонности и ограниченности на I коэффициентов $a_0(t), a_1(t)$ и при дополнительном условии на ядро $K(t,\tau)$, получается, что $x''(t) \in L^2(I)$. Следовательно, в силу леммы Люстерника-Соболева $[3, \text{с}. 393 - 394; 4]$ обеспечивается утверждение: $\lim_{t\to\infty} x^{(k)}(t) = 0$ $(k = 0,1)$, что равносильно асимптотической устойчивости решений ИДУ (1). В этом состоит методика решения поставленной задачи.

Приступаем к получению основного результата работы.

Для любого решения, $x(t) \in C^2(I)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k = 0,1)$, ИДУ (1) умножаем на $x'(t)$, проведем интегрирование в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, аналогично как в $[5, \text{с}. 83 - 85]$. Тогда получаем тождество:

$$(x'(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t} a_1(s)(x'(s))^2 ds + a_0(t)\big(x(t)\big)^2 - \int_{t_0}^{t} a_0'(s)\big(x(s)\big)^2 ds + \qquad (3)$$

$$+2\int_{t_0}^{t} x'(s)\left[\int_{t_0}^{s} K(s,\tau)x(\tau)d\tau\right]ds \equiv c_*,$$

где $c_* = (x'(t_0))^2 + a_0(t_0)\big(x(t_0)\big)^2$.

Переходя от тождества (3) к интегральному неравенству, применяя лемму 1 Ю.А. Ведя и З. Пахырова [6], доказываем следующее.

Теорема 1. Пусть 1) $a_1(t) \geq a_{10} > 0, a_0(t) \geq a_{00} > 0, a_0'(t) \leq 0$;

$$2)\ A = \int_{t_0}^{\infty}\left[\int_{t_0}^{s}|K(s;\tau)|d\tau\right]ds < \infty.$$

Тогда для любого решения $x(t)$ имеем следующие утверждения:

$$x^{(k)}(t) = O(1)\ \ (k = 0{,}1), \tag{4}$$

где $O(1)$ − символ Э. Ландау, означающий $|O(1)| \leq M < \infty$ $(M = const > 0)$,

$$x'(t) \in L^2(I). \tag{5}$$

Далее, следуя [2], для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) умножаем на $x(t)$, затем интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям,

$$\int_{t_0}^{t} x(s)x''(s)ds = \left|\begin{matrix} u = x(s) => du = x'(s)ds, \\ dv = x''(s)ds => v = x'(t) - x'(t_0)\end{matrix}\right| = x(t)x'(t) -$$

$$-x(t_0)x'(t_0) - \int_{t_0}^{t}\big(x'(s)\big)^2 ds,$$

и будем иметь следующее тождество:

$$x(t)x'(t) - \int_{t_0}^{t}\big(x'(s)\big)^2 ds + a_1(t)\big(x(t)\big)^2 - \int_{t_0}^{t} a_1'(s)\big(x(s)\big)^2 ds +$$

$$+2\int_{t_0}^{t} a_0(s)\big(x(s)\big)^2 ds + 2\int_{t_0}^{t} x(s)\left[\int_{t_0}^{s} K(s,\tau)x(\tau)d\tau\right]ds \equiv c_{**}, \tag{6}$$

где $c_{**} = x(t_0)x'(t_0) + a_1(t_0)\big(x(t_0)\big)^2$.

Из тождества (6) непосредственно вытекает

Теорема 2. Пусть: 1) выполняются все условия теоремы 1; 2) $a_1'(t) \leq 0$. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) справедливо утверждение

$$x(t) \in L^2(I). \tag{7}$$

При доказательстве этой теоремы следует учесть, что $x^{(k)}(t) = O(1)\ \ (k = 0{,}1), x(t)x'(t) = O(1);\ A < \infty$.

