ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.928.2

Омаралиева Гулбайра Абдималиковна

Асимптотика решения трех зонных бисингулярных задач

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Турсунов Д.А.

Ош - 2023 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

- Трех зонные бисингулярные задачи первого (второго) порядка – трехзонные бисингулярные задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого (второго) порядка.
- ФАРР – формальное асимптотическое разложение решения.
- Промежуточный пограничный слой – не экспоненциально убывающий пограничный слой между экспоненциально убывающим пограничным слоем и внешним решением.
- Зона – область пригодности асимптотического разложения.
- Бисингулярность – двойная сингулярность (особенность).
- **N**, **Z**, **R** – множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно, $\mathbf{N_0}=\mathbf{N}\cup\{0\}$.
- $\forall$ – квантор общности.
- $\exists$ – квантор существования.
- $\in$ – «принадлежность».
- ~ – «эквивалентность».
- $\Rightarrow$ – «следует».
- $C^{\infty}(D)$ – множество бесконечно дифференцируемых и ограниченных вместе с производными функций в области D.
- $0<\varepsilon$ – малый параметр, λ, μ – такие же параметры, связанные с ε.
- $\|\bullet\|$ – Чебышевская норма; для непрерывных функций будем подразумевать максимум модуля функции (существует в ограниченных замкнутых областях).
- O, o – символы порядка (Ландау).

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. В конце XIX столетия наука о движении жидкости распалась на два ветви, почти не связанные между собой: теоретическая гидродинамика, исходившая из уравнений, составленных Эйлером для движения жидкости без трения и экспериментальная гидродинамика, которая опиралась на большое число экспериментальных результатов и очень сильно отличалась от теоретической гидродинамики как своими методами, так и своей целью [65].

Во многих ранее исследованных задачах теории сингулярных возмущений, например, в работах А.Н. Тихонова (1952), А. Найфе (1984), С.А. Ломова (1984), А.Б. Васильевой (1985), В.Ф. Бутузова (2010), Н.Н. Нефедова (2022), М. Иманалиева (1988), А.М. Ильина (1989), К. Алымкулова (1992), А.С. Омуралиева (2009), К.С. Алыбаева (2001) и др. в области пограничного слоя существовал только один характерный предел. В данной диссертации впервые исследованы случаи, когда в пограничном слое имеются два характерных пределов. Поэтому результирующее разложение, кроме внешнего, включает в себя два внутренних разложения. Области пригодности каждого их этих разложений обычно называют зонами, а сама задача именуется в этом случае трех зонной задачей [37].

Диссертационная работа посвящена построению полных, равномерных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач – сингулярно возмущенные задачи с особой точкой и дополнительным (промежуточным) пограничным слоем. Полные, равномерные асимптотические разложения решений задач Коши и Дирихле строятся обобщенным методом пограничных функций, так как невозможно напрямую применять классический метод пограничных функций А.Б. Васильевой [22].

Задачи, исследованные автором, ранее не изучались.

Связь темы диссертации с приоритетными научными направлениями, крупными научными программами (проектами), основными научно-

исследовательскими работами, проводимыми образовательными учреждениями. Работа выполнялась в рамках научного проекта по Институту фундаментальных и прикладных исследований при ОшГУ по теме: «Задачи фазовых переходов и критические явления. Математические аспекты их уравнений, быстрые переходы и асимптотики», 2019 г.

Цель и задачи исследования:

Целю исследования является построение асимптотики решения трех зонных бисингулярных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Задачи исследования:

- найти достаточное и необходимое условия существования промежуточного пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

- построить полные равномерные асимптотические разложения решений начальной и краевой трех зонных задач, а также обосновать полученные разложения.

Научная новизна работы:

1) Впервые найдены достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Коши для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

2) Впервые построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений трех зонных задач Коши для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

3) Впервые найдены достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Дирихле для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

4) Впервые построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений трех зонных задач Дирихле для линейных неодно-

родных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Практическая значимость полученных результатов. Задачи, рассмотренные в диссертационной работе, представляют теоретический и практический интерес так как по многочисленности и разнообразию приложений трех зонная задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и трех зонная задача Дирихле для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка занимает особое место в математике.

Построение асимптотических приближений решений подобных задач с любой степенью точности по степеням малого параметра весьма важна для решения практических задач теории пограничного слоя.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Коши для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;

- построение равномерных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач Коши для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;

- обоснование построенных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач Коши для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;

- достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Дирихле для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка;

- построение равномерных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач Дирихле для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка;

- обоснование построенных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач Дирихле для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка;

Личный вклад соискателя. Все научные результаты, представленные в диссертации, принадлежат только автору, а постановка задачи принадлежит научному руководителю. В совместных работах [46], [47] и [76] научные результаты и доказательства теорем осуществлено соискателем – Омаралиевой Г.А., а в обсуждении результатов и в оформлении статьей участвовали К.Г. Кожобеков, М.И. Маматбуваева, Ш.А. Раманкулова и Муса уулу Н.Э.

Апробации результатов исследования. Результаты работы докладывались и обсуждались на международных научных конференциях:

- «Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8» посвященная 80-летию А. Самойленко. – Чолпон-Ата, 2018 г.;

- «Проблемы современной математики и ее приложения», посвященная 70-летию академика А.А. Борубаева. – Бишкек: Институт математики НАН КР, 16-19 июня 2021 г.;

- "Актуальные проблемы теорий оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений" 50-летию научно-педагогической деятельности и 75-летнему юбилею профессору А.К. Керимбекова. – Бишкек: КРСУ, 23-25 июня 2022 г.

Кроме этого результаты обсуждались на научных семинарах “Актуальные проблемы дифференциальных уравнений”, руководители семинара: член корр. НАН КР, профессора К. Алымкулов и д.ф.-м.н., профессор К.С. Алыбаев (г. Ош. 2018-2023 гг), также на международном семинаре “Современные проблемы математической физики”, руководитель семинара академик Ш.А. Алимов (Институт математики имени В. И. Романовского АНРУз).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. По теме диссертации опубликованы 7 статей [44]-[49] [76] и 2 тезиса [77], [78]. Из них две статьи [44], [76] опубликованы в научных рецензируемых, периодических математических журналах, цитируемых в базах Scopus и Web of Science. Одна статья [45] в научном рецензируемом, периодическом математическом журнале, цитируемой в базе RSCI. Все статьи опубликованы в журналах с ненулевым импакт-фактором. Импакт факторы журналов больше 0,1, где опубликованы статьи [44], [45], [49], [76]. По опубликованным статьям набрано 215 баллов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, четырех глав, разбитых на 10 параграфов, заключения и списка использованных источников из 81 наименований. В конце каждой главы приведены заключения. Работа изложена на 101 страницах машинописного текста. В конце каждой главы приведены заключения. Нумерация параграфов, теорем, лемм, определений, замечаний и примеров - двойная: первая цифра указывает номер главы, вторая ее порядковый номер. Нумерация формул - тройная: первая цифра указывает номер главы, вторая – номер параграфа, третий ее порядковый номер.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность научному руководителю, д. физ.-мат. наук, профессору Турсунову Д.А. за постановку задачи, постоянное внимание к работе и полезные советы при обсуждении работы.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

§ 1.1. Обзор литературы по сингулярно возмущенным задачам

В начале XX века Л. Прандтль [79] нашел путь, позволивший вновь соединить в одно целое указанные выше далеко отошедшие друг от друга ветви науки о движении жидкости. Он положил начало направлению, дальнейшее развитие которого в современной гидродинамике привело к неожиданным успехам.

Л. Прандтль показал, что течение в окрестности тела можно разделить на две области: на область очень тонкого слоя вблизи тела (пограничный слой), где трение играет существенную роль, и на область вне этого слоя, где трением можно пренебрегать. Эта гипотеза, с одной стороны, позволила получить физически очень наглядное объяснение важной роли вязкости в проблеме сопротивления, а с другой стороны, дала возможность преодолеть математические трудности и тем самым открыла путь теоретическому исследованию течений жидкости с трением [65].

Дифференциальные уравнения с малым параметром условно делят на два класса: регулярно и сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения. Теорию регулярно возмущенных дифференциальных уравнений можно сказать хорошо изученной и завершенной. А теория сингулярных возмущений бурно развивается, так как появляются новые и новые явления.

Как нам известно, математическими моделями многих задач науки и техники являются обыкновенные дифференциальные уравнения с малыми параметрами при старшей производной [30], [34]-[37]. Например, движение вязкого потока, явления в социально-экономической модели транснациональной корпорации, поведение тонких и гибких пластин и оболочек, процесс обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа. А также тесно связанные между собой два процесса можно описать с помощью обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\varepsilon y''_{\varepsilon}(x) + p(x)y'_{\varepsilon}(x) + q(x)y_{\varepsilon}(x) = f(x), \ x \in (0,1).$$

Первый процесс – распределение тепла в движущейся среде, зависящее только от x и не зависящее от времени. Здесь ε описывает малую теплопроводность, а функция $p(x)$ – скорость среды. Второй процесс – случайное блуждание частицы на рассматриваемом промежутке, здесь $p(x)$ – средняя скорость движения, малая дисперсия обозначена через ε [28].

Проведенные исследования и увеличение числа публикаций по теории возмущений доказывают, что дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной или сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения составляют самостоятельную область математики, так как они представляют большой прикладной интерес.

Сингулярно возмущенные задачи возникают естественным образом там, где имеются неравномерные переходы от одних физических характеристик к другим. Известно, например, что в задачах, связанных с решением уравнений Навье-Стокса при малой вязкости, эти неравномерности создают зону пограничного слоя. Без тщательного асимптотического анализа трудно создать математическую теорию пограничного слоя или вести численный счет сингулярно возмущенных задач. Многие задачи теории нелинейных колебаний, теории автоматического регулирования, теории гироскопов описываются с помощью дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старших производных. Поэтому теория асимптотического анализа имеет большое значение как для развития фундаментальных исследований, так и для решения конкретных задач практики [36].

Впервые в работах А.Н. Тихонова был установлен критерий, при выполнении которого решение исходной задачи стремится к решению соответствующей вырожденной задачи, при стремлении малого параметра к нулю. Эти работы положили начало большому самостоятельному направлению современной математики [55], [56].

В 70-х годах прошлого столетия Л.С. Понтрягиным было обнаружено явление затягивания, т.е. явление задержки ухода траекторий от положения равновесия системы быстрых движений, ставшего неустойчивым в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Суть этого явления заключается в том, что в динамических системах траектория после прохождения границы устойчивости может находиться длительное время вблизи уже неустойчивой части медленной поверхности и лишь затем претерпевать срыв и переключаться на быстрое движение. Это явление был исследовано в работе М.А. Шишковой, проведенной под руководством Л.С. Понтрягина.

Докторская диссертация К.С. Алыбаева [2] посвящена разработке метода линии уровня, когда точка покоя присоединенной системы на некотором отрезке действительной оси теряет устойчивость. К.С. Алыбаев разработал общий метод линий уровня для исследования сингулярно возмущенных задач при нарушении условия асимптотической устойчивости. Исследованы задачи

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = A(t)z(t,\varepsilon) + \varepsilon\varphi(t) + \varepsilon f(t,z(t,\varepsilon)),\ t \in [t_0,T].$$

$$\|z(t_0,\varepsilon)\| = O(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0$$

где z=colon(z_1, z_2,…,z_n), $\|f(t,z)\|$=)($\|z\|$), $\varphi(t)$, $f(t,z)$ − аналитические функции по своим переменным.

Матрица-функция $A(t)=d\mathrm{iag}[\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \ldots,\ \lambda_n(t)]$, причем $\lambda_j(t) \neq \lambda_k(t)$ при $j \neq k$ и среди этих собственных значений имеется одна пара комплексно-сопряженных, которые меняют знаки действительных частей на отрезке $[t_0, T]$.

Для исследования поставленной задачи применен топологический подход. Введено понятие - размеченное множество - это такое множество (в R^2 или С), что оно полностью заполняется некоторыми ориентированными кривыми типа Жордана [2].

В кандидатской диссертации Д.А. Турсунова, доказано, что для некоторых классов сингулярно возмущенных задач тихоновского типа промежуток затягивания потери устойчивости может быть и бесконечным.

§ 1.2. Обзор литературы по бисингулярным задачам

Одному известному физику приписывается фраза: «Явление не является физическим, если в нем отсутствует малый параметр» [28].

А.М. Ильин в 1989 году ввел термин «Бисингулярные задачи» [29]. Бисингулярными задачами он назвал такие сингулярно возмущенные задачи, в которых соответствующая «вырожденная» задача сама обладает той или иной «сингулярностью».

Впервые краевая задача для бисингулярно возмущенных однородных ОДУ второго порядка со слабой особой точкой для невозмущенного уравнения рассмотрена Ж. Коулом [32]. Джулиан Д. Коул в 1968 г. своей монографии [32], методом сращивания исследовал задачу

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}+\sqrt{x}\frac{dy}{dx}-y=0, 0\le x\le 1, \tag{1}$$

$$y(0)=0, y(1)=e^2, \tag{2}$$

При изучении следующей краевой задачи выявлен факт, названный резонансом Акерберга и О'Маллея [68]:

$$\varepsilon y''+xa(x,\varepsilon)y'+b(x,\varepsilon)y=0, \qquad x\in[-1,1], \quad y(-1)=y^{(-1)},\ y(1)=y^{(1)},$$

где $a(x,\varepsilon)$, $b(x,\varepsilon)$ – бесконечно дифференцируемые функции по обоим аргументам при $x\in[-1,1]$ и $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0<<1$, $a(0,0)\neq 0$, $y^{(-1)}$, $y^{(1)}$ – заданные постоянные.

Если число $b(0,0)/a(0,0)$ не является отрицательным целым числом, невозмущенное уравнение имеет только тривиальное решение.

Случай, когда это число является отрицательным целым числом, то невозмущенная задача имеет нетривиальное решение и этот случай называется резонансным. Аналогичное явление изучено также Б.Ж. Матковским (B.J. Matkowsky), В.Ф. Олвером и др.

К.В. Емельяновым [26] рассмотрен нерезонансный случай для неоднородного уравнения

$$\varepsilon u''+xa(x)u'-b(x)u=f(x), \quad x\in[-1,1], \quad u(-1)=u(1)=0,$$

где $a(x)>0$, $b(x)>0$ на отрезке $[-1,1]$ и $a(x)$, $b(x)\in C^{(\infty)}[-1,1]$ рассмотрен и построено решение этой задачи методом сращивания Ван-Дайка.

К.В. Емельяновым также построена асимптотика решения бисингулярно возмущенного уравнения в случае, когда невозмущенное уравнение имеет иррегулярную особую точку в начале координат, т.е.

$$\varepsilon u''+x^2a(x)u'-b(x)u=f(x), \qquad x\in[-1,1], \quad u(-1)=u(1)=0.$$

А.М. Ильиным [29] с помощью метода сращивания рассмотрены следующие краевые задачи:

1) $\varepsilon^3 u''-q(x)u=f(x)$, $u(0)=u(1)=0$, $q(x), f(x)\in C^\infty[0,1]$, $q(0)=0$, $q(x)>0$, $x>0$.

2) $\varepsilon^2 u''-xa(x)u'-q(x)u=f(x)$, $u(0)=u(1)=0$, $a(x)$, $q(x)$, $f(x)\in C^\infty[0,1]$, $a(x)>0$, $q(x)>0$ при $x\in[0,1]$.

В работах А.М. Ильина [29], А.Р. Данилина [28], [23], [24] методом сращивания исследованы различные классы бисингулярных задач, тоже с гладким коэффициентом.

В работах С.А. Ломова [36], В.Н. Бобочко [9], [10] методом регуляризации С.А. Ломова построены асимптотические разложения решений бисингулярно возмущенных задач с гладкими коэффициентами.

В.Ф. Бутузов и их ученики исследовали сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения, такие как: частично диссипативные системы уравнений, с кратным корнем вырожденного уравнения, с многозонными пограничными слоями, контрастные структуры с многозонным внутренним слоем [11]-[22].

В работах Н.Х. Розова, В.Г. Сушко [51]-[54] построены асимптотические разложения погранслойного типа решений бисингулярных краевых задач, связанных с линейными и квазилинейными дифференциальными уравнениями, при наличии особенностей у решений соответствующего вырожденного уравнения, разрывных, резко меняющихся или вырождающихся коэффициентов либо в случаях смены типа уравнения, получение оценок погрешности асимптотических разложений в нормах естественных для решений исходной задачи пространств функций. Исследован внутренний слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

В работе [54] исследованы линейные

$$\varepsilon\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+h(t,x)=0, -1\le t\le 1, \text{ где } p(0)=0, p(t)\ne 0, t\in[-1,1]\backslash\{0\}$$

и нелинейные уравнения:

$$\varepsilon^2\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y),\ 0<x<1,\ y(0)=A_0,\ y(1)=A_1$$

в предположении, что нелинейная часть – разрывная функция:

$$f(x,y)=\begin{cases} g(x,y), если\ y<0,\\ h(x,y), если\ y\ge 0.\end{cases}$$

Задачи подобного типа возникают, например, при описании свободного падения тела с высоты в нескольких десятков километров [34]

В работе Н. Х. Розова, В. Г. Сушко, Д.И. Чудовой [51] доказаны теоремы о существовании и единственности решений краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной.

Усков, В.И. в работах [61], [62] построил асимптотику решения уравнения первого порядка с малым параметром при производной с квадратичным возмущением в правой части, а также получил асимптотическое решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве.

В работе Абдувалиева А.О. [1] исследованы сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения второго порядка с обращающимся в ноль коэффициентом при старшей производной, предложены методы построения асимптотики произвольного порядка в случаях, когда особенности задачи не позволяют применить классические методы.

К. Алымкулов, Т. Д. Асылбеков, С.Ф. Долбеева, обобщенным методом погранфункций построили равномерное асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенных ОДУ второго порядка. К. Алымкулов, А. Халматов

[3] применили обобщенный метод погранфункций для уравнения ОДУ типа Лайтхилла первого порядка. К. Алымкулов, Ж. Жээнтаева [6] применили метод структурного сращивания для уравнения ОДУ типа Лайтхилла первого порядка. К. Алымкулов, А. Зулпукаров [7], используя метод структурного сращивания, построили равномерное асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенных ОДУ второго порядка. Б.А. Азимов под руководством К. Алымкулова [8] построил асимптотики решения бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений со слабой особой точкой.

К.Г. Кожобеков [31] методами униформизации и преобразований построил асимптотику решения модельного уравнения Рейсса и определил точку, в которой начинается скачок; новым подходом построил асимптотику решения химической реакции со стационарной достижимостью (со скачком). Модифицированным методом погранфункций построил асимптотические разложения решений краевых задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет иррегулярную особую точку, с точкой поворота.

Далее Д.А. Турсунов, развивая идею метода обобщенных пограничных функций, исследовал бисингулярные обыкновенные дифференциальные уравнения в комплексной плоскости при нарушении условия асимптотической устойчивости, а также бисингулярные эллиптические дифференциальные уравнения [4], [5], [57]-[60], [81].

У.З. Эркебаевым [66] обобщенным методом погранфункций построены полные асимптотические разложения решений бисингулярной задачи Дирихле для кольца, когда особенность появляется на границе, одновременно на обеих границах, внутри, одновременно на обеих границах и внутри кольца.

М.О. Орозов [50] обобщенным методом пограничных функций построены полные асимптотические разложения решений линейных бисингулярных задач Дирихле, Неймана и Робена для кольца, когда соответствующая вырожденная задача имеет регулярную окружность.

Во всех выше перечисленных работах по бисингулярным задачам в окрестности особых множеств существует только один пограничный слой.

Трех зонная задача появилась впервые в монографии А. Найфе [37]. Рассмотрена задача

$$\varepsilon^3 y''+x^3 y'+(x^3-\varepsilon)y=0,\ x\in[0,1],\ y(0)=\alpha,\quad y(1)=\beta.$$

Доказана, что существуют два характерных предела, но построена асимптотика решения только нулевого порядка и это без обоснования.

В работе А.М. Ильина [29, стр. 64] методом согласования исследована нелинейная задача, в котором продемонстрировано интересное явление промежуточного пограничного слоя:

$$\varepsilon u'(x)=f(x,\ u),\ x\in[0,d],\qquad u(0,\ \varepsilon)=R_0,\ \ 0<R_0=\mathrm{const},$$

где $f(x,\ u)$ – бесконечно дифференцируемая функция для $x\in[0,d]$ и всех значений u и такая, что

$$f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=0,\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)=-2,$$

$$f(x,0)>0 \text{ при } x>0;\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,u)<const<0 \text{ при } 0\le x\le d,\ 0\le u.$$

В работах [59] и [81] научного руководителя Д.А. Турсунова исследованы две задачи с промежуточным пограничным слоем: 1) задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, т.е. задача А.Х. Найфе; 2) задача Дирихле для кольца.

Наша цель найти достаточные и необходимые условия, при выполнениях которых в бисингулярных задачах появляются (зоны) так называемый промежуточный пограничный слой и построить асимптотические решения трех зонных бисингулярных задач.

Заключение по главе 1

Обзор литературы по сингулярно и бисингулярно возмущенным уравнениям показало, что каждая задача требует индивидуального подхода. Т.е. не существует единого асимптотического метода, с помощью которого решились бы все выше перечисленные и подобные задачи теории возмущении.

Научная школа А.М. Ильина используют метод согласования, научная школа С.А. Ломова – метод регуляризации С.А. Ломова, научная школа К. Алымкулов – обобщенный метод пограничных функций, научная школа К.С. Алыбаева – метод линии уровня, и др.

Приближенные решения дифференциальных задач с малым параметром ε при старшей производной вызывают затруднения ввиду наличия в таких решениях особенностей типа пограничного слоя [26].

В большинстве выше перечисленных бисингулярных задачах в окрестности особых множеств (точки, окружности) существует только один пограничный слой. Т.е. бисингулярные задачи с промежуточным (двойным) пограничным слоем мало изучены.

Рассмотренные в диссертации задачи ранее никем не исследованы, свидетельством являются научные статьи, опубликованные в международных периодических научных журналах по математике, цитируемые в базах Scopus, Web of Science и RCSI. Асимптотические разложения решений новых классов задач строятся методами малого параметра, классического метода пограничных функций и обобщенным методом пограничных функций. При обосновании асимптотических разложении применены принцип максимума и метод дифференциальных неравенств [38]-[43], [80].

На основании проведенных анализов диссертационное исследование актуально, оригинально, своевременно и имеет определенный теоретический и практический интерес.

ГЛАВА 2. МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 2.1. Объект и предмет исследования

В целом объектами диссертационного исследования являются бисингулярные задачи с промежуточными пограничными слоями, т.е. трех зонные бисингулярные задачи первого и второго порядков.

Объектом исследования третьей главы являются трех зонные бисингулярные задачи первого порядка.

В параграфе 3.1 объектом исследования является задача Коши:

$$\varepsilon^3 y'_\varepsilon(x)+(x+\varepsilon)y_\varepsilon(x)=f_\varepsilon(x),\ x\in[0,T],\quad y_\varepsilon(0)=a, \tag{2.1.1}$$

где a – некоторая постоянная не зависящая от малого параметра ε, $f_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(x),\ f_k\in C^\infty[0,T],\ f_0(0)\neq 0$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Объектом исследования параграфа 3.2 является начальная задача:

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x)+(xq(x)+\varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in[0,T],\quad y_\varepsilon(0)=a, \tag{2.1.2}$$

где $n,m\in\mathbf{N}$, a=const, $f(0)\neq 0$, $f,q,p\in C^\infty[0,T],\ 0<q(x),0<p(x):x\in[0,T]$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Объектом исследования параграфа 3.3 является задача Коши:

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x)+(x^\gamma q(x)+\varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in[0,T],\quad y_\varepsilon(0)=a, \tag{2.1.3}$$

где $n,m,\gamma\in\mathbf{N}$, a=const, $f(0)\neq 0$, $f,q,p\in C^\infty[0,T]$, $0<\alpha_0<q(x)$, $0<\alpha_0<p(x):x\in[0,T]$.

Объектом исследования четвертой главы являются трех зонные бисингулярные задачи второго порядка.

В параграфе 4.1 объектом исследования является задача Дирихле

$$\varepsilon^3 y_\varepsilon''(x)+x^4 y_\varepsilon'(x)+(x^4-\varepsilon)y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in[0,1], \tag{2.1.4}$$

$$y_\varepsilon(0)=a,\ y_\varepsilon(1)=b, \tag{2.1.5}$$

где a, b – известные постоянные, $f \in C^{\infty}[0,1]$, $f(0) \neq 0$, а $y_{\varepsilon}(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Объектом исследования параграфа 4.2 является уравнение:

$$\varepsilon^4 y''_{\varepsilon}(x) + x^2 p(x) y'_{\varepsilon}(x) - \varepsilon q(x) y_{\varepsilon}(x) = f(x),\ x \in [0,1], \tag{2.1.6}$$

с условием (2.1.5).

Здесь $0 < p(x), 0 < q(x), f(x)$ – бесконечно дифференцируемые известные функций, при $x \in [0,1]$, $0 < p(0) = p_0$, $0 < q(0) = q_0$, а $y'_{\varepsilon}(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Объектом исследования параграфа 4.3 является уравнение:

$$\varepsilon^n y_{\varepsilon}''(x) + x^k p(x) y_{\varepsilon}'(x) - (x^k q(x) + \varepsilon^m r(x)) y_{\varepsilon}(x) = f(x),\ x \in [0,1], \tag{2.1.7}$$

с условием (2.1.5).

В уравнении (2.1.7): $p, q, r, f \in C^{\infty}[0,1]$, $f(0) \neq 0$, $0<p(0)$, $0<q(0)$, $0<r(0)$, $n>m$, $1<k$, $(n, k, m \in N)$, а $y_{\varepsilon}(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Предметом исследования являются:

- найти *условия* при которых появляются *промежуточные* пограничные слои в линейных бисингулярных задачах первого и второго порядков;

- построение равномерных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач с любой степенью точности по малому параметру.

§ 2.2. Методы исследования

В диссертации основном используются методы: интегрирования по частям, интегрирования линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков, малого параметра, классический метод пограничных функций, обобщенный метод пограничных функций, сравнения, дифференциальных неравенств и принцип максимума.

Для начала приведем некоторые фундаментальные понятия и определения используемые в диссертационной работе.

Определение 2.1. Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$. Если существует окрестность точки $x=a$ и существует такая постоянная $M>0$, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $|\alpha(x)| \le M|\beta(x)|$, то будем писать $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x \to a$.

Равенство $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x \to a$ будем называть асимптотическим равенством.

Определение 2.2. Последовательность функций $\varphi_n(x), n \in N$ будем называть асимптотической при $x \to a$, если

$$\forall n \in N: \ \varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)) \text{ при } x \to a.$$

Определение 2.3. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$. Ряд

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x) + ... + a_n\varphi_n(x) + ...$$

называется асимптотическим рядом функции $f(x)$ по асимптотической последовательности функций $\varphi_n(x)$ при $x \to a$, если

$$\forall n \in N: \ \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right| < c_n |\varphi_{n+1}(x)|, \text{ где } 0<c_n - \text{const}.$$

Определение 2.4. Пусть функция $f(t)$ определена при $t>A$ для некоторого положительного A. Ряд

$$a_0+\frac{a_1}{t}+\frac{a_2}{t^2}+\ldots+\frac{a_n}{t^n}+\ldots$$

называется асимптотическим рядом функции $f(t)$ при $t\to\infty$, если для $\forall n\in$N, $\forall\ t>A$ справедливо неравенство

$$\left|f(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{t^k}\right|<\frac{c_n}{t^{n+1}},\ \text{где } 0<c_n-\text{const.}$$

Определение 2.5. Пусть функция $f(x)$ определена в интервале $x\in(0,\ b)$. Ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

называется асимптотическим рядом функции $f(x)$ при $x\to0$ (справа), если $\forall n\in N$ и $x\in(0,\ b)$ справедливо неравенство

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right|<c_nx^{n+1},\ \text{где } 0<c_n-\text{const.}$$

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки $x=x_0$, то она разлагается в асимптотический ряд по степеням x при $x\to x_0$. Это вытекает из известной формулы Маклорена:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+O((x-x_0)^{n+1}).$$

Теорема 2.1. Пусть $\{\varphi_n(x)\},n\in N$ является асимптотической последовательностью при $x\to a$ и

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)+O\big(\varphi_{n+1}(x)\big),\ x\to a.$$

Тогда коэффициенты $a_k,k\in N$ однозначно определяются функцией $f(x)$. Тем самым асимптотическое представление функции по заданной асимптотической последовательности единственно.

Следствие. Асимптотическое разложение функции по заданной асимптотической последовательности единственно.

Определение 2.6. Решение возмущенной задачи называется асимптотическим в области D, если разность между точным решением и асимптотическим решением стремиться к нулю в D, при стремлении малого параметра к нулю по некоторой норме.

Если при этом $\sup\limits_{D}\|u(x,\varepsilon)-U(x,\varepsilon)\|=O\left(\varepsilon^{k}\right)$, то говорят, что $U(x,\varepsilon)$ является асимптотическим решением с точностью порядка ε^k для решения $u(x,\varepsilon)$ в области D .

Определение 2.7. Асимптотическое решение называется равномерной в области D, если оно пригодно на всей области D.

Под асимптотическим методом понимается тот или иной способ построения асимптотического решения возмущенных задач. Как правило, построение асимптотического решения сводится к решению более простых задач, чем исходная возмущенная задача. Практическая ценность асимптотического метода определяется возможностью эффективного нахождения асимптотического решения с помощью этих более простых задач.

Метод малого параметра

В методе малого параметра асимптотическое решение возмущенной задачи ищется в виде степенного ряда по степеням малого параметра:

$$V_{\varepsilon}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j}v_{j}(x).$$

Этот метод применяется обычно при построении внешнего решения сингулярно возмущенных задач или при построении асимптотического решения регулярно возмущённых задач [22], [28], [29].

Классический метод погранфункций

Он в современных трактовках разработан кыргызским математиком М.И. Иманалиевым в 1964 г. и применяется при построении асимптотического решения сингулярно возмущенных уравнений, когда внешнее решение является гладкой функцией на всей рассматриваемой области. Асимптотическое решение состоит из двух слагаемых:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j v_j(x)+\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j\pi_j(\tau),\ x=\mu\tau,$$

где $\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j v_j(x)$ – внешнее решение и $\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j\pi_j(\tau)$ – погранслойное решение, которое экспоненциально убывает вне пограничного слоя [22], [28], [29], [32], [37], [69].

Обобщенный метод погранфункций

Если невозмущенное уравнение имеет особенность в начальной точке, то для построения асимптотики решения К. Алымкуловым был предложен обобщенный метод погранфункций [3]-[5]. Этот метод успешно использован в работах [8], [31], [44]-[50], [57]-[60], [66], [69]-[70], [81].

Метод дифференциальных неравенств

Метод дифференциальных неравенств для задачи Коши первого порядка [43]:

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y),\ 0\le t\le T,\ y(0)=y^0. \tag{2.2.1}$$

Теорема 2.2. Пусть существует решение $y(t)$ задачи (2.2.1) (классическое). Пусть существует функция $z(t)\in C^1(0,T]\cap C[0,T]$:

$$\frac{dy}{dt}<\left(f(t,z(t))\right),\quad t\in(0,T],\ z(0)<y^0.$$

Тогда имеет место неравенство

$$z(t)<y(t),t\in(0,T].$$

Замечание 2.1. С.А. Чаплыгин называл функцию $z(t)$ нижней функцией. Аналогично определяется верхняя функция.

Определение 2.8. Функция $\alpha(t) \in C^1(0,T] \cap C[0,T]$ называется нижним решением задачи (2.2.1), если выполнены неравенства

$$\frac{d\alpha}{dt} < \left(f(t,\alpha(t)) \right), \quad 0 < t \le T, \ \alpha(0) < y^0.$$

Функция $\beta(t) \in C^1(0,T] \cap C[0,T]$ называется верхним решением задачи (2.2.1), если выполнены неравенства

$$\frac{d\beta}{dt} < \left(f(t,\beta(t)) \right), \ 0 < t \le T, \ \beta(0) > y^0.$$

Следствие 2.1. Используя схему доказательства теоремы сравнения, несложно получить, что между нижним решением $\alpha(t)$ и верхним решением $\beta(t)$ имеет место неравенство $\alpha(t) < \beta(t)$.

Теорема 2.3. Пусть существует нижнее $\alpha(t)$ и верхнее $\beta(t)$ решения задачи (2.2.1), такие что $\alpha(t) < \beta(t), \ t \in [0,T]$. Пусть функция $f(t,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной $y : \left| f(t,y_1) - f(t,y_2) \right| \le N \left| (y_1 - y_2) \right|, \quad y_1, y_2 \in [\alpha,\beta], \quad t \in [0,T]$. Тогда задача Коши (2.2.1) имеет единственное решение $y(t)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha(t) < y(t) < \beta(t), \ 0 \le t \le T.$$

Замечание 2.2. Если нижнее и верхнее решения определены при $0 \le t < \infty$, а функция $f(t,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной y с постоянной Липшица, не зависящей от t, то Теорема 2 остается справедливой и на $0 \le t < \infty$.

Принцип максимума для сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [28], [80]:

$$\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x) \tag{2.2.2}$$

на отрезке $[a; b]$ и краевые условия одного из трех типов:

а) $u(a)=A_1$, $u(b)=A_2$ или

б) $u(a) - h_1u'(a)=A_1$, $u(b) + h_2u'(b)=A_2$, $h_1>0$, $h_2>0$ или в) $-u'(a)=A_1, u'(b)=A_2$.

Коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ и правая часть $f(x)$ всюду далее будут предполагаться непрерывными на отрезке $[a; b]$.

Теорема 2.4. Если в уравнении (2.2.2) коэффициент $q(x)<-\alpha<0$, то решение любой из задач (2.2.2), (а) или (2.2.2), (б) при любых $f(x)\in C([a,b])$, A_1, A_2 существует, единственно и для него справедлива оценка

$$|u(x)|\le \max_{[a,b]}\frac{|f(x)|}{\alpha}+|A_1|+|A_2|.$$

Теорема 2.5. Если в уравнении (2.2.2) коэффициент $q(x)<-\alpha<0, \varepsilon\in(0,1)$, то решение задачи (2.2.2), (в) при любых $f(x)\in C([a,b])$, A_1, A_2 существует и единственно. Существует положительная постоянная M_1, зависящая лишь от $(b-a)$ и $\max\limits_{[a,b]}|p(x)|$, такая что для решения задачи (2.2.2), (в) справедлива оценка

$$|u(x)|\le M_1\left(\max_{[a,b]}\frac{|f(x)|}{\alpha}+|A_1|+|A_2|\right).$$

Заключение по главе 2

Бисингулярные задачи появляются там, где имеются неравномерные переходы от одних физических характеристик к другим. При исследовании подобных задач возникают новые различные явления, поэтому методы асимптотического интегрирования их разрабатываются отдельно для различных классов задач. В связи с этим актуальность результатов исследований по данному направлению не вызывает сомнений. Как нам известно, задачи с двойной сингулярностью, т.е. бисингулярно возмущенные задачи, сравнительно сингулярно возмущенным задачам, мало изучены. Исследование показало, что в бисингулярно возмущенных задачах может появляется еще дополнительные особенности, например, промежуточные или дополнительные (пограничный или внутренний) слои.

Объектом диссертационного исследования являются трех зонные бисингулярные задачи первого и второго порядков.

Нами разработаны оригинальные подходы, алгоритмы к решению поставленных задач, использованием ранее известных методов: интегрирования по частям, интегрирования линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков, малого параметра, классический метод пограничных функций, обобщенный метод пограничных функций, сравнения, дифференциальных неравенств и принцип максимума.

С помощью оригинального подхода, суть которого в том, что вместо универсального метода согласования асимптотических разложений, разработанного и успешно применяемого в научной школе А. М. Ильина, используется метод вспомогательной функции, позволяющий получить равномерное асимптотическое разложение для рассматриваемого класса задач с помощью более простой процедуры. Кроме этого, в рассматриваемой задаче присутствуют малые соподчиненные параметры, и мы исследуем вопрос, при каких соотношениях этих параметров возникают дополнительные асимптотические слои.

ГЛАВА 3. ТРЕХ ЗОННЫЕ БИСИНГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 3.1. Простейший случай

Постановка задачи. Для наглядности начнем с самого простого случая. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\varepsilon^3 y'_\varepsilon(x) + (x+\varepsilon) y_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x),\ x \in [0,T], \tag{3.1.1}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \tag{3.1.2}$$

где a – некоторая постоянная не зависящая от малого параметра ε, $f_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(x)$, $f_k \in C^\infty[0,T]$, $f_0(0)\neq 0$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Решение начальной задачи существует, единственно и представимо в виде:

$$y_\varepsilon(x) = a e^{-\frac{x^2+2x\varepsilon}{2\varepsilon^3}} + \frac{1}{\varepsilon^3} e^{-\frac{x^2+2x\varepsilon}{2\varepsilon^3}} \int_0^x f_\varepsilon(\xi) e^{\frac{\xi^2+2\xi\varepsilon}{2\varepsilon^3}} d\xi.$$

Требуется построить равномерное асимптотическое приближение решения начальной задачи (3.1.1)-(3.1.2) на отрезке $[0,T]$, когда малый параметр стремится к нулю.

Особенности начальной задачи. Первая сингулярность – присутствие малого параметра перед производной искомой функции, т.е. перед $y'_\varepsilon(x)$. Если в уравнении (3.1.1) формально считать, что ε=0, то мы получим конечное уравнение:

$$x y_0(x) = f_0(x),$$

нетрудно заметить, что $y_0(x)$ в общем случае не удовлетворяет начальному условию (3.1.2).