Из теорем 1, 2 вытекает, что $a_k(t) = O(1)\ \ (k = 0, 1)$, а также в силу неравенства Коши-Буняковского верно соотношение:

$$\left(\int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)^2 \leq \left(\int_{t_0}^{t} K^2(t,\tau)d\tau\right)\left(\int_{t_0}^{t} x^2(\tau)d\tau\right). \tag{8}$$

Тогда, возведя в квадрат обе части ИДУ, записанное в виде:

$$x''(t) = -a_1(t)x'(t) - a_0(t)x(t) - \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

после чего интегрируя в пределах от t_0 до t, получаем:

$$\int_{t_0}^{t}(x''(s))^2 ds = \int_{t_0}^{t}[a_1(s)x'(s) + a_0(s)x(s) + \int_{t_0}^{s} K(s,\tau)\,x(\tau)d\tau]^2 ds. \tag{9}$$

Отсюда, оценивая на основании неравенства

$(u_1 + u_2 + u_3)^3 \leq 3(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$ для $\forall u_k$ $(k = 1{,}2{,}3)$ и неравенства Коши-Буняковского, имеем

$$\int_{t_0}^{t}(x''(s))^2 ds \leq 3\int_{t_0}^{t}\left[a_1^2(s)(x'(s))^2 + a_0^2(x(s))^2 + \left(\int_{t_0}^{s} K(s,\tau)\,x(\tau)dx\right)^2\right]ds \leq$$

$$\leq 3\int_{t_0}^{t}\left[\alpha_1^2(s)\big(x'(s)\big)^2 + a_0^2\big(x(s)\big)^2 + \left(\int_{t_0}^{s} K^2(s,\tau)\right)\left(\int_{t_0}^{s} x^2(\tau)d\tau\right)\right]ds. \tag{10}$$

Из этого неравенства справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть: 1) выполняются все условия теоремы 2;
2) $B = \int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s} K^2(s,\tau)d\tau ds < \infty$.
Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) справедливы утверждения:

$$x^{(k)}(t) \in L^2(I)\ (k = 0,1,2), \tag{11}$$

то есть

$$\lim_{t\to\infty} x^{(k)}(t) = 0, (k = 0,1), \tag{12}$$

что равносильно асимптотической устойчивости любого решения ИДУ (1).

Для доказательства этой теоремы применяется

Лемма Люстерника-Соболева $[3, \text{с.}\, 393 - 394;\ 4]$. Если
$x^{(k)}(t) \in L^2(I)\ (k = 0,1), \text{то}$
$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$

Насколько нам известно, результаты теоремы 3 являются новыми.

Из теоремы 3 можно получить следующий результат для ДУ (2).

Теорема 4. Пусть $a_k(t) \geq a_{k0} > 0, a_k'(t) \leq 0\ (k = 0,1)$. Тогда для любого решения $x(t) \in C^2(I)$ справедливы утверждения:

$$x^{(k)}(t) \in L^2(I)\ (k = 0,1,2),$$

т.е.

$$\lim_{t\to\infty} x^{(k)}(t) = 0\ (k = 0,1),$$

т.е. любое решение ДУ (2) асимптотически устойчиво.

Значит, асмиптотическая устойчивость любого решения ИДУ (1) неспецифическая.

Пример: Для ИДУ второго порядка:

$$x''(t) + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)x'(t) + \left(3 + \frac{1}{t+2}\right)x(t) - \int_0^t \frac{5\sin(t\tau - 9)}{(t + 4t + 7)^3}x(\tau)d\tau = 0,$$

$t \geq 0$ выполняются все условия теорем 1, 2, 3 и для соответствующего ДУ второго порядка:

$$x''(t) + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)x'(t) + \left(3 + \frac{1}{t+2}\right)x(t) = 0, t \geq 0$$

выполняются все условия теоремы 4.

Следовательно, мы нашли класс ИДУ вида (1), для которого задача 1 решаема.

Список использованной литературы

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с. фр. / Под ред. Ю.М. Свирежева. – Москва: Наука, 1976, 288 с.
2. Kroopnick A. L^2–solutions to $y'' + c(t)y' + a(t)b(y) = 0$// Proc. Amer. Math. Soc., 1973, vol. 39, No. 1, pp. 217-218.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – Москва: Наука, 1965, 520 с.
4. Искандаров С. Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012, вып. 44, с. 44-51.
5. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002, 216 с.

6. Ведь Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973.

Рецензент: д.м.-м.н., профессор Бараталиев К.Б.