Вторая сингулярность – функция $y_0(x)=\dfrac{f_0(x)}{x}$, при $x\to 0+$ имеет особую точку – полюс первого порядка, так как по условию $f_0(0)\neq 0$.

Третья особенность появление *промежуточного* пограничного слоя.

Первая и вторая особенности очевидны, задачи с подобными особенностями называют бисингулярными.

Чтобы доказать последнее предложение, т.е. третью особенность рассматриваемой задачи Коши мы построим внешнее решение начальной задачи (3.1.1)-(3.1.2), которое будем искать в виде:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_j(x), \tag{3.1.3}$$

где $y_j(x)$ – пока неизвестные функций.

Формально подставляя ряд (3.1.3) в дифференциальное уравнение (3.1.1) имеем:

$$\varepsilon^3\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y'_j(x)+(x+\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_j(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j f_j(x),$$

в последнем равенстве приравнивая коэффициенты малого параметра при одинаковых степенях можно записать в виде рекуррентных соотношений:

$$xy_0(x)=f_0(x),$$

$$xy_1(x)+y_0(x)=f_1(x),$$

$$xy_2(x)+y_1(x)=f_2(x),$$

$$y'_{j-3}(x)+xy_j(x)+y_{j-1}(x)=f_j(x),\quad j=3,4,...$$

отсюда находим:

$$y_0(x)=\frac{f_0(x)}{x},\ y_1(x)=\frac{f_1(x)-y_0(x)}{x},\ y_2(x)=\frac{f_2(x)-y_1(x)}{x},$$

$$y_j(x)=\frac{f_j(x)-y_{j-1}(x)+y'_{j-3}(x)}{x},\ j=3,4,...$$

Поэтому ряд (3.1.3) можно записать в виде

$$y_\varepsilon(x)=\frac{f_0(x)}{x}+\varepsilon\frac{xf_1(x)-f_0(x)}{x^2}+\varepsilon^2\frac{x^2f_2(x)-xf_1(x)+f_0(x)}{x^3}+...,$$

нетрудно заметить, что каждое слагаемое этого ряда представимо в виде

$$y_k(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^k \tilde{y}_k(x),\ k\in N_0=N\cup\{0\},\ \ \tilde{y}_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j x^{k-j} f_{k-j}(x).$$

Это означает, что члены ряда (3.1.3) обладают свойством “нарастающей особенности”, которое свойственно бисингулярным задачам [29]:

$$y_\varepsilon(x)=\frac{1}{x}\left(f_0(x)+\frac{\varepsilon}{x}\tilde{y}_1(x)+\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^2\tilde{y}_2(x)+...+\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^j\tilde{y}_j(x)+...\right) \qquad (3.1.4)$$

где $\tilde{y}_j\in C^\infty[0,T],\ j\in N.$

Ряд (3.1.4) подсказывает каким должна быть внутренняя переменная в соседнем пограничном слое, т.е. $x=\varepsilon t$.

В уравнении (3.1.1) сделаем преобразование $x=\varepsilon t$:

$$\varepsilon^2\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+(\varepsilon t+\varepsilon)y_\varepsilon(t)=f_\varepsilon(\varepsilon t) \qquad (3.1.5)$$

пусть $y_\varepsilon(t)=\dfrac{w_\varepsilon(t)}{\varepsilon}$, тогда (3.1.5) примет вид:

$$\varepsilon\frac{dw_\varepsilon(t)}{dt}+(t+1)w_\varepsilon(t)=f_\varepsilon(\varepsilon t) \qquad (3.1.6)$$

В левой части последнего равенства главным является выражение

$$(t+1)w_\varepsilon(t),$$

в которой отсутствует производная, т.е. при $\varepsilon=0$ из (3.1.6) мы получаем конечное уравнение, а не дифференциальное:

$$(t+1)w_0(t)=f_0(0).$$

Но в нашей задаче имеется начальное условие (3.1.2), поэтому в окрестности начальной точки $x=0$ мы должны ввести еще одно растяжение координат, т.е. внутреннюю переменную и с помощью нее мы устраняем невязку (несогласованность) в начальной точке $x=0$.

В таком случае, функция, удовлетворяющая равенству (3.1.6) будет средним (или промежуточным) пограничным слоем между классическим пограничным слоем в окрестности $x=0$ и внешним решением. Таким образом мы определили, что асимптотическое решение задачи (3.1.1)-(3.1.2) состоит из трех частей.

Формальное асимптотическое приближение решения задачи (3.1.1)-(3.1.2) будем искать в виде суммы трех неизвестных функций:

$$y_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x) + w_\varepsilon(t) + \pi_\varepsilon(\tau), \tag{3.1.7}$$

где $v_\varepsilon(x)$ – гладкое внешнее решение;

$w_\varepsilon(t)$ – промежуточное погранслойное решение, $t = x/\varepsilon$;

$\pi_\varepsilon(\tau)$ – экспоненциально убывающее погранслойное решение, $\tau = x/\varepsilon^2$.

Уравнение (3.1.1) запишем в виде

$$\varepsilon^3 y'_\varepsilon(x) + (x+\varepsilon) y_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon + h_\varepsilon,\ x \in [0,T], \tag{3.1.8}$$

где h_ε – пока неизвестная функция зависящая от малого параметра.

Подставляя (3.1.7) в равенство (3.1.8) и начальное условие (3.1.2) составим задачи:

$$\varepsilon^3 v'_\varepsilon(x) + (x+\varepsilon) v_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon,\ x \in [0,T], \tag{3.1.9}$$

$$\varepsilon^2 w'_\varepsilon(t) + (t\varepsilon+\varepsilon) w_\varepsilon(t) = h_\varepsilon,\ t \in [0, \varepsilon^{-1}T], \tag{3.1.10}$$

$$\varepsilon \pi'_\varepsilon(\tau) + (\tau\varepsilon^2+\varepsilon)\pi_\varepsilon(\tau) = 0,\ \tau \in [0,\varepsilon^{-2}T],\ \pi_\varepsilon(0) = a - v_\varepsilon(0) - w_\varepsilon(0) \tag{3.1.11}$$

Задача (3.1.9)

Начнем с решения задачи (3.1.9).

Пусть $v_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j(x)$ и $h_\varepsilon = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j,\ h_j - const$. Тогда равенство (3.1.9) можно записать в виде:

$$v'_{j-3}(x) + x v_j(x) + v_{j-1}(x) = f_j(x) - h_j,\ x \in [0,T],\ \ j = 0,1,... \tag{3.1.12}$$

где $v_s(x) \equiv 0,\ s < 0$.

Равенство (3.1.12) запишем в виде:

$$v_j(x) = \frac{f_j(x) - v_{j-1}(x) - v'_{j-3}(x) - h_j}{x},\ j = 0,1,...,\ v_s(x) \equiv 0, s < 0.$$

В частности,

$$v_0(x)=\frac{f_0(x)-h_0}{x}; \qquad v_1(x)=\frac{f_1(x)-v_0(x)-h_1}{x};$$

$$v_2(x)=\frac{f_2(x)-v_1(x)-h_2}{x}, \qquad v_3(x)=\frac{f_3(x)-v_2(x)-v'_0(x)-h_3}{x}.$$

Пусть

$$h_0 = f_0(0),\, h_1 = f_1(0)-v_0(0),\, h_2 = f_2(0)-v_1(0),$$
$$h_j = f_j(0)-v_{j-1}(0)-v'_{j-3}(0),\ j=3,4,...$$

тогда особенность функций $v_j(x)$ исчезнут:

$$v_j(x)=\frac{f_j(x)-v_{j-1}(x)-v'_{j-3}(x)-f_j(0)+v_{j-1}(0)+v'_{j-3}(0)}{x},\ j=0,1,...,$$

$v_s(x)\equiv 0, s<0$ и $v_j \in C^{\infty}[0,T],\ j=0,1,...$

Задача (3.1.10)

Перейдем теперь к задаче (3.1.10). Решение этой задачи будем искать в виде ряда, $w_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w_j(t)$. Подставим это выражение в (3.1.10):

$$\varepsilon\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w'_j(t)+(t+1)\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w_j(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j h_j,\ t\in[0,\varepsilon^{-1}T],$$

приравнивая коэффициенты малого параметра с одинаковыми степенями, получим:

$$w_0(t)=\frac{h_0}{t+1};\ w_1(t)=\frac{h_1-w'_0(t)}{t+1},\ w_j(t)=\frac{h_j-w'_{j-1}(t)}{t+1},\ j=0,1,...$$

Заметим, что функций $w_k(t)$ убывают степенным характером при $t\to\infty$.

Задача (3.1.11)

Решение задачи (3.1.11) ищем в виде ряда $\pi_\varepsilon(\tau)=\varepsilon^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\pi_j(\tau)$. Подставляя этот ряд в задачу (3.1.11) получим:

$$\pi'_0(\tau)+\pi_0(\tau)=0,\quad \tau\in[0,\varepsilon^{-2}T], \tag{3.1.13}$$

$$\pi'_j(\tau)+\pi_j(\tau)=-\tau\pi_{j-1}(\tau), \quad \tau\in[0,\varepsilon^{-2}T],\ j=1,2,\ldots, \qquad (3.1.14)$$

$$\pi_0(0)=-w_0(0); \quad \pi_1(0)=a-v_0(0)-w_1(0);\ \pi_j(0)=-(v_{j-1}+w_j(0)),\ j=2,3,\ldots \quad (3.1.15)$$

Лемма 3.1. Решение задачи

$$z'(\tau)+p_0z(\tau)=e^{-p_0\tau}\left(c_0+c_1\tau+\ldots+c_j\tau^j\right),\ \ \tau\in[0,\infty),\ z(0)=z^0,\ \ p_0>0$$

существует, единственно и представимо в виде

$$z(\tau)=e^{-p_0\tau}z^0+e^{-p_0\tau}\left(c_0\tau+c_1\frac{\tau^2}{2}+\ldots+c_j\frac{\tau^{j+1}}{j+1}\right).$$

Доказательство. Уравнение

$$z'(\tau)+p_0z(\tau)=e^{-p_0\tau}\left(c_0+c_1\tau+\ldots+c_j\tau^j\right),$$

запишем в виде

$$\left(z(\tau)e^{p_0\tau}\right)'=\left(c_0+c_1\tau+\ldots+c_j\tau^j\right),$$

полученное выражение интегрируем по τ, учитывая начальное условие:

$$z(\tau)=e^{-p_0\tau}z^0+e^{-p_0\tau}\left(c_0\tau+c_1\frac{\tau^2}{2}+\ldots+c_j\frac{\tau^{j+1}}{j+1}\right).$$

Лемма доказана.

На основании доказанной леммы решения задач (3.1.13)-(3.1.15) существуют, единственны и экспоненциально убывают при $\tau\to\infty$.

Таким образом, нами определены все слагаемые (3.1.7). Перейдем к оценке остаточного члена разложения:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j v_j(x)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w_j(t)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\pi_j(\tau).$$

Оценка остаточного члена. Пусть

$$y_\varepsilon(x)=y_{s,\varepsilon}(x)+R_{s,\varepsilon}(x),$$

где $y_{s,\varepsilon}(x)=\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^j v_j(x)+\varepsilon^{-1}\sum_{j=0}^{s+1}\varepsilon^j(w_j(t)+\pi_j(\tau))$, $R_{s,\varepsilon}(x)$ – остаточная функция.

Тогда учитывая полученные выше выражения для функций $v_j(x),\ w_j(t),\ \pi_j(\tau)$ для остаточного члена $R_{s,\varepsilon}(x)$ имеем начальную задачу:

$$\varepsilon^3 R'_{s,\varepsilon}(x)+(x+\varepsilon)R_{s,\varepsilon}(x)=-\varepsilon^{s+1}\Phi_\varepsilon(x,t,\tau),\ x\in[0,T],\quad R_{s,\varepsilon}(0)=0, \tag{3.1.16}$$

где $\Phi_\varepsilon(x,t,\tau)=v_s(x)+v'_{s-2}(x)+\varepsilon v'_{s-1}(x)+\varepsilon^2 v'_s(x)+w'_{s+1}(t)+\tau\pi_{s+1}(\tau)-\tilde f_\varepsilon(x)$,

$$\tilde f_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_{s+1+k}(x).$$

Явное решение задачи (3.1.16) можно записать в виде:

$$R_{s,\varepsilon}(x)=O(\varepsilon^{s-2})e^{-\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^x(s+\varepsilon)ds}\int_0^x e^{\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\xi(s+\varepsilon)ds}d\xi=O(\varepsilon^{s-2})e^{-\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^x(s+\varepsilon)ds}\int_0^x\frac{\varepsilon^3}{\xi+\varepsilon}de^{\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\xi(s+\varepsilon)ds}=$$

$$=O(\varepsilon^{s-2})e^{-\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^x(s+\varepsilon)ds}\left(\frac{\varepsilon^3}{x+\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^x(s+\varepsilon)ds}-\varepsilon^2\right)+$$

$$+O(\varepsilon^{s+1})e^{-\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^x(s+\varepsilon)ds}\int_0^x\frac{1}{(\xi+\varepsilon)^2}e^{\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\xi(s+\varepsilon)ds}d\xi,\ \varepsilon\to 0.$$

Отсюда имеем $R_{s,\varepsilon}(x)=O(\varepsilon^s),\ \varepsilon\to 0.$

Нами доказана

Теорема 3.1. Асимптотическое решение трех зонной бисингулярной задачи Коши (3.1.1)-(3.1.2) на отрезке $[0,T]$ при стремлении малого параметра к нулю представимо в виде асимптотического ряда:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^j v_j(x)+\varepsilon^{-1}\sum_{j=0}^{s+1}\varepsilon^j(w_j(t)+\pi_j(\tau))+O(\varepsilon^s),\ \varepsilon\to 0.$$

Научные результаты этого параграфа опубликованы в журнале «Вестник ОшГУ», [47].

§ 3.2. Линейный рост сингулярности в начальной точке

Теперь чуть обобщим задачу, исследованную в предыдущем параграфе и выясним явления промежуточного пограничного слоя, т.е. найдем условие при выполнениях которого появляется промежуточный пограничный слой.

Постановка задачи. Исследуем задачу Коши:

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x) + (xq(x) + \varepsilon^m p(x)) y_\varepsilon(x) = f(x),\ x \in [0,T], \tag{3.2.1}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \tag{3.2.2}$$

где $n, m \in \mathbf{N}$, a – const, $f(0)\neq 0$, $f, q, p \in C^\infty[0,T]$, $0 < q(x)$, $0 < p(x) : x \in [0,T]$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Решение начальной задачи существует, единственно и представимо в виде:

$$y_\varepsilon(x) = y^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} + \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} \int\limits_0^x f(\xi) e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_0^\xi (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} d\xi.$$

Требуется определить при каких значениях параметров n и m появляется промежуточный пограничный слой и в этом случае построить равномерное асимптотическое приближение решения начальной задачи (3.2.1)-(3.2.2) на отрезке $[0,T]$, когда малый параметр стремится к нулю.

Для решения поставленной задачи сначала приведем достаточное и необходимое условие существование промежуточного пограничного слоя, далее построим асимптотическое решение задачи (3.2.1)-(3.2.2).

Особенности начальной задачи. Первая и вторая сингулярности те же самые, что показанные в предыдущем параграфе: 1) присутствие малого параметра перед производной искомой функции; 2) функция $y_0(x) = \dfrac{f(x)}{xq(x)}$, при $x \to 0+$ имеет особую точку – полюс первого порядка.

Третья особенность – появление промежуточного пограничного слоя, только при $n > 2m$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.2. Если в начальной задаче (3.2.1)-(3.2.2) параметры n и m удовлетворяют неравенству $n>2m$, то в окрестности начальной точки $x=0$ существует промежуточный (дополнительный) пограничный слой.

Доказательство. Как отмечено в работе [37], если в области пограничного слоя существует не один, а несколько характерных пределов, то говорят соответственно о многозонной задаче. Поэтому для доказательства теоремы мы должны показать, что при выполнении условия $n > 2m$ в области пограничного слоя, т.е. в окрестности точки $x=0$ существует два характерных предела, и при $n \le 2m$ в окрестности точки $x=0$ существует только один характерный предел.

Пусть $x=\varepsilon^{\alpha}t$, $\alpha>0$, тогда $dx=\varepsilon^{\alpha}dt$ и уравнение (3.2.1) перепишется в виде:

$$\varepsilon^{n-\alpha}\frac{dy_{\varepsilon}(t)}{dt}+(\varepsilon^{\alpha}tq(\varepsilon^{\alpha}t)+\varepsilon^{m}p(\varepsilon^{\alpha}t))y_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t). \qquad (3.2.3)$$

а) Пусть $\boldsymbol{n > 2m}$.

1) При $\alpha=\dfrac{n}{2}$:

$$\varepsilon^{\frac{n}{2}-m}\left(\frac{d\psi_{\varepsilon}(t)}{dt}+tq(\varepsilon^{\alpha}t)\psi_{\varepsilon}(t)\right)+p(\varepsilon^{\alpha}t))\psi_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t); \qquad (3.2.4)$$

2) при $\alpha=n-m$:

$$\left(\frac{d\psi_{\varepsilon}(t)}{dt}+tq(\varepsilon^{\alpha}t)\psi_{\varepsilon}(t)\right)+\varepsilon^{n-2m}p(\varepsilon^{\alpha}t))\psi_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t); \qquad (3.2.5)$$

3) при $\alpha=m$:

$$\varepsilon^{n-2m}\frac{d\psi_{\varepsilon}(t)}{dt}+(tq(\varepsilon^{\alpha}t)+p(\varepsilon^{\alpha}t))\psi_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t), \qquad (3.2.6)$$

где $\psi_{\varepsilon}(t)=\varepsilon^{m}y_{\varepsilon}(t)$.

В пограничном слое имеется два характерных предела (3.2.5) и (3.2.6).

Так как $n-m>m$, поэтому изменение масштаба $\tau=\dfrac{x}{\varepsilon^{n-m}}$ описывает пограничный слой вблизи начальной точки $x=0$, которую будем называть левой зоной, а изменение масштаба $t=\dfrac{x}{\varepsilon^{m}}$, определяет другую область, ее называют средней зоной, так как она лежит между левой зоной и областью внешнего разложения – правой зоной.

б) Пусть $\boldsymbol{n \leq 2m}$. Докажем, что в этом случае имеется только один характерный предел.

Рассмотрим сначала знак равенства, т.е. случай $n = 2m$. При $\alpha = m$, мы получим, только один характерный предел:

$$\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + (tq(\varepsilon^\alpha t) + p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t), \tag{3.2.7}$$

где $\psi_\varepsilon(t) = \varepsilon^m y_\varepsilon(t)$.

Исследуем теперь случай, когда $\boldsymbol{n < 2m}$.

1) При $\alpha = \frac{n}{2}$:

$$\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + tq(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right) + \varepsilon^{m-\frac{n}{2}} p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t); \tag{3.2.8}$$

2) при $\alpha = n - m$:

$$\varepsilon^{2m-n}\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + tq(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right) + p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t); \tag{3.2.9}$$

3) при $\alpha = m$:

$$\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon^{2m-n}(tq(\varepsilon^\alpha t) + p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t), \tag{3.2.10}$$

где $\psi_\varepsilon(t) = \varepsilon^m y_\varepsilon(t)$.

В пограничном слое имеется только один характерный предел (3.2.10).

Необходимость условия $n > 2m$ можно доказать еще с помощью внешнего решения. Пусть $n = km,\ 2 < k \in N$. Внешнее решение начальной задачи (3.2.1)-(3.2.2), будем искать в виде:

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_j(x), \tag{3.2.11}$$

где $y_j(x)$ – пока неизвестные функций.

Формально подставляя ряд (3.2.11) в уравнение (3.2.12) имеем:

$$\varepsilon^n \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y'_j(x) + (xq(x) + \varepsilon^m p(x)) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_j(x) = f(x), \ x \in (0,T],$$

последнее равенство можно записать в виде:

$$y'_{j-n}(x) + xq(x) y_j(x) + p(x) y_{j-m}(x) = f(x), \ x \in (0,T], \quad j = 0,1,...$$

$y_s(x) \equiv 0, \ s < 0.$

отсюда находим:

$$y_j(x) = \frac{f(x) - p(x) y_{j-m}(x) - y'_{j-n}(x)}{xq(x)},$$

в частности, при j=0: $y_0(x) = \dfrac{f(x)}{xq(x)}$;

по условию $n = km, \ 2 < k \in N$, поэтому

$$y_m(x) = -\frac{p(x) y_0(x)}{xq(x)}; \ y_{2m}(x) = -\frac{p(x) y_m(x)}{xq(x)};$$

а при j=n:

$$y_n(x) = -\frac{p(x) y_{n-m}(x) + y'_0(x)}{xq(x)} \ \text{или} \ y_{jm}(x) = -\frac{p(x) y_{m(j-1)}(x) + y'_0(x)}{xq(x)}.$$

Из этих выражений следует, что

$$y_k(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon^m}{x}\right)^k \tilde{y}_k(x), \ k \in N_0 = N \cup \{0\}, \ \ \tilde{y}_k \in C^{\infty}[0,1].$$

Это означает, что члены ряда

$$y_\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{xq(x)} + \frac{1}{x}\frac{\varepsilon^m}{x}\tilde{y}_1(x) + \frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon^m}{x}\right)^2 \tilde{y}_2(x) + ... + \frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon^m}{x}\right)^j \tilde{y}_j(x) + ... \qquad (3.2.12)$$

где $\tilde{y}_j \in C^{\infty}[0,1], \ j \in \mathbf{N}$, обладают свойством “нарастающей особенности” [29], которое свойственно бисингулярным задачам [28], [57]-[60].

Ряд (3.2.12) подсказывает каким должна быть внутренняя переменная в пограничном слое, т.е. x=$\varepsilon^m t$.

В уравнении (3.2.1) сделаем преобразование x=$\varepsilon^m t$:

$$\varepsilon^{m(k-1)} \frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} + (\varepsilon^m t q(\varepsilon^m t) + \varepsilon^m p(\varepsilon^m t)) y_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^m t) \qquad (3.2.13)$$

если ввести обозначение $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-m}w_\varepsilon(t)$, тогда (3.2.13) примет вид:

$$\varepsilon^{m(k-2)}\frac{dw_\varepsilon(t)}{dt}+(tq(\varepsilon^m t)+p(\varepsilon^m t))w_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^m t) \tag{3.2.14}$$

В левой части последнего равенства главным является выражение $(tq(\varepsilon^m t)+p(\varepsilon^m t))w_\varepsilon(t)$, в которой отсутствует производная, т.е. при ε=0 мы получаем конечное уравнение а не дифференциальное. Это означает, что вблизи начальной точки существует еще одна погранслойная функция – решение дифференциального уравнения первого порядка, с помощью которой устраняется невязка (несогласованность) в начальной точке.

Функция, удовлетворяющая равенству (3.2.14) будет промежуточным пограничным слоем [29].

Теорема доказана.

Формальное асимптотическое приближение решения задачи (3.2.1)-(3.2.2) при $n=km,\ 2<k\in N$ будем искать в виде суммы трех неизвестных функций:

$$y_\varepsilon(x)=v_\varepsilon(x)+w_\varepsilon(t)+\pi_\varepsilon(\tau), \tag{3.2.15}$$

где $v_\varepsilon(x)$ – гладкое внешнее решение;

$w_\varepsilon(t)$ – промежуточное погранслойное решение, $t=\dfrac{x}{\varepsilon^m}$;

$\pi_\varepsilon(\tau)$ – экспоненциально убывающее погранслойное решение, $\tau=\dfrac{x}{\varepsilon^{m(k-1)}}$.

Уравнение (3.2.1) запишем в виде

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x)+(xq(x)+\varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x)=f(x)-h_\varepsilon+h_\varepsilon,\ x\in[0,T], \tag{3.2.16}$$

где h_ε – пока неизвестная функция зависящая от малого параметра.

Подставляя (3.2.15) в равенство (3.2.16) и начальное условие (3.2.2) получим задачи:

$$\varepsilon^n v'_\varepsilon(x)+(xq(x)+\varepsilon^m p(x))v_\varepsilon(x)=f(x)-h_\varepsilon,\ x\in[0,T], \tag{3.2.17}$$

$$\varepsilon^{n-m}w'_\varepsilon(t)+(t\varepsilon^m q(t\varepsilon^m)+\varepsilon^m p(t\varepsilon^m))w_\varepsilon(t)=h_\varepsilon,\ t\in[0,\varepsilon^{-m}T], \tag{3.2.18}$$

$$\varepsilon^m\pi'_\varepsilon(\tau)+(\tau\varepsilon^{m(k-1)}q(\tau\varepsilon^{m(k-1)})+\varepsilon^m p(\tau\varepsilon^{m(k-1)}))\pi_\varepsilon(\tau)=0,\ \tau\in[0,\varepsilon^{-m(k-1)}T], \tag{3.2.19}$$

$$\pi_\varepsilon(0) = y^0 - v_\varepsilon(0) - w_\varepsilon(0) \qquad (3.2.20)$$

Решение задачи (3.2.17)

Пусть $v_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{mj} v_j(x)$ и $h_\varepsilon = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{mj} h_j,\ h_j - const$. Тогда равенство (3.2.17) можно записать в виде:

$$v'_{j-k}(x) + xq(x)v_j(x) + p(x)v_{j-1}(x) = f(x) - h_j,\ x \in [0,T],\quad j = 0,1,... \qquad (3.2.21)$$

где $v_s(x) \equiv 0, s < 0.$

Равенство (3.2.21) запишем в виде:

$$v_j(x) = \frac{f(x) - p(x)v_{j-1}(x) - v'_{j-k}(x) - h_j}{xq(x)},\ 2 < k \in N.$$

В частности,

$$v_0(x) = \frac{f(x) - h_0}{xq(x)};\ v_1(x) = -\frac{p(x)v_0(x) + h_1}{xq(x)};\ v_2(x) = -\frac{p(x)v_1(x) + h_2}{xq(x)}.$$

Пусть

$$h_0 = f(0),\ h_1 = -p(0)v_0(0),\ h_j = -(p(0)v_{j-1}(0) + v'_{j-k}(0)),$$

тогда имеем:

$$v_j \in C^\infty[0,T],\ j = 0,1,...$$

Решение задачи (3.2.18)

Решение этой задачи будем искать в виде $w_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-m} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{jm} w_j(t)$, подставляя это выражение в (3.2.18) имеем:

$$\varepsilon^{(k-2)m} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{jm} w'_j(t) + (tq(t\varepsilon^m) + p(t\varepsilon^m)) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{jm} w_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{jm} h_j,\ t \in [0, \varepsilon^{-m}T],$$

приравнивая коэффициенты малого параметра с одинаковыми степенями, получим:

$$w_0(t) = \frac{h_0}{tq(t\varepsilon^m) + p(t\varepsilon^m)};\quad w_j(t) = \frac{h_j - w'_{(j-k+2)m}(t)}{tq(t\varepsilon^m) + p(t\varepsilon^m)},\ j = 1,2,...,\ w_s \equiv 0, s < 0.$$

Еще раз отметим, что функций $w_k(t)$ являются промежуточными пограничными функциями в окрестности x=0 и эти функций убывают степенным характером при $t\to\infty$.

Решение задачи (3.2.19)-(3.2.20)

Решение задачи (3.2.19)-(3.2.20) будем искать в виде $\pi_\varepsilon(\tau)=\varepsilon^{-m}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}\pi_j(\tau)$. Подставляя это равенство в (3.2.19) и (3.2.20) получим задачи:

$$\begin{gathered}\pi'_j(\tau)+p(\tau\varepsilon^{m(k-1)})\pi_j(\tau)+\tau q(\tau\varepsilon^{m(k-1)})\pi_{j-(k-1)}(\tau)=0,\\ \tau\in(0,\varepsilon^{-m(k-1)}T],\ j=0,1,\ldots,\ 2<k\in N;\end{gathered}\tag{3.2.22}$$

$$\pi_0(0)=-w_0(0),\quad \pi_1(0)=y^0-v_0(0)-w_1(0);\pi_j(0)=-(v_{j-1}+w_j(0)),\ j=2,3,\ldots\tag{3.2.23}$$

По условию задачи (3.2.1)-(3.2.2) функций $q,p\in C^\infty[0,T]$, $0<q(x),0<p(x):x\in[0,T]$. Поэтому справедливы разложения:

$$p(\tau\varepsilon^{m(k-1)})=\sum_{j=0}^{\infty}\tau^j\varepsilon^{m(k-1)j}p_j,\ p_j=\frac{1}{j!}p^{(j)}(0);$$

$$q(\tau\varepsilon^{m(k-1)})=\sum_{j=0}^{\infty}\tau^j\varepsilon^{m(k-1)j}q_j,\ q_j=\frac{1}{j!}q^{(j)}(0).$$

На основании доказанной леммы 3.1 решения задач (3.2.22)-(3.2.23) существуют, единственны и экспоненциально убывают при $\tau\to\infty$.

Таким образом, нами определены все слагаемые (3.2.15). Перейдем к оценке остаточного члена разложения

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{mj}v_j(x)+\varepsilon^{-m}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}w_j(t)+\varepsilon^{-m}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}\pi_j(\tau).$$

Оценка остаточного члена

Пусть $y_\varepsilon(x)=y_{s,\varepsilon}(x)+R_{s,\varepsilon}(x)$,

где $y_{s,\varepsilon}(x)=\sum\limits_{j=0}^{s}\varepsilon^{mj}v_j(x)+\varepsilon^{-m}\sum\limits_{j=0}^{s+1}\varepsilon^{jm}(w_j(t)+\pi_j(\tau))$,

$R_{s,\varepsilon}(x)$ – остаточный член разложения.

Тогда для остаточного члена получим следующую начальную задачу

$$MR_{s,\varepsilon} \equiv \varepsilon^n R'_{s,\varepsilon}(x) + (xq(x) + \varepsilon^m p(x))R_{s,\varepsilon}(x) = \varepsilon^{ms+m}\Phi, \;\; x \in [0,T], \qquad (3.2.24)$$

$$R_{s,\varepsilon}(0) = 0. \qquad (3.2.25)$$

где $\Phi = p(x)v_s(x) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^{jm-m} v'_{s+j-k}(x) +$

$$+\sum_{j=1}^{k-2} \varepsilon^{mj} w'_{s-k+j+3}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon^{mj} \tau q(\tau\varepsilon^{m(k-1)})\pi_{s-k+j+2}(\tau).$$

Явное решение задачи (3.2.24)-(3.2.25) можно оценить двумя способами:

1-й способ. Интегрированием по частям явного решения:

$$R_{s,\varepsilon}(x) = O(\varepsilon^{ms+m-n}) e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} \int_0^x e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} d\xi =$$

$$= O(\varepsilon^{ms+m-n}) e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} \int_0^x \frac{\varepsilon^n}{\xi q(\xi) + \varepsilon^m p(\xi)} de^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} =$$

$$= O(\varepsilon^{ms+m-n}) e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} \left(\frac{\varepsilon^n}{xq(x) + \varepsilon^m p(x)} e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} - \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^m p(0)} \right) +$$

$$+ O(\varepsilon^{ms+m}) e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} \int_0^x \frac{q(\xi) + \xi q'(\xi) + \varepsilon^m p'(\xi)}{(\xi q(\xi) + \varepsilon^m p(\xi))^2} e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} d\xi, \; \varepsilon \to 0.$$

Отсюда имеем:

$$R_{s,\varepsilon}(x) = O(\varepsilon^{ms}), \; \varepsilon \to 0.$$

2-й способ. Методом сравнения (или методом барьерных функций) используя теорему 4 Чаплыгина [43]. Пусть $d = \max_{x\in[0,T]} \Phi(x,t,\tau)$,

$$z^{up}(x) = \frac{d+1}{xq(x) + \varepsilon^m p(x)} \varepsilon^{ms+m}, \qquad z^{down}(x) = -\frac{d+1}{xq(x) + \varepsilon^m p(x)} \varepsilon^{ms+m}, \; x \in [0,T].$$

Тогда $Mz^{up} > 0, \, Mz^{down} < 0, \; z^{up}(0) = \frac{d+1}{p(0)} \varepsilon^{ms} > 0, \, z^{down}(0) = -\frac{d+1}{p(0)} \varepsilon^{ms} < 0.$

Действительно,

$$Mz^{up} \equiv \varepsilon^n \left(\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)} \varepsilon^{ms+m} \right)' + \varepsilon^{ms+m} + \varepsilon^{ms+m}(d-\Phi) =$$

$$= \varepsilon^{ms+m} \left(1 - \varepsilon^n \frac{(xq(x)+\varepsilon^m p(x))'}{(xq(x)+\varepsilon^m p(x))^2} d \right) + \varepsilon^{ms+m} \left(d - \Phi \right) > 0,\ 0 < \varepsilon << 1;$$

$$Mz^{down} \equiv \varepsilon^n \left(-\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)} \varepsilon^{ms+m} \right)' - \varepsilon^{ms+m} - \varepsilon^{ms+m}(d+\Phi) =$$

$$= -\varepsilon^{ms+m} \left(1 - \varepsilon^n \frac{(xq(x)+\varepsilon^m p(x))'}{(xq(x)+\varepsilon^m p(x))^2} d \right) - \varepsilon^{ms+m} \left(d + \Phi \right) < 0,\ 0 < \varepsilon << 1;$$

Выполняются все условия теоремы Чаплыгина, поэтому

$$z^{down}(x) < R_\varepsilon(x) < z^{up}(x), x \in [0,T].$$

$$-\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)} \varepsilon^{ms+m} < R_\varepsilon(x) < \frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)} \varepsilon^{ms+m},\ x \in [0,T].$$

Теорема 3.3. Для решения задачи Коши (3.2.1)-(3.2.2) на отрезке $x \in [0,T]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{s} \varepsilon^{mj} v_j(x) + \varepsilon^{-m} \sum_{j=0}^{s+1} \varepsilon^j (w_j(t) + \pi_j(\tau)) + O(\varepsilon^{ms)}),\ \varepsilon \to 0.$$

Пример 3.1. $\varepsilon^3 y'_\varepsilon(x) + (x+\varepsilon) y_\varepsilon(x) = 1 + 2x,\ x \in [0,1],\ y_\varepsilon(0) = 1.$

В нашем примере *n*=3, *m*=1, *f*(*x*)=1+2*x*.

Внешнее решение:

$$y_\varepsilon(x) = \frac{1}{x} \left(1 + 2x + \frac{\varepsilon}{x}(2x^2 - x - 1) + \ldots + \left(\frac{\varepsilon}{x} \right)^k \tilde{y}_k(x) + \ldots \right).$$

Асимптотическое решение:

$$y_\varepsilon(x) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon} \Big(w_0(t) + \pi_0(\tau) + \varepsilon(w_1(t) + \pi_1(\tau)) + \varepsilon^2 (w_2(t) + \pi_2(\tau)) \Big) + R_\varepsilon(x)$$

где $x = \varepsilon t$, $x = \varepsilon^2 \tau$, $h_\varepsilon = 1 - 2\varepsilon$,

$$v_0(x) = \frac{1+2x-1}{x} = 2 \Rightarrow v_0(x) = 2\ v_1(x) = -\frac{2-2}{x} \Rightarrow v_1(x) \equiv 0\,.$$

$$w_0(t)=\frac{1}{1+t};\; w_1(t)=-\frac{2(t+1)^2-1}{(t+1)^3};\; w_2(t)=-\frac{2t^2+4t-1}{(t+1)^5}.$$

$$\pi_0(\tau)=-e^{-\tau},\;\pi_1(\tau)=\frac{1}{2}\tau^2e^{-\tau},\;\pi_2(\tau)=e^{-\tau}+\frac{1}{8}\tau^4e^{-\tau}.$$

Для остаточного члена получаем задачу:

$$\varepsilon^3R'_\varepsilon(x)+(x+\varepsilon)R_\varepsilon(x)=-\varepsilon^3(w'_2(t)+\tau\pi_2(\tau)),\; x\in[0,1],\; R_\varepsilon(0)=0. \quad (3.2.26)$$

Решение задачи (3.2.26) существует и единственно. Рассмотрим правую часть и оценим выражение $w'_2(t)+\tau\pi_2(\tau)$.

Функция $w'_2(t)=\dfrac{6t^2+12t+9}{(t+1)^6}>0,\, t\in[0,\infty)$ монотонно убывает, поэтому $\max\limits_{t\in[0,\infty)} w'_2(t)=9$.

А для функция $\tau\pi_2(\tau)=\tau e^{-\tau}+\dfrac{1}{8}\tau^5e^{-\tau}>0$ имеем $\max\limits_{\tau\in[0,\infty)}\tau\pi_2(\tau)=2.6665<3$, максимум достигается в точке τ=4,95. Значить $|w'_2(t)+\tau\pi_2(\tau)|<12$.

Пусть верхнее и нижнее решения будут соответственно:

$$z^{up}(x)=\frac{13\varepsilon^3}{x+\varepsilon},\; z^{down}(x)=-\frac{13\varepsilon^3}{x+\varepsilon},\; x\in[0,1].$$

Тогда

$$lz^{up}(x)>0,\; lz^{down}(x)<0,\; lR_\varepsilon=0,\; z^{up}(0)=13\varepsilon^2>0,\; z^{down}(0)=-13\varepsilon^2<0.$$

Действительно,

$$lz^{up}\equiv\varepsilon^3\left(-\frac{13\varepsilon^3}{(x+\varepsilon)^2}\right)+\varepsilon^3+12\varepsilon^3+\varepsilon^3(w'_2(t)+\tau\pi_2(\tau))=$$

$$=\varepsilon^3\left(1-\frac{13\varepsilon^3}{(x+\varepsilon)^2}\right)+\varepsilon^3\left(12+(w'_2(t)+\tau\pi_2(\tau))\right)>0,\; 0<\varepsilon<<1;$$

$$lz^{down}\equiv\varepsilon^3\left(\frac{13\varepsilon^3}{(x+\varepsilon)^2}\right)-\varepsilon^3-12\varepsilon^3+\varepsilon^3(w'_2(t)+\tau\pi_2(\tau))=$$

$$=-\varepsilon^3\left(1-\frac{13\varepsilon^3}{(x+\varepsilon)^2}\right)-\varepsilon^3\left(12-(w'_2(t)+\tau\pi_2(\tau))\right)<0,\; 0<\varepsilon<<1;$$

Выполняются все условия теоремы Чаплыгина [43], поэтому

$$z^{down}(x) < R_\varepsilon(x) < z^{up}(x), x \in [0,1].$$

$$\tilde{y}_\varepsilon(x) = 2 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{1+t} - \frac{2(t+1)^2-1}{(t+1)^3} - \varepsilon\frac{2t^2+4t-1}{(t+1)^5} - \frac{1}{\varepsilon}e^{-\tau} + \frac{1}{2}\tau^2 e^{-\tau} + \varepsilon\left(e^{-\tau} + \frac{1}{8}\tau^4 e^{-\tau}\right) + O(\varepsilon^2).$$

В следующих таблицах 1, 2 и 3 приведены результаты численного эксперимента в системе Maple:

Таблица 1.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\vert y_\varepsilon(x) - \tilde{y}_\varepsilon(x)\vert$ **ε=0,1**	0,2	$8{,}2*10^{-2}$	$1{,}9*10^{-3}$	$5{,}1*10^{-4}$	$1{,}7*10^{-5}$	$7{,}2*10^{-6}$
$\vert y_\varepsilon(x) - \tilde{y}_\varepsilon(x)\vert$ ε=0,01	0,02	0	10^{-9}	10^{-9}	10^{-9}	0

Таблица 2.

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\vert y_\varepsilon(x) - \tilde{y}_\varepsilon(x)\vert$ **ε=0,001**	0,002	$2*10^{-8}$	$1*10^{-8}$	$1*10^{-8}$	0	0

Таблица 3.

x	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005
$\vert y_\varepsilon(x) - \tilde{y}_\varepsilon(x)\vert$ **ε=0,0001**	0,0002	10^{-6}	0	0	0	0

§ 3.3. Общий случай

В данном параграфе обобщается задача, исследованная в предыдущем параграфе 3.2. Выясним влияние кратности особой точки на промежуточный пограничный слой. Приводится условие при выполнениях которого появляется промежуточный пограничный слой.

Постановка задачи. Исследуем задачу Коши

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x) + (x^\gamma q(x) + \varepsilon^m p(x)) y_\varepsilon(x) = f(x), \ x \in [0, T], \tag{3.3.1}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \tag{3.3.2}$$

где $n, m, \gamma \in \mathbf{N}$, a – const, $f(0)\neq 0$, $f, q, p \in C^\infty[0,T]$, $0 < \alpha_0 < q(x)$, $0 < \alpha_0 < p(x) : x \in [0,T]$, γ – кратность особой точки $x=0$.

Решение начальной задачи существует, единственно. Требуется определить при каких значениях параметров n, γ и m появляется промежуточный пограничный слой и в этом случае построить равномерное асимптотическое приближение решения начальной задачи (3.3.1)-(3.3.2) на отрезке $[0,T]$, когда малый параметр стремится к нулю.

Для решения поставленной задачи сначала приведем условие существования промежуточного пограничного слоя, далее построим асимптотическое решение начальной задачи (3.3.1)-(3.3.2).

Начальная задача (3.3.1)-(3.3.2) имеет такие же особенности как задачи исследованные в предыдущих параграфах.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.4. Если $n > m + \dfrac{m}{\gamma}$, то начальная задача (3.3.1)-(3.3.2) является трех зонной бисингулярной задачей.

Доказательство. Для доказательства теоремы, как и в предыдущем параграфе, покажем, что в пограничном слое имеется два характерных предела, кроме внешнего, которые будут включать в себя два внутренних разложения.

Пусть $x=\varepsilon^\alpha t$, $\alpha>0$, тогда $dx=\varepsilon^\alpha dt$ и уравнение (3.3.1) перепишется в виде:

$$\varepsilon^{n-\alpha}\frac{dy_{\varepsilon}(t)}{dt}+(\varepsilon^{\alpha\gamma}t^{\gamma}q(\varepsilon^{\alpha}t)+\varepsilon^{m}p(\varepsilon^{\alpha}t))y_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t) \qquad (3.3.3)$$

Уравнивая порядков поведения слагаемых по малому параметру двух любых членов имеем соответствующие характерные пределы, возможны следующие три случаи:

$$1)\ n-\alpha=\alpha\gamma\Rightarrow\alpha=\frac{n}{\gamma+1}\ ;$$

$$2)\ n-\alpha=m\ \Rightarrow\alpha=n-m;$$

$$3)\ \alpha j=m\Rightarrow\alpha=\frac{m}{\gamma}.$$

Достаточность. В первом случае

$$\varepsilon^{n\frac{\gamma}{\gamma+1}}\left(\frac{dy_{\varepsilon}(t)}{dt}+t^{\gamma}q(\varepsilon^{\alpha}t)y_{\varepsilon}(t)\right)+\varepsilon^{m}p(\varepsilon^{\alpha}t))y_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t), \qquad (3.3.4)$$

пусть $y_{\varepsilon}(t)=\varepsilon^{-m}\psi_{\varepsilon}(t)$ тогда (3.3.4) примет вид:

$$\varepsilon^{n\frac{\gamma}{\gamma+1}-m}\left(\frac{d\psi_{\varepsilon}(t)}{dt}+t^{\gamma}q(\varepsilon^{\alpha}t)\psi_{\varepsilon}(t)\right)+p(\varepsilon^{\alpha}t))\psi_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t)$$

по условию теоремы $n\frac{\gamma}{\gamma+1}>m$, поэтому этот случай исключается.

Во втором случае

$$\varepsilon^{m}\left(\frac{dy_{\varepsilon}(t)}{dt}+p(\varepsilon^{\alpha}t))y_{\varepsilon}(t)\right)+\varepsilon^{\gamma(n-m)}t^{\gamma}q(\varepsilon^{\alpha}t)y_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t), \qquad (3.3.5)$$

пусть $y_{\varepsilon}(t)=\varepsilon^{-m}\psi_{\varepsilon}(t)$ тогда (3.3.5) примет вид:

$$\left(\frac{d\psi_{\varepsilon}(t)}{dt}+t^{\gamma}q(\varepsilon^{\alpha}t)\psi_{\varepsilon}(t)\right)+\varepsilon^{\gamma n-m(\gamma+1)}p(\varepsilon^{\alpha}t))\psi_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t)$$

по условию теоремы $n\gamma-m(\gamma+1)>0$, поэтому этот случай требует исследования.

В третьем случае

$$\varepsilon^{n-\frac{m}{\gamma}}\frac{dy_{\varepsilon}(t)}{dt}+\varepsilon^{m}(t^{\gamma}q(\varepsilon^{\alpha}t)+p(\varepsilon^{\alpha}t))y_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t), \qquad (3.3.6)$$

пусть $y_{\varepsilon}(t)=\varepsilon^{-m}\psi_{\varepsilon}(t)$ тогда (3.3.6) примет вид:

$$\varepsilon^{n-\frac{\gamma+1}{\gamma}m}\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+(t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию теоремы $n-\dfrac{\gamma+1}{\gamma}m>0$, поэтому этот случай требует исследования.

Мы доказали, что в пограничном слое имеется два характерных предела, кроме внешнего, которые будут включать в себя два внутренних разложения:

$$1)\ x=\varepsilon^{n-m}\tau; \qquad 2)\ x=\varepsilon^{\frac{m}{\gamma}}t.$$

Так как $n>m+\dfrac{m}{\gamma}$, поэтому $n-m>\dfrac{m}{\gamma}$.

Изменение масштаба $\tau=\dfrac{x}{\varepsilon^{n-m}}$, соответствующее $\alpha=n-m$, описывает подслой (пограничный слой) вблизи начальной точки x=0, которую будем называть левой зоной. А изменение масштаба $t=\dfrac{x}{\varepsilon^{m/\gamma}}$, соответствующее $\alpha=\dfrac{m}{\gamma}$, определяет другую область, лежащую между левой зоной и областью внешнего разложения, т.е. правой зоной называют средней зоной.

В задачах вязко-невязких взаимодействий эти зоны обычно называются нижним, средним и верхним подслоем соответственно [37].

Необходимость. Покажем, что в случае $n\le m+\dfrac{m}{\gamma}$ в окрестности особой точки имеется только один характерный предел.

а) При $n=m+\dfrac{m}{\gamma}$ во всех трех случаях ($\alpha=n/(\gamma+1)$; $\alpha=n-m$;

$\alpha=m/\gamma$) получаем только один характерный предел:

$$\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t),$$

где $\psi_\varepsilon(t)=\varepsilon^m y_\varepsilon(t)$.

б) При $n<m+\dfrac{m}{\gamma}$:

в первом случае пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-n\frac{\gamma}{\gamma+1}}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (3.3.4) примет вид:

$$\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+\varepsilon^{m-n\frac{\gamma}{\gamma+1}}p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию $n<m+\dfrac{m}{\gamma}$, поэтому – это один из характерных пределов.

Во втором случае, пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-\gamma(n-m)}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (3.3.5) примет вид:

$$\varepsilon^{m(\gamma+1)-\gamma n}\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию $n<m+\dfrac{m}{\gamma}$, поэтому этот случай не рассматривается.

В третьем случае, пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{\frac{m}{\gamma}-n}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (3.3.6) примет вид:

$$\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+\varepsilon^{\frac{\gamma+1}{\gamma}m-n}(t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)+p(\varepsilon^\alpha t))y_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию $n<m+\dfrac{m}{\gamma}$, поэтому этот случай тоже не рассматривается.

В итоге получается только один характерный предел:

$$\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+\varepsilon^{m-n\frac{\gamma}{\gamma+1}}p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t).$$

Теорема доказана.

Формальное асимптотическое приближение

Для удобства вычислений будем считать, что $n=mk,\ 1+\dfrac{1}{\gamma}<k\in N$ и введем обозначение $\varepsilon^m=\lambda$ - малый параметр. Тогда задача (3.3.1)-(3.3.2) примет вид:

$$\lambda^k y'_\lambda(x)+(x^\gamma q(x)+\lambda p(x))y_\lambda(x)=f(x),\ x\in[0,T],\quad y_\lambda(0)=a, \tag{3.3.7}$$

Решение задачи (3.3.8) при $1+\dfrac{1}{\gamma}<k\in N$ будем искать в виде суммы трех неизвестных функций:

$$y_\lambda(x)=v_\lambda(x)+w_\mu(t)+\pi_\lambda(\tau), \tag{3.3.8}$$

где $x = t\mu$, $\mu = \lambda^{1/\gamma}$, $x = \tau\lambda^{k-1}$.

Подставляя (3.3.8) в задачу (3.3.7) составим три задачи:

$$\lambda^k v'_\lambda(x) + (x^\gamma q(x) + \lambda p(x))v_\lambda(x) = f(x) - h_\lambda(x),\ x \in [0,T], \tag{3.3.9}$$

$$\mu^{k\gamma-1} w'_\mu(t) + \mu^\gamma (t^\gamma q(t\mu) + p(t\mu))w_\mu(t) = h_\mu(t\mu),\ t \in [0,\mu^{-1}T], \tag{3.3.10}$$

$$\lambda(\pi'_\lambda(\tau) + p(\tau\lambda^{k-1})\pi_\lambda(\tau)) + \tau^\gamma\lambda^{(k-1)\gamma} q(\tau\lambda^{k-1})\pi_\lambda(\tau) = 0,\ \tau \in [0,\lambda^{1-k}T], \tag{3.3.11}$$

$$\pi_\lambda(0) = a - v_\lambda(0) - w_\lambda(0), \tag{3.3.12}$$

где $h_\lambda(x)$ – пока неизвестная функция, зависящая от малого параметра и переменной x.

Решение задачи (3.3.9)

Как и в предыдущем параграфе, гладкое решение задачи (3.3.9) будем искать в виде ряда $v_\lambda(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i v_i(x)$, но теперь здесь $h_\lambda(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i h_i(x)$. Тогда уравнение (3.3.9) можно представить в виде:

$$v'_{i-k}(x) + x^j q(x)v_i(x) + p(x)v_{i-1}(x) = f(x) - h_i(x),\quad i = 0,1,... \tag{3.3.13}$$

где $v_s(x) \equiv 0, s < 0$.

Из равенства (3.3.13) находим $v_i(x)$:

$$v_i(x) = \frac{f(x) - p(x)v_{i-1}(x) - v'_{i-k}(x) - h_i(x)}{x^\gamma q(x)},\ 2 < k \in N.$$

В частности,

$$v_0(x) = \frac{f(x) - h_0(x)}{x^\gamma q(x)};\ v_1(x) = -\frac{p(x)v_0(x) + h_1(x)}{x^\gamma q(x)}.$$

Если мы неизвестные функции $h_\lambda(x)$ выберем в виде $h_j(x) = \sum_{i=0}^{\gamma-1} f_{j,i} x^i$,

где $f_{j,i} = \frac{1}{i!} f_j^{(i)}(0)$, $f_0(x) \equiv f(x)$, $f_1(x) = -p(x)v_0(x)$,

$$f_j(x) = -(p(x)v_{j-1}(x) + v'_{j-k}(x)),\ v_s(x) \equiv 0, s < 0,$$

то имеем: $v_j \in C^\infty[0,T]$, $j = 0,1,...$

Решение задачи (3.3.10)

Решение этой задачи будем искать в виде $w_\mu(t)=\mu^{-\gamma}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w_j(t)$, подставим это выражение в (3.3.10):

$$\mu^{\gamma(k-1)-1}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w'_j(t)+(t^\gamma q(\mu t)+p(\mu t))\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w_j(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\mu^{\gamma j}h_j(\mu t),\ t\in[0,\mu^{-1}T],$$ при

равнивая коэффициенты малого параметра с одинаковыми степенями, получим:

$$w_0(t)=\frac{h_0(t\mu)}{t^\gamma q(t\mu)+p(t\mu)},\ w_j(t)\equiv 0,\quad j=0,1,...,\gamma(k-1)-2;$$

$$w_{\gamma(k-1)-1}(t)=-\frac{w'_0(t)}{t^\gamma q(t\mu)+p(t\mu)},w_{\gamma j}(t)=\frac{h_j(t\mu)-w'_{j\gamma-\gamma(k-1)+1}(t)}{t^\gamma q(t\mu)+p(t\mu)},$$

$$w_s(t)=-\frac{w'_{s-\gamma(k-1)+1}(t)}{t^\gamma q(t\mu)+p(t\mu)},\ s\neq\gamma j.$$

Еще раз отметим, что функций $w_k(t)$ являются промежуточными пограничными функциями в окрестности x=0 и эти функций убывают степенным характером при $t\to\infty$.

Решение задачи (3.3.11)-(3.3.12)

Решение начальной задачи (3.3.11)-(3.3.12) ищем в виде $\pi_\lambda(\tau)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi_j(\tau)$. Подставляя это равенство в (3.3.11) и (3.3.12) получим задачи:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j(\pi'_i(\tau)+p(\tau\lambda^{k-1})\pi_i(\tau))=-\tau^\gamma\lambda^{(k-1)\gamma-1}q(\tau\lambda^{k-1})\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi_j(\tau),\ \tau\in[0,\lambda^{1-k}T],\quad (3.3.14)$$

$$\pi_0(0)=-\sum_{j=0}^{\gamma-1}\lambda^{j/\gamma}w_j(0);\ \pi_1(0)=a-v_0(0)-\sum_{j=0}^{\gamma-1}\lambda^{j/\gamma}w_{\gamma+j}(0);$$
$$\pi_i(0)=-v_{i-1}(0)-\sum_{j=0}^{\gamma-1}\lambda^{j/\gamma}w_{i\gamma+j}(0),\ i=2,3,...\quad (3.3.15)$$

По условию задачи функций $q,p\in C^\infty[0,T],\ 0<\alpha_0<q(x)$, $0<\alpha_0<p(x):x\in[0,T]$. Поэтому справедливы разложения

$$p(\tau\lambda^{k-1})=\sum_{j=0}^{\infty}\tau^j\lambda^{(k-1)j}p_j,\ p_j=\frac{1}{j!}p^{(j)}(0);$$

$$q(\tau\lambda^{k-1})=\sum_{j=0}^{\infty}\tau^j\lambda^{(k-1)j}q_j,\ q_j=\frac{1}{j!}q^{(j)}(0).$$

На основании доказанной леммы 3.1 решения задач (3.3.14)-(3.3.15) существуют, единственны и экспоненциально убывают при $\tau\to\infty$.

Таким образом, нами определены все слагаемые (3.3.8). Перейдем к оценке остаточного члена разложения

$$y_\lambda(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j v_j(x)+\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w_j(t)+\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi_j(\tau).$$

Оценка остаточного члена

Пусть

$$y_\lambda(x)=y_{s,\lambda}(x)+R_{s,\lambda}(x),$$

где $y_{s,\lambda}(x)=\sum_{j=0}^{s}\lambda^j v_j(x)+\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\gamma s}\mu^j w_j(t)+\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{s}\lambda^j\pi_j(\tau)$,

$R_{s,\varepsilon}(x)$ – остаточная функция.

Тогда для остаточного члена получим следующую начальную задачу

$$\lambda^k R'_{s,\lambda}(x)+(x^\gamma q(x)+\lambda p(x))R_{s,\lambda}(x)=O(\lambda^{s+1}),\ x\in[0,T],\quad R_{s,\varepsilon}(0)=0. \quad (3.3.16)$$

Решение задачи (3.3.16) оценивается точно также, как и в предыдущем параграфе:

$$R_{s,\lambda}(x)=O(\lambda^{s+1-k})e^{-\frac{1}{\lambda^k}\int_0^x(s^\gamma q(s)+\lambda p(s))ds}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda^k}\int_0^\xi(s^\gamma q(s)+\lambda p(s))ds}d\xi=$$

$$=O(\lambda^{s+1})e^{-\frac{1}{\lambda^k}\int_0^x(s^\gamma q(s)+\lambda p(s))ds}\int_0^x\frac{1}{\xi^\gamma q(\xi)+\lambda p(\xi)}de^{\frac{1}{\lambda^k}\int_0^\xi(s^\gamma q(s)+\lambda p(s))ds}=$$

$$=O(\lambda^{s+1})e^{-\frac{1}{\lambda^k}\int_0^x(s^\gamma q(s)+\lambda p(s))ds}\left(\frac{1}{x^\gamma q(x)+\lambda p(x)}e^{\frac{1}{\lambda^k}\int_0^x(s^\gamma q(s)+\lambda p(s))ds}-\frac{1}{\lambda p(0)}\right)+$$

$$+O(\lambda^s)e^{-\frac{1}{\lambda^k}\int_0^x (s^\gamma q(s)+\lambda p(s))ds}\int_0^x \frac{\gamma\xi^{\gamma-1}q(\xi)+\xi^\gamma q'(\xi)+\lambda p'(\xi)}{(\xi^\gamma q(\xi)+\lambda p(\xi))^2}e^{\frac{1}{\lambda^k}\int_0^\xi (s^\gamma q(s)+\lambda p(s))ds}d\xi,\ \lambda\to 0.$$

Отсюда имеем:

$$R_{s,\lambda}(x)=O(\lambda^s),\ \lambda\to 0.$$

Теорема 3.5. Для решения задачи Коши (3.3.7) при $n>m+\dfrac{m}{\gamma}$ на отрезке $x\in[0,T]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y_\lambda(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j v_j(x)+\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w_j(t)+\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi_j(\tau),\ \varepsilon\to 0.$$

Пример 3.2. Рассмотрим задачу

$\varepsilon^2 y'_\varepsilon(x)+(x^3+\varepsilon)y_\varepsilon(x)=1-x^2+x^4+x^5,\ x\in[0,1],\ y_\varepsilon(0)=2.$

В нашем примере

$$n=2,\ m=1,\ \gamma=3,\ f(x)=1-x^2+x^4+x^5,\ a=2,\ x=t\mu,\ \mu=\varepsilon^{1/3},\ x=\tau\varepsilon.$$

Поэтому

$$y_\varepsilon(x)=v_0(x)+\varepsilon v_1(x)+\varepsilon^2 v_2(x)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\Big(w_0(t)+\mu w_1(t)+\mu^2 w_2(t)+\mu^3 w_3(t)+\mu^4 w_4(t)+\mu^5 w_5(t)+\mu^6 w_6(t)\Big)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}(\pi_0(\tau)+\varepsilon\pi_1(\tau)+\varepsilon^2\pi_2(\tau))+O(\varepsilon^2),\ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,T].$$

где

$$v_0(x)=\frac{1-x^2+x^4+x^5-h_0(x)}{x^3}=x+x^2,\quad h_0(x)=1-x^2;$$

$$v_1(x)=-\frac{v_0(x)+h_1(x)}{x^3}=-\frac{x+x^2+h_1(x)}{x^3}=0,\ h_1(x)=-x-x^2;$$

$$v_2(x)=-\frac{v_1(x)+v'_0(x)+h_2(x)}{x^3}=-\frac{1+2x+h_2(x)}{x^3}=0,\ h_2(x)=-1-2x;$$

$$v_i(x)\equiv 0,\ h_i(x)\equiv 0;\ 2<i\in N.$$

$$w_0(t)=\frac{1-t\mu}{t^3+1}, \quad w_1(t)\equiv 0, \quad w_2(t)=-\frac{w'_0(t)}{t^3+1},$$

$$w_3(t)=-\frac{t\mu+(t\mu)^2}{t^3+1}, \quad w_4(t)=-\frac{w'_2(t)}{t^3+1},$$

$$w_5(t)=-\frac{w'_3(t)}{t^3+1}, \quad w_6(t)=-\frac{1+2t\mu+w'_4(t)}{t^3+1},$$

$$\pi_0(\tau)=-(1-\varepsilon)e^{-\tau}, \quad \pi_1(\tau)=(2-\varepsilon)e^{-\tau},$$

$$\pi_2(\tau)=-6e^{-\tau}+\frac{\tau^4}{4}(1-\varepsilon)e^{-\tau}.$$

Заключение по главе 3

Новизна данной главы заключается в том, что для одного класса бисингулярных задач первого порядка получены достаточное и необходимое условия существования промежуточного пограничного слоя. С помощью оригинального подхода к решению поставленной задачи построено полное равномерное асимптотическое разложение решения бисингулярной задачи с промежуточным пограничным слоем.

Построено решение в виде асимптотического ряда в смысле Эрдей и получена оценка для остаточного члена.

Для простоты мы привели результаты исследования для первого порядка, аналогичное явление может появляется и в уравнениях высшего порядка и не только в обыкновенных, но и в частных производных.

Научные результаты этой главы опубликованы в журнале “Труды Института математики и механики Уральского отделения Российской академии наук”, [44]. Журнал индексируется в базах Scopus и Web of Science.

ГЛАВА 4. ТРЕХ ЗОННЫЕ БИСИНГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 4.1. Сингулярно возмущенная задача с двойным пограничным слоем

В данном параграфе исследуется асимптотическое поведение решения двух точечной краевой задачи на отрезке для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Существенные особенности задачи – существование двухслойного (двух зонного) пограничного слоя и не гладкость решения соответствующей невозмущенной задачи. Асимптотическое разложение исследуемой задачи построено обобщенным и классическим методами погранфункций и с помощью принципа максимума получена оценка для остаточного члена разложения. Построенное асимптотическое разложение решения двух точечной краевой задачи является асимптотическим в смысле Эрдей.

Постановка задачи. Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$\varepsilon^3 y_\varepsilon''(x) + x^4 y_\varepsilon'(x) + (x^4 - \varepsilon) y_\varepsilon(x) = f(x),\ x \in [0,1], \tag{4.1.1}$$

$$y_\varepsilon(0) = a,\ y_\varepsilon(1) = b, \tag{4.1.2}$$

где a, b – известные постоянные, $f \in C^\infty[0,1]$, $f(0) \neq 0$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Уравнение (4.1.1) описывает два тесно связанных между собой процесса. Первое – это стационарное распределение тепла в движущейся среде, зависящее от одной переменной x. Малый параметр ε – это малая теплопроводность, а коэффициент $p(x)=x^4$ связан со скоростью среды. Другая интерпретация связана со случайным блужданием частицы на отрезке при условии, что $p(x)=x^4$ определяет среднюю скорость движения, а параметр ε – малую дисперсию [28].

Требуется построить равномерное асимптотическое приближение решения двухточечной краевой задачи (4.1.1)-(4.1.2) на отрезке [0,1], когда малый параметр стремится к нулю, т.е. при $\varepsilon \to 0$.

Если формально считать, что значение малого параметра равна нулю, т.е. $\varepsilon=0$, то получим дифференциальное уравнение первого порядка с особой точкой при $x=0$:

$$x^4 y_0'(x) + x^4 y_0(x) = f(x). \tag{4.1.3}$$

Нетрудно заметить, что решение (4.1.3) – дифференциального уравнения первого порядка в особой точке $x=0$ не существует. Т.е. решение соответствующего невозмущенного дифференциального уравнения в левой граничной точке не существует.

Поэтому в уравнении (4.1.1) в окрестности особой точки $x=0$ введем преобразование, т.е. растяжение координатной оси $x=\varepsilon^{\alpha}t$, $0<\alpha=\text{const}$, тогда по правилам дифференцирования получаем $\mathrm{d}x=\varepsilon^{\alpha}\mathrm{d}t$ и $\mathrm{d}x^2=\varepsilon^{2\alpha}\mathrm{d}t^2$. В данном случае уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\varepsilon^{3-2\alpha}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2} + \varepsilon^{3\alpha}t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} + (\varepsilon^{4\alpha}t^4 - \varepsilon)y_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t),\ t \in (0, \varepsilon^{-\alpha}). \tag{4.1.4}$$

Когда малый параметр ε стремится к нулю предельная форма уравнения (4.1.4) зависит от значения величины α. При положительном значений величины α справедливо неравенство: $3\alpha<4\alpha$. Поэтому из левой части равенства (4.1.4) «главной» будет следующее выражение:

$$\varepsilon^{3-2\alpha}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2} + \varepsilon^{3\alpha}t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} - \varepsilon y_\varepsilon(t).$$

Уравнивая порядки поведения слагаемых по малому параметру двух любых слагаемых (4.1.4) имеем соответствующие характерные пределы, возможны следующие случаи:

1) $3-2\alpha=3\alpha \Rightarrow \alpha=3/5$;

2) $3-2\alpha=1 \Rightarrow \alpha=1$;

3) $3\alpha=1 \Rightarrow \alpha=1/3$.

Если $\alpha=3/5$ (первый случай), то получим выражение

$$\varepsilon^{9/5}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon^{9/5}t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t),$$

так как $\varepsilon^{9/5}<\varepsilon$, то главной частью этого выражения будет $\varepsilon y_\varepsilon(t)$, и здесь отсутствует производная. Поэтому первый случай, т.е. α=3/5 не будем рассматривать.

Если α=1 (второй случай), то получим выражение

$$\varepsilon\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon^3t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t),$$

в главной части $\varepsilon\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}-\varepsilon y_\varepsilon(t)$ присутствует производная второго порядка. Поэтому случай α=1 будем исследовать.

И наконец третий случай, если α=1/3, то получим выражение

$$\varepsilon^{7/3}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t)$$

в главной части $\varepsilon t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t)$ присутствует производная первого порядка. Поэтому и этот случай α=1/3 будем исследовать.

Формальное асимптотическое приближение решения задачи (4.1.1)-(4.1.2). В задаче (4.1.1)-(4.1.2) сделаем преобразование

$$y_\varepsilon(x)=be^{1-x}z_\varepsilon(x),$$

где $z_\varepsilon(x)$ – новая неизвестная функция.

Тогда

$$y'_\varepsilon(x)=-be^{1-x}(z_\varepsilon(x)-z'_\varepsilon(x)),$$
$$y''_\varepsilon(x)=be^{1-x}(z_\varepsilon(x)-2z'_\varepsilon(x)+z''_\varepsilon(x)),$$

и задача (4.1.1)-(4.1.2) приводится к виду:

$$\varepsilon^3z_\varepsilon''(x)+(x^4-2\varepsilon^3)z_\varepsilon'(x)+(\varepsilon^3-\varepsilon)z_\varepsilon(x)=\tilde f(x),\ x\in(0,1), \tag{4.1.5}$$

$$z_\varepsilon(0)=\tilde a,\ z_\varepsilon(1)=1, \tag{4.1.6}$$

где $\tilde f(x)=\frac{1}{b}e^{x-1}f(x)$.

Решение задачи (4.1.5), (4.1.6) будем искать в виде ряда:

$$z_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\pi_k(\tau)+\frac{1}{\mu^3}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k w_k(t), \qquad (4.1.7)$$

где $t=\dfrac{x}{\mu},\ \mu=\sqrt[3]{\varepsilon},\ \tau=\dfrac{x}{\varepsilon}$.

Как и в предыдущем главе к правой части уравнения (4.1.5) добавим и вычтем пока неизвестную функцию $h_\varepsilon(x)$. Т.е. уравнение (4.1.1) запишем в виде:

$$\varepsilon^3 z_\varepsilon''(x)+(x^4-2\varepsilon^3)z_\varepsilon'(x)+(\varepsilon^3-\varepsilon)z_\varepsilon(x)=\tilde f(x)-h_\varepsilon(x)+h_\varepsilon(x),\ x\in(0,1), \qquad (4.1.8)$$

Подставляя соотношение (4.1.7) в уравнение (4.1.8) и в краевые условия (4.1.6) получаем задачи:

$$\varepsilon^3\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v''_k(x)+(x^4-2\varepsilon^3)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v'_k(x)+(\varepsilon^3-\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)=\tilde f(x)-h_\varepsilon(x), \qquad (4.1.9)$$

$$v_0(1)=1,\ v_k(1)=0,\ k\in N; \qquad (4.1.10)$$

$$\mu^4\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k w''_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(t^4 w'_k(t)-w_k(t))-2\mu^5\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k w'_k(x)+$$
$$+\mu^6\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k w_k(x)=h_\mu(t),\ t\in(0,1/\mu), \qquad (4.1.11)$$

$$w_k(1/\mu)=0,\ k\in N_0; \qquad (4.1.12)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(\pi''_k(\tau)-\pi_k(\tau))=2\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\pi'_k(\tau)-\varepsilon^2\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(\tau^4\pi'_k(\tau)+\pi_k(\tau)),\ \tau\in(0,1/\varepsilon), \qquad (4.1.13)$$

$$\pi_0(0)=-(w_0(0)+\mu w_1(0)+\mu^2 w_2(0)),\ \lim_{\tau\to\infty}\pi_0(\tau)=0; \qquad (4.1.14)$$

$$\pi_1(0)=a-(v_0(0)+w_3(0)+\mu w_4(0)+\mu^2 w_5(0)),\ \lim_{\tau\to\infty}\pi_1(\tau)=0; \qquad (4.1.15)$$

$$\pi_j(0)=-(v_{j-1}(0)+w_{3j}(0)+\mu w_{3j+1}(0)+\mu^2 w_{3j+2}(0)),\ \lim_{\tau\to\infty}\pi_j(\tau)=0,\ 1<j\in N. \qquad (4.1.16)$$

Пусть

$$h_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(h_{k,0}+h_{k,1}x+h_{k,2}x^2+h_{k,3}x^3), \qquad (4.1.17)$$

$h_{k,j}$ – пока неопределенные числа, конкретизируются ниже.

Рассмотрим задачу (4.1.9)-(4.1.10). Задачу (4.1.9)-(4.1.10) запишем в виде:

$$x^4 v'_0(x) = \tilde{f}(x) - (h_{0,0} + h_{0,1}x + h_{0,2}x^2 + h_{0,3}x^3), \ x \in (0,1), v_0(1) = 1; \qquad (4.1.18)$$

$$x^4 v'_k(x) = \tilde{f}_k(x) - (h_{k,0} + h_{k,1}x + h_{k,2}x^2 + h_{k,3}x^3), \ x \in (0,1), \ v_k(1) = 0, \qquad (4.1.19)$$

где $\tilde{f}_k(x) = v_{k-1}(x) - v_{k-3}(x) + 2v'_{k-3}(x) - v''_{k-3}(x), \ v_s(x) \equiv 0, \ \mathrm{s} < 0.$

Интегрируя краевую задачу (4.1.18) имеем:

$$v_0(x) = 1 + \int_1^x \frac{\tilde{f}(s) - h_{0,0} - h_{0,1}s - h_{0,2}s^2 - h_{0,3}s^3}{s^4} ds.$$

По условию задачи $\tilde{f} \in C^\infty[0,1],$, поэтому функцию $\tilde{f}(x)$ в окрестности точки x=0 можно представить в виде:

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) + \tilde{f}'(0)x + \frac{\tilde{f}''(0)}{2}x^2 + \frac{\tilde{f}'''(0)}{6}x^3 + x^4 \tilde{f}_0(x).$$

Если неизвестные коэффициенты $h_{0,j}$ выбрать следующим образом:

$$h_{0,0} = \tilde{f}(0), \ h_{0,1} = \tilde{f}'(0), \ h_{0,2} = \frac{\tilde{f}''(0)}{2}, \ h_{0,3} = \frac{\tilde{f}'''(0)}{6},$$

то получим гладкую функцию:

$$v_0(x) = 1 + \int_1^x \tilde{f}_0(s)ds \Rightarrow v_0 \in C^\infty[0,1],$$

где $\tilde{f}_0(x) = \dfrac{1}{x^4}\left(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0) - \tilde{f}'(0)x - \dfrac{\tilde{f}''(0)}{2}x^2 - \dfrac{\tilde{f}'''(0)}{6}x^3\right),$

$\tilde{f}_0(0) = \dfrac{\tilde{f}^{IV}(0)}{24}$.

Аналогично, интегрируя задач (4.1.19), получим:

$$x^4 v'_k(x) = \tilde{f}_k(x) - (h_{k,0} + h_{k,1}x + h_{k,2}x^2 + h_{k,3}x^3), \ x \in (0,1), \ v_k(1) = 0$$

$$v_k(x) = \int_1^x \frac{\tilde{f}_k(s) - h_{k,0} - h_{k,1}s - h_{k,2}s^2 - h_{k,3}s^3}{s^4} ds,$$

где $\tilde{f}_k(x) = v_{k-1}(x) - v_{k-3}(x) + 2v'_{k-3}(x) - v''_{k-3}(x), \ v_s(x) \equiv 0, \ \mathrm{s} < 0.$

И здесь мы определим значения неизвестных коэффициентов $h_{k,\mathrm{j}}$. Пусть

$$\tilde{f}_k(x) = \tilde{f}_k(0) + \tilde{f}'_k(0)x + \frac{\tilde{f}''_k(0)}{2}x^2 + \frac{\tilde{f}'''_k(0)}{6}x^3 + x^4 \tilde{\tilde{f}}_k(x)$$

и

$$h_{k,0}=\tilde{f}_k(0),\ h_{k,1}=\tilde{f}\,'_k(0),\ h_{k,2}=\frac{\tilde{f}\,''_k(0)}{2},\ h_{k,3}=\frac{\tilde{f}\,'''_k(0)}{6},\ k\in N.,$$

тогда

$$v_k(x)=\int_1^x \tilde{\tilde{f}}_k(s)ds\ \Rightarrow\ v_k\in C^{\infty}[0,1],\ k\in N.$$

Перейдем теперь к задаче (4.1.11)-(4.1.12). Уравнение (4.1.11) запишем в виде:

$$\begin{aligned}Lw_k\equiv t^4w'_k(t)-w_k(t)=-w''_{k-4}(t)+2w'_{k-5}(t)-w_{k-6}(t)+\\+h_{k,0}+(\mu t)h_{k,1}+(\mu t)^2h_{k,2}+(\mu t)^3h_{k,3},\ t\in(0,1/\mu),\end{aligned}\qquad(4.1.20)$$

В задаче (4.1.20), (4.1.12), при k=0 имеем задачу:

$$Lw_0=h_{0,0}+(\mu t)h_{0,1}+(\mu t)^2h_{0,2}+(\mu t)^3h_{0,3},\ t\in(0,1/\mu),\ w_0(1/\mu)=0,$$

последнее уравнение можно записать в виде

$$\left(w_0(t)e^{\frac{1}{3t^3}}\right)'=t^{-4}e^{\frac{1}{3t^3}}\left(h_{0,0}+\mu th_{0,1}+(\mu t)^2h_{0,2}+(\mu t)^3h_{0,3}\right),$$

интегрируя находим $w_0(t)$:

$$w_0(t)=e^{-\frac{1}{3t^3}}\int_{\mu^{-1}}^{t}s^{-4}e^{\frac{1}{3s^3}}\left(h_{0,0}+h_{0,1}\mu s+h_{0,2}(\mu s)^2+h_{0,3}(\mu s)^3\right)ds.$$

Отметим некоторые свойства функции $w_0(t)$:

$$a)\ w_0(0)=-h_{0,0},\quad b)\ w_0(t)\to-\frac{h_{0,0}}{t^3},\ t\to\infty,\quad c)\ w_0\in C^{\infty}[0,1/\mu].$$

Аналогично, при k=1,2… получим задачи:

$$\begin{aligned}Lw_j=h_{j,0}+(\mu t)h_{j,1}+(\mu t)^2h_{j,2}+(\mu t)^3h_{j,3},\\ t\in(0,1/\mu),\ w_j(1/\mu)=0,\ j=1,2,3;\end{aligned}$$

$$Lw_4=-w''_0(t)+h_{4,0}+(\mu t)h_{4,1}+(\mu t)^2h_{4,2}+(\mu t)^3h_{4,3},\ t\in(0,1/\mu),$$

$$\begin{aligned}Lw_5=-w''_1(t)+2w'_0(t)+h_{5,0}+(\mu t)h_{5,1}+(\mu t)^2h_{5,2}+(\mu t)^3h_{5,3},\\ t\in(0,1/\mu),\ w_5(1/\mu)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Lw_k=-w''_{k-4}(t)+2w'_{k-5}(t)-w_{k-6}(t)+\\+h_{k,0}+(\mu t)h_{k,1}+(\mu t)^2h_{k,2}+(\mu t)^3h_{k,3},\ t\in(0,1/\mu),\ w_k(1/\mu)=0,\ 5<k\in N.\end{aligned}$$

Решения этих задач существуют единственны и $w_k \in C^{\infty}(0,1/\mu]$.

Следует отметить, что функций $w_k(t)$ являются функциями пограничного слоя, но эти функций убывают вне пограничного слоя степенным характером.

Переходим к исследованию задач (4.1.13)-(4.1.16). Уравнению (4.1.13) можно записать в виде рекуррентных соотношений:

$$\pi''_0(\tau) - \pi_0(\tau) = 0, \tag{4.1.21}$$

$$\pi''_1(\tau) - \pi_1(\tau) = 2\pi'_0(\tau), \tag{4.1.22}$$

$$\pi''_k(\tau) - \pi_k(\tau) = 2\pi'_{k-1}(\tau) - (\tau^4 \pi'_{k-2}(\tau) + \pi_{k-2}(\tau)), 1 < k \in N. \tag{4.1.23}$$

Решения задач (4.1.21), (4.1.14); (4.1.22), (4.1.15) и (4.1.23), (4.1.16) существуют, единственны и представимы в виде, соответственно:

$$\pi_0(\tau) = -(w_0(0) + \mu w_1(0) + \mu^2 w_2(0))e^{-\tau},$$

$$\pi_1(\tau) = (a - v_0(0) - w_3(0) - \mu w_4(0) - \mu^2 w_5(0))e^{-\tau} - 2\pi_0(0)\tau e^{-\tau},$$

$$\pi_k(\tau) = -(v_{k-1}(0) + w_{3k}(0) + \mu w_{3k+1}(0) + \mu^2 w_{3k+2}(0))e^{-\tau} -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\int_{\tau}^{+\infty} e^{\tau-s}\Psi_k(s)ds + \int_0^{\tau} e^{s-\tau}\Psi_k(s)ds - \int_0^{+\infty} e^{-(\tau+s)}\Psi_k(s)ds \right), k = 2,3,...$$

где $\Psi_k(\tau) = 2\pi'_{k-1}(\tau) - (\tau^4 \pi'_{k-2}(\tau) + \pi_{k-2}(\tau)),\ 1 < k \in N.$

Найденные решения $\pi_k(\tau)$ устраняют “невязки” в точке x=0 и экспоненциально убывают вне пограничного слоя.

Докажем, что построенный ряд (4.1.7) является асимптотическим рядом. Для этого нам достаточно оценить остаточный член разложения (4.1.7).

Оценка остаточного члена. Пусть

$$R_{n,\varepsilon}(x) = z_\varepsilon(x) - z_{n,\varepsilon}(x),$$

где $z_{n,\varepsilon}(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(x) + \frac{1}{\mu^3}\sum_{k=0}^{3n+3} \mu^k w_k(t) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k \pi_k(\tau)$,

$R_{n,\varepsilon}(x)$ – остаточный член разложения (4.1.7).

Тогда относительно $R_{n,\varepsilon}(x)$ получим следующую двухточечную краевую задачу

$$lR_{n,\varepsilon} \equiv \varepsilon^3 R''_{n,\varepsilon}(x) + (x^4 - 2\varepsilon^3) R'_{n,\varepsilon}(x) - \varepsilon(1-\varepsilon^2) R_{n,\varepsilon}(x) -$$
$$- \varepsilon^{n+1}\Phi(x,t,\tau,\varepsilon) = 0, \; x \in (0,1), \qquad (4.1.24)$$

$$R_{n,\varepsilon}(0) = 0, \; R_{n,\varepsilon}(1) = O(e^{-1/\varepsilon}), \; \varepsilon \to 0 . \qquad (4.1.25)$$

где

$$\Phi(x,t,\tau,\varepsilon) = z_n(x) - z_{n-2}(x) + 2z'_{n-2}(x) - z''_{n-2}(x) - \varepsilon(z_{n-1}(x) - 2z'_{n-1}(x) + z''_{n-1}(x)) +$$
$$+\varepsilon^2(z_n(x) - 2z'_n(x) + z''_n(x)) - \sqrt[3]{\varepsilon}(w''_{3n}(t) - 2w'_{3n-1}(t) + w_{3n-2}(t)) -$$
$$-\sqrt[3]{\varepsilon^2}(w''_{3n+1}(t) - 2w'_{3n}(t) + w_{3n-1}(t)) - \varepsilon(w''_{3n+2}(t) - 2w'_{3n+1}(t) + w_{3n}(t)) -$$
$$-\varepsilon\sqrt[3]{\varepsilon}(w''_{3n+3}(t) - 2w'_{3n+2}(t) + w_{3n+1}(t)) + \varepsilon\sqrt[3]{\varepsilon^2}(2w'_{3n+3}(t) - w_{3n+2}(t)) - \mu^6 w_{3n+3}(t) +$$
$$+2\pi'_{n+1}(\tau) - \tau^4\pi'_n(\tau) - \pi_n(\tau) - \varepsilon(\tau^4\pi'_{n+1}(\tau) + \pi_{n+1}(\tau)).$$

Для оценки остаточной функций применяем метод дифференциальных неравенств. Пусть $u^{\text{Н}}_{\varepsilon}(x)$ – нижнее решение, а $u^{\text{В}}_{\varepsilon}(x)$ – верхнее решение и

$$u^{\text{Н}}_{\varepsilon}(x) = -\varepsilon^n M z(x), \quad u^{\text{В}}_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^n M z(x),$$

где $z(x)=1-x^2/2>0$, $M = \max\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{2\varepsilon\Phi(x,t,\tau,\varepsilon)}{2x^5 + \varepsilon\left(2 - x^2 - \varepsilon^2(4x - x^2)\right)}\right|$,

$$0 < 1{,}5 - x^2 < 2 - x^2 - 3\varepsilon^2 \le 2 - x^2 - \varepsilon^2(4x - x^2) .$$

Тогда при $x\in[0,1]$ и $0<\varepsilon<<1$ имеем:

a) $u^H_{\varepsilon}(x) < u^B_{\varepsilon}(x), \; x \in [0,1], 0 < \varepsilon << 1;$

b) $u^H_{\varepsilon}(0) < u^B_{\varepsilon}(0), \; u^H_{\varepsilon}(1) < u^B_{\varepsilon}(1), \; 0 < \varepsilon << 1;$

c) $lu^H_{\varepsilon} \ge 0, \; lu^B_{\varepsilon} \le 0.$

Действительно

$$lu^H_{\varepsilon} = M(\varepsilon^3 + x^5 - 2\varepsilon^3 x + (\varepsilon - \varepsilon^3)(1 - \frac{x^2}{2})) - \varepsilon\Phi(x,t,\tau,\varepsilon) =$$
$$= \frac{1}{2}(2x^5 + \varepsilon(2 - x^2 - \varepsilon^2(4x - x^2)))\left(M - \frac{2\varepsilon\Phi(x,t,\tau,\varepsilon)}{2x^5 + \varepsilon(2 - x^2 - \varepsilon^2(4x - x^2))}\right) \ge 0;$$

$$lu^B_{\varepsilon} = \varepsilon^n(-M(\varepsilon^3 + x^5 - 2\varepsilon^3 x + (\varepsilon - \varepsilon^3)(1 - \frac{x^2}{2})) - \varepsilon\Phi(x,t,\tau,\varepsilon)) =$$
$$= -\frac{\varepsilon^n}{2}(2x^5 + \varepsilon(2 - x^2 - \varepsilon^2(4x - x^2)))\left(M - \frac{2\varepsilon\Phi(x,t,\tau,\varepsilon)}{2x^5 + \varepsilon(2 - x^2 - \varepsilon^2(4x - x^2))}\right) \le 0.$$

Поэтому, задача (4.1.24), (4.1.25) имеет единственное решение $R_{n,\varepsilon}(x)$, которое ограничено верхним и нижнем решениям:

$$u^{H}{}_{\varepsilon}(x) \le R_{n,\varepsilon}(x) \le u^{B}{}_{\varepsilon}(x), \quad при \quad x \in [0,1], 0 < \varepsilon << 1;$$

$$\text{т.е. } -\varepsilon^{n} Mz(x) \le R_{n,\varepsilon}(x) \le \varepsilon^{n} Mz(x), \quad при \quad x \in [0,1], 0 < \varepsilon << 1.$$

Отсюда следует, что $R_{n,\varepsilon}(x) = \mathrm{O}(\varepsilon^{n}), \quad при \;\; \varepsilon \to 0, \;\; x \in [0,1].$

Теорема 4.1. Для решения двухточечной краевой задачи (4.1.1) и (4.1.2) на отрезке $x \in [0,1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y_{\varepsilon}(x) = be^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^{k} v_{k}(x) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^{k} \pi_{k}(\tau) + \frac{1}{\mu^{3}}\sum_{k=0}^{3n+3} \mu^{k} w_{k}(t)\right) + O(\varepsilon^{n}), \ \varepsilon \to 0.$$

Эти результаты опубликованы в журнале “Вестник ОшГУ”, [46].

§ 4.2. Квадратичный рост сингулярности в сингулярной точке

Постановка задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\varepsilon^4 y''_\varepsilon(x) + x^2 p(x) y'_\varepsilon(x) - \varepsilon q(x) y_\varepsilon(x) = f(x),\ x \in [0,1], \tag{4.2.1}$$

$$y_\varepsilon(0) = a,\ y_\varepsilon(1) = b, \tag{4.2.2}$$

где a, b – известные постоянные, $0 < p(x), 0 < q(x), f(x)$ – бесконечно дифференцируемые известные функций, при $x \in [0,1]$, $p(0) = p_0, q(0) = q_0$, а $y'_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

От нас требуется построить полное равномерное асимптотическое приближение решения двухточечной краевой задачи с любой степенью точности при малом ε, т.е. когда ε→0.

Особенности задачи. Уравнение (4.2.1) называется возмущенной, так как в ней присутствует малый параметр ε. Для начала определим особенности возмущенной задачи (4.2.1), (4.2.2).

Соответствующее невозмущенное уравнение (ε = 0):

$$x^2 p(x) \tilde{y}'(x) = f(x),$$

является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, поэтому в общем случае решение этого уравнения первого порядка не может удовлетворить двум краевым условиям (4.2.2), т.е. возмущение является сингулярным – первая особенность.

Следующую особенность рассматриваемой задачи (4.2.1)-(4.2.2) покажем через внешнее решение. Для этого построим внешнее асимптотическое решение двухточечной краевой задачи (4.2.1), (4.2.2), которое будем искать в виде степенного ряда по малому параметру, т. е. в следующем виде:

$$Z_\varepsilon(x) = z_0(x) + \varepsilon z_1(x) + \varepsilon^2 z_2(x) + \ldots + \varepsilon^n z_n(x) + \ldots \tag{4.2.3}$$

Формально подставляя ряд (4.2.3) в задачу (4.2.1), (4.2.2) имеем:

$$\varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z''_k(x) + x^2 p(x) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z'_k(x) - \varepsilon q(x) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(x) = f(x),$$

$$z_0(1) + \varepsilon z_1(1) + \varepsilon^2 z_2(1) + \ldots + \varepsilon^n z_n(1) + \ldots = b,$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$z''_{k-4}(x)+x^2p(x)z'_k(x)-q(x)z_{k-1}(x)=f(x),\ x\in(0,1),\ k\in N_0=\{0,1,2,...\},$$

$$z_0(1)=0,\ z_k(1)=0,\ k\in N,$$

где $z_s(x)\equiv 0,\ s<0.$

При $k=0$ имеем:

$$x^2p(x)z'_0(x)=f(x),\ x\in(0,1),\ z_0(1)=b,$$

интегрируя последнее равенство, получаем:

$$z_0(x)=\int_1^x\frac{f(s)}{s^2p(s)}ds+b\Rightarrow z_0(x)=O\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to 0;$$

при $k=1$ имеем:

$$x^2p(x)z'_1(x)=q(x)z_0(x),\quad z_1(1)=0,$$

интегрируя эту равенству, получаем:

$$z_1(x)=\int_1^x\frac{q(s)z_0(s)}{s^2p(s)}ds\Rightarrow z_1(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x\to 0.$$

Методом математической индукции докажем, что

$$z_n(x)=O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right),\ x\to 0.$$

Выше, нами доказано, что при n=1:

$$z_1(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x\to 0.$$

Допустим, что при $n=m$ верно равенство:

$$z_m(x)=O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right),\ x\to 0.$$

При $n=m+1$ имеем:

$$z_{m+1}(x)=\int_1^x\frac{q(s)z_m(s)-z''_{m-3}(s)}{s^2p(s)}ds=\int_1^x\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s^{m+1}}\tilde{z}(s)-\frac{1}{s^m}\tilde{\tilde{z}}(s)\right)ds=$$

$$=\int_1^x\frac{1}{s^{m+3}}\tilde{Z}(s)ds=O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right),\ x\to 0,$$

где $\tilde{z},\ \tilde{\tilde{z}},\ \tilde{Z}\in C^\infty[0,1].$

Поэтому $\forall n\in N_0: \quad z_n(x)=O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right),\ x\to 0.$

На основании этих результатов, ряд (4.2.3) можно записать в виде:

$$Z_\varepsilon(x)=\frac{1}{x}\tilde{z}_0(x)+\frac{1}{x}\frac{\varepsilon}{x}\tilde{z}_1(x)+\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^2\tilde{z}_2(x)+\ldots+\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^n\tilde{z}_n(x)+\ldots, \qquad (4.2.4)$$

где $\tilde{z}_0(1)=b, \quad \tilde{z}_k(1)=0, k\in N, \quad \tilde{z}_m\in C^\infty[0,1],\ m\in N_0.$

Заметим, что с ростом номера n, растет и особенность в точке $x = 0$. Ряд (4.2.4) теряет свойство асимптотического ряда, когда $x\in(0,\varepsilon]$. Эта особенность является второй.

Таким образом рассматриваемая задача является бисингулярной.

Еще одна дополнительная особенность заключается в том, что в окрестности особой точки $x = 0$ существуют два погранслойных функции, как и в предыдущих параграфах: одна из них экспоненциально убывает вне пограничного слоя, а вторая степенным образом убывает вне пограничного слоя.

Основной результат. Асимптотическое приближенное решение двухточечной краевой задачи (4.2.1), (4.2.2) будем искать в виде суммы трех функций:

$$y_\varepsilon(x)=V_\varepsilon(x)+W_\varepsilon(t)+\Pi_\mu(\tau), \qquad (4.2.5)$$

где $V_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x),\ W_\varepsilon(t)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(t),\ \Pi_\mu(\tau)=\frac{1}{\mu^2}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(\tau),$

$x=\varepsilon t,\ x=\mu^3\tau,\ \sqrt{\varepsilon}=\mu$.

Так как $\sqrt{\varepsilon^3}<\varepsilon$ при $0<\varepsilon<1$, поэтому пограничная функция $\Pi_\mu(\tau)$ расположена левее от пограничной функций $W_\varepsilon(t)$. Обе они расположены в левой границе отрезка [0,1]. Поэтому функцию $W_\varepsilon(t)$ назовем промежуточным пограничным слоем.

Формально подставляя выражение (4.2.5) в уравнение (4.2.1) имеем:

$$\varepsilon^4 V''_\varepsilon(x)+x^2p(x)V'_\varepsilon(x)-\varepsilon q(x)V_\varepsilon(x)=f(x)-H_\varepsilon(x),\ x\in(0,1), \qquad (4.2.6)$$

$$\varepsilon^2 W''_\varepsilon(t)+\varepsilon t^2p(\varepsilon t)W'_\varepsilon(t)-\varepsilon q(\varepsilon t)W_\varepsilon(t)=H_\varepsilon(x),\ t\in(0,1/\varepsilon), \qquad (4.2.7)$$

$$\mu^2\Pi''_\mu(\tau)+\mu^3\tau^2p(\mu^3\tau)\Pi'_\mu(\tau)-\mu^2q(\mu^3\tau)\Pi_\mu(\tau)=0,\ \tau\in(0,\infty), \qquad (4.2.8)$$

где $H_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(h_{k,0}+h_{k,1}x)$, $h_{k,0}, h_{k,1}$ – пока неизвестные постоянные, они конкретизируются при построении функций $v_k(x)$.

Подставляя соотношение (4.2.5) в граничные условия (4.2.2), получаем:

$$a=V_\varepsilon(0)+W_\varepsilon(0)+\Pi_\mu(0), \qquad b=V_\varepsilon(1)+W_\varepsilon(1/\varepsilon)+\Pi_\mu(1/\mu^3),$$

отсюда для каждой функций можно получить следующие условия:

$$V_\varepsilon(1)=b, \tag{4.2.9}$$

$$W_\varepsilon(1/\varepsilon)=0, \tag{4.2.10}$$

$$\Pi_\mu(0)=a-V_\mu(0)-W_\mu(0), \qquad \lim_{\tau\to\infty}\Pi_\mu(\tau)=0. \tag{4.2.11}$$

Уравнение (4.2.6) запишем в виде:

$$\varepsilon^4\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v''_k(x)+x^2p(x)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v'_k(x)-\varepsilon q(x)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(h_{k,0}+h_{k,1}x),$$

или

$$x^2p(x)v'_0(x)=f(x)-(h_{0,0}+h_{0,1}x), \tag{4.2.12}$$

$$v''_{k-4}(x)+x^2p(x)v'_k(x)-q(x)v_{k-1}(x)=-(h_{k,0}+h_{k,1}x),\ k\in N, \tag{4.2.13}$$

где $v_s(x)\equiv 0,\ s<0.$

Условие (4.2.9) запишем в виде:

$$v_0(1)=b,\ v_k(1)=0,\ k\in N. \tag{4.2.14}$$

Из соотношения (4.2.12) и условия (4.2.14) для $v_0(x)$ имеем:

$$x^2p(x)v'_0(x)=f(x)-(h_{0,0}+h_{0,1}x),\ x\in(0,1),\ v_0(1)=b,$$

интегрируя, полученную краевую задачу для $v_0(x)$, получаем:

$$v_0(x)=\int_1^x\frac{f(s)-(h_{0,0}+h_{0,1}s)}{s^2p(s)}ds+b\ .$$

По условию задачи

$$f\in C^\infty[0,1]\Rightarrow f(x)=f(0)+f'(0)x+x^2\tilde{f}(x),\ \tilde{f}\in C^\infty[0,1].$$

Если неизвестные коэффициенты $h_{0,0}$ и $h_{0,1}$ выбрать так чтобы $h_{0,0}=f(0),\ h_{0,1}=f'(0)$, то

$$v_0(x)=\int_1^x \frac{f(0)+f'(0)s+s^2\tilde f(s)-(f(0)+f'(0)s)}{s^2p(s)}ds+b=\int_1^x \frac{\tilde f(s)}{p(s)}ds+b$$

и $v_0\in C^\infty[0,1]$, т.е. функция $v_0(x)$ будет гладкой на всем отрезке.

Из равенства (4.2.13) и условия (4.2.14) при $k=1$, для $v_1(x)$ получим задачу:

$$x^2p(x)v'_1(x)=q(x)v_0(x)-(h_{1,0}+h_{1,1}x),\ x\in(0,1),\ v_1(1)=0,$$

решение этой задачи представимо в виде:

$$v_1(x)=\int_1^x \frac{q(s)v_0(s)-(h_{1,0}+h_{1,1}s)}{s^2p(s)}ds\ .$$

Здесь тоже неизвестные коэффициенты выберем так чтобы функция $v_1(x)$ была гладкой.

Пусть $h_{1,0}=q(0)v_0(0),\ h_{1,1}=q'(0)v_0(0)+q(0)v'_0(0)$, тогда $v_1\in C^\infty[0,1]$.

Аналогично определяя $v_k(x),\ k=2,3,...$ из задачи

$$v''_{k-4}(x)+x^2p(x)v'_k(x)-q(x)v_{k-1}(x)=-(h_{k,0}+h_{1,1}x),\quad x\in(0,1),\ v_k(1)=0$$

получаем

$$v_k(x)=\int_1^x \frac{q(s)v_{k-1}(s)-v''_{k-4}(s)-(h_{k,0}+h_{k,1}s)}{s^2p(s)}ds,\ k\in N,\ v_s(x)\equiv 0,\ s<0,$$

и здесь выбираем неизвестные коэффициенты $h_{k,0},h_{k,1},\ k=2,3,...$ так чтобы функций $v_k(x),\ k=2,3,...$ были гладкими.

Пусть

$$\begin{gathered}h_{k,0}=q(0)v_{k-1}(0)-v''_{k-4}(0),\\ h_{k,1}=q'(0)v_{k-1}(0)+q(0)v'_{k-1}(0)-v'''_{k-4}(0)\end{gathered},$$

тогда $v_k\in C^\infty[0,1],\ k=2,3,...$

Перейдем к построению промежуточного пограничного слоя, т.е. функции $W_\varepsilon(t)$.

Учитывая, что $W_\varepsilon(t)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(t)$, уравнение (4.2.7) запишем в виде

$$\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w''_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(t^2p(\varepsilon t)w'_k(t)-q(\varepsilon t)w_k(t)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(h_{k,0}+h_{k,1}\varepsilon t),$$

или

$$t^2p(\varepsilon t)w'_k(t)-q(\varepsilon t)w_k(t)=h_{k,0}+h_{k,1}\varepsilon t-w''_{k-1}(t),\ t\in(0,\varepsilon^{-1}).$$

Учитывая условие (4.2.10), при $k = 0$, для функции $w_0(t)$ имеем задачу:

$$w'_0(t)-\frac{q(\varepsilon t)}{t^2p(\varepsilon t)}w_0(t)=\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon t}{t^2p(\varepsilon t)},\ t\in(0,\varepsilon^{-1}),\ w_0(\varepsilon^{-1})=0,$$

интегрируя полученную эту задачу, получаем:

$$w_0(t)=e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon\varphi}{\varphi^2p(\varepsilon\varphi)}e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}d\varphi.$$

Докажем, что $w_0(t)$ ограничена при $t\to 0$. Для этого применяем метод интегрирования по частям:

$$w_0(t)=e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon\varphi}{\varphi^2p(\varepsilon\varphi)}e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}d\varphi=$$

$$=-e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon\varphi}{q(\varepsilon\varphi)}d\left(e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\right)=$$

$$=-\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon t}{q(\varepsilon t)}+e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\frac{h_{0,0}+h_{0,1}}{q(1)}+$$

$$+e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\left(\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon\varphi}{q(\varepsilon\varphi)}\right)'e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}d\varphi.$$

Отсюда имеем:

$$w_0(0)=-\frac{h_{0,0}}{q(0)}\ \text{ и }\ w_0(\varepsilon^{-1})=0,\ \text{ а также }\ w_0\in C^{\infty}(0,1/\varepsilon).$$

При $k\in N$ имеем:

$$w'_k(t)-\frac{q(\varepsilon t)}{t^2p(\varepsilon t)}w_k(t)=\frac{h_{k,0}+h_{k,1}\varepsilon t-w''_{k-1}(t)}{t^2p(\varepsilon t)},\ \ t\in(0,\varepsilon^{-1}),\ \ w_k(\varepsilon^{-1})=0,$$

интегрируя дифференциальное уравнение первого порядка с краевым условием, получаем:

$$w_k(t)=e^{\int\limits_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)}ds}\int\limits_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{h_{k,0}+h_{k,1}\varepsilon\varphi-w''_{k-1}(\varphi)}{\varphi^2 p(\varepsilon\varphi)}e^{-\int\limits_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)}ds}d\varphi,\ \ k\in N.$$

Отсюда следует, что

$$w_k(0)=-\frac{h_{\mathrm{k},0}-w''_{k-1}(0)}{q(0)},\ w_k(\varepsilon^{-1})=0 \text{ и } w_k\in C^{\infty}(0,1/\varepsilon),\, k\in N..$$

Теперь перейдем к определению последнего слагаемого в равенстве (4.2.5), т.е. к определению функций $\Pi_\mu(\tau)$. Учитывая, что $\Pi_\mu(\tau)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(\tau)$, $q(0)=q_0$, задачу (4.2.8), (4.2.11) запишем в виде

$$\pi''_0(\tau)-q_0\pi_0(\tau)=0,\ \tau\in(0,\infty), \tag{4.2.15}$$

$$\pi''_k(\tau)-q_0\pi_k(\tau)=\Phi_k(\tau,\mu^3\tau,\pi_{k-1},\pi'_{k-1},...,\pi_0,\pi'_0),\ \tau\in(0,\mu^{-3}),\ k\in N, \tag{4.2.16}$$

$$\pi_0(0)=-w_0(0),\qquad \lim_{\tau\to\infty}\pi_0(\tau)=0, \tag{4.2.17}$$

$$\pi_2(0)=a-v_0(0)-w_1(0),\qquad \lim_{\tau\to\infty}\pi_2(\tau)=0, \tag{4.2.18}$$

$$\begin{aligned}&\pi_{2k}(0)=-v_{k-1}(0)-w_k(0), && \lim_{\tau\to\infty}\pi_{2k}(\tau)=0,\, k\in N,\\ &\pi_{2k-1}(0)=0, && \lim_{\tau\to\infty}\pi_{2k-1}(\tau)=0,\, k\in N,\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

где функция $\Phi_k(\tau,\mu^3\tau,\pi_{k-1},\pi'_{k-1},...,\pi_0,\pi'_0)$ линейно зависит от переменных $\pi_{k-1},\pi'_{k-1},...,\pi_0,\pi'_0$ и полиномиально зависит от τ *и* $\mu^3\tau$.

Решение задачи (4.2.15), (4.2.17) представимо в виде

$$\pi_0(\tau)=-w_0(0)e^{-\sqrt{q_0}\,\tau}.$$

Решения задач (4.2.16), (4.2.18), (4.2.19) тоже существуют, единственны и экспоненциально убывают при $\tau\to\infty$:

$$\pi_2(\tau)=(a-v_0(0)-w_1(0))e^{-\sqrt{q_0}\,\tau}+P_1(\tau,\mu\tau)e^{-\sqrt{q_0}\,\tau},$$

$$\pi_{2k}(\tau)=-(v_{k-1}(0)+w_k(0))e^{-\sqrt{q_0}\,\tau}+P_{2k}(\tau,\mu\tau)e^{-\sqrt{q_0}\,\tau},$$

$$\pi_{2k-1}(\tau)=P_{2k-1}(\tau,\mu\tau)\mathrm{e}^{-\sqrt{q_0}\,\tau},$$

где $P_s(\tau,\mu\tau)$ – полиномы, при τ=0: $P_s(0,0)\equiv 0$.

Таким образом, все слагаемые ряда (4.2.5) полностью определены, т.е. построены функций $V_\varepsilon(x), W_\varepsilon(t), \Pi_\mu(\tau)$.

Перейдем к обоснованию разложения (4.2.5). Для этого оценим остаточный член асимптотического приближения (4.2.5).

Пусть

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n+1}\varepsilon^k w_k(t)+\frac{1}{\mu^2}\sum_{k=0}^{2n+2}\mu^k\pi_k(\tau)+R_{n,\varepsilon}(x), \qquad (4.2.20)$$

где $R_{n,\varepsilon}(x)$ – остаточная функция.

Тогда подставляя соотношение (4.2.20) в краевую задачу (4.2.1)-(4.2.2) получаем задачу относительно $R_{n,\varepsilon}(x)$:

$$\varepsilon^4 R''_{n,\varepsilon}(x)+x^2p(x)R'_{n,\varepsilon}(x)-\varepsilon q(x)R_{n,\varepsilon}(x)=\varepsilon^{n+1}\Psi,\ x\in(0,1), \qquad (4.2.21)$$

$$R_{n,\varepsilon}(0)=0,\ R_{n,\varepsilon}(1)=O(e^{-\sqrt{q(0)}/\mu^3}),\ \mu\to 0 \qquad (4.2.22)$$

где

$$\Psi=q(x)v_n(x)+v''_{n-3}(x)+\mu^2v''_{n-2}(x)+\mu^4v''_{n-1}(x)+\mu^6v''_n(x)+w''_n(t)+$$
$$+\Phi_{2n+1}(\tau,\mu^3\tau,\pi_{2n},\pi'_{2n},...,\pi_0,\pi'_0).$$

Для задачи (4.2.21)-(4.2.22), применяя метод дифференциальных неравенств или принцип максимума (см. §2.2. Теорема 3.), получаем оценку для остаточного члена:

$$|R_{n,\varepsilon}(x)|\le\varepsilon^n c,\ 0<c-\text{const}.$$

Теорема 4.2. Решение краевой задачи (4.2.1), (4.2.2) на отрезке $x\in[0,1]$, при ε→0 представимо в виде (4.2.20), где $|R_{n,\varepsilon}(x)|\le\varepsilon^n c,\ 0<c-\text{const}$.

Эти результаты опубликованы в журнале Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика» [45]. Журнал индексируется в базе RSCI.

§ 4.3. Общий случай

Постановка задачи

Рассмотрим двухточечную краевую задачу, порожденную линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с малым параметром при старшей производной:

$$\varepsilon^n y_\varepsilon''(x) + x^k p(x) y_\varepsilon'(x) - (x^k q(x) + \varepsilon^m r(x)) y_\varepsilon(x) = f(x),\ x \in [0,1], \qquad (4.3.1)$$

и граничным условием:

$$y_\varepsilon(0) = a,\ y_\varepsilon(1) = b, \qquad (4.3.2)$$

где a, b – известные постоянные числа, $p, q, r, f \in C^\infty[0,1]$, $f(0) \neq 0$, $0<p(0)$, $0<q(0)$, $0<r(0)$, $n>m$, $1<k$, ($n, k, m \in N$), а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Обычно краевую задачу (4.3.1), (4.3.2) называют задачей Дирихле.

Требуется найти достаточное условие при каких соотношения параметров n и m появляется дополнительный пограничный слой и для этого случая построить равномерное асимптотическое приближение решения задачи Дирихле (4.3.1), (4.3.2) на отрезке [0,1], когда малый параметр ε стремится к нулю.

Как отмечено выше, дальнейшем ряды, используемые здесь, являются асимптотическими разложениями соответствующих функций.

Особенность краевой задачи Дирихле

Заметим, что малый параметр ε присутствует в дифференциальном уравнении (4.3.1) при старшей производной. Поэтому, если в возмущенном дифференциальном уравнении второго порядка (4.3.1) формально считать, что $\varepsilon = 0$ (т.е. убрать возмущение), то порядок дифференциального уравнения понижается и соответствующее невозмущенное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка:

$$x^k p(x) y'_0(x) - x^k q(x) y_0(x) = f(x). \qquad (4.3.3)$$

Понижение порядка уравнения, при $\varepsilon = 0$ – первая особенность рассматриваемой краевой задачи Дирихле (4.3.1), (4.3.2).

Вторая особенность краевой задачи (4.3.1), (4.3.2) – дифференциальное уравнение (4.3.3) имеет особую точку при x=0. Решение уравнения (4.3.3) не является гладкой функцией на отрезке [0,1], которое свойственно бисингулярным задачам по терминологии А.М. Ильина [28].

Ниже мы докажем, что при выполнении условия $m < \frac{n(k-1)}{k+1}$ в окрестности особой точки x=0 появляется еще один пограничный слой, кроме классического пограничного слоя – третья особенность краевой задачи Дирихле (4.3.1), (4.3.2).

Краевую задачу (4.3.1), (4.3.2) с выше перечисленными особенностями назовем бисингулярно возмущенной задачей с промежуточным пограничным слоем (по терминологии А.М. Ильина [28]) или трех зонной задачей (по терминалогии А.Х. Найфе [37]).

Негладкое внешнее решение

Методом малого параметра построим внешнее решение $y_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x)$ краевой задачи (4.3.1), (4.3.2). Как всегда, внешнее решение будем искать в виде:

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x), \tag{4.3.4}$$

где $u_j(x)$ – пока неизвестные функций.

Формально подставляя ряд (4.3.4) в уравнение (4.3.1) получаем:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{n+j} u_j''(x) + x^k \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (p(x)u_j'(x) - q(x)u_j(x)) - r(x)\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{m+j} u_j(x) = f(x),$$

приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра получаем рекуррентные соотношения:

$$x^k p(x)u'_0(x) - x^k q(x)u_0(x) = f(x), \tag{4.3.5}$$

$$x^k p(x)u'_j(x) - x^k q(x)u_j(x) = r(x)u_{j-m}(x) - u''_{j-n}(x),\ j \in N,\, u_s(x) \equiv 0, s < 0. \tag{4.3.6}$$

Лемма 4.1. Уравнение (4.3.5) с краевым условием $u_0(1) = b$ имеет единственное решение представимое в виде:

$$u_0(x) = bE(x) + E(x)\int_1^x \frac{f(s)}{s^k p(s)} E^{-1}(s)ds,$$

где $E(x) = e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)}ds}$.

Доказательство. Уравнение (4.3.5) запишем в виде:

$$u'_0(x) - \frac{q(x)}{p(x)}u_0(x) = \frac{f(x)}{x^k p(x)},$$

Полученное равенство умножаем на интегрирующий множитель $e^{-\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)}ds}$:

$$u'_0(x)e^{-\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)}ds} + \frac{q(x)}{p(x)}u_0(x)e^{-\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)}ds} = \frac{f(x)}{x^k p(x)}e^{-\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)}ds},$$

Нетрудно заметить, что

$$\left(u_0(x)e^{-\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)}ds}\right)' = \frac{f(x)}{x^k p(x)}e^{-\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)}ds},$$

Интегрируя последнее равенство, получаем общее решение:

$$u_0(x) = e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)}ds}\int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi^k p(\xi)}e^{-\int_1^\xi \frac{q(s)}{p(s)}ds}d\xi + ce^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)}ds},$$

где с – произвольная постоянная.

Введем обозначение $E(x) = e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)}ds}$, тогда полученное общее решение можно записать в виде

$$u_0(x) = E(x)\int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi^k p(\xi)}E^{-1}(\xi)d\xi + cE(x).$$

Учитывая краевое условие $u_0(1)=b$ найдем соответствующее значение произвольной постоянной c:

$$u_0(1)=E(1)\int_1^1 \frac{f(\xi)}{\xi^k p(\xi)} E^{-1}(\xi)d\xi + cE(1) \Rightarrow u_0(1)=c \Rightarrow c=b;$$

Лемма доказана.

Следствие. По условию задачи $f(0)=f_0\neq 0$, поэтому когда переменная x стремится к нулю справа, справедливо соотношение:

$$u_0(x)\to \frac{1}{x^{k-1}},\ 1<k\in N.$$

Применяя лемму 4.1 последовательно к уравнениям (4.3.6) с соответствующими краевыми условиями $u_j(1)=0,\ j\in N$, получим единственные решения представимые в виде:

$$u_j(x)=0,\ 1\le j<m;$$

$$u_j(x)=E(x)\int_1^x \frac{r(s)u_{j-m}(s)-u''_{j-n}(s)}{s^k p(s)} E^{-1}(s)ds,\ m\le j\in N.$$

При $m\left(1+\dfrac{2}{k-1}\right)<n$ имеем:

$$u_1(x)\to \frac{1}{x^{2(k-1)}},\ x\to 0,\ 1<k\in N.$$

Следовательно, ряд (4.3.4) можно представить в виде:

$$u_\varepsilon(x)=\frac{1}{x^{k-1}}\left(\tilde{u}_0(x)+\frac{\varepsilon^m}{x^{k-1}}\tilde{u}_1(x)+\ldots+\left(\frac{\varepsilon^m}{x^{k-1}}\right)^j \tilde{u}_j(x)+\ldots\right), \qquad (4.3.7)$$

где $\tilde{u}_j\in C^\infty[0,1],\ j=0,1,\ldots$

Таким образом построенное внешнее решение (4.3.7) не является гладким на отрезке $x\in[0,1]$.

Следует отметить, что внешние решения (4.3.7) является асимптотическим относительно малого параметра ε только на интервале $x\in(\sqrt[k-1]{\varepsilon^m},1]$, а на отрезке $x\in[0,\sqrt[k-1]{\varepsilon^m}]$ нарушается свойство асимптотичности.

Промежуточный пограничный слой

Докажем теорему

Теорема 4.3. Если $m < \frac{n(k-1)}{k+1}$, то в задаче Дирихле (4.3.1), (4.3.2) в окрестности левой граничной точки x=0 существует еще один пограничный слой – промежуточный пограничный слои, кроме классического пограничного слоя.

Доказательство. Для доказательства теоремы покажем, что в пограничном слое имеется два характерных предела, кроме внешнего, которые будут включать в себя два внутренних разложения.

Проведем детальное исследование в окрестности особой точки x=0. Для этого в окрестности этой точки сделаем растяжение координат (преобразование) $x=\varepsilon^{\alpha}t$, $\alpha>0$, тогда $dx=\varepsilon^{\alpha}dt$ и $dx^2=\varepsilon^{2\alpha}dt^2$ и уравнение (4.3.1) перепишется в виде:

$$\varepsilon^{n-2\alpha}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon^{(k-1)\alpha}t^k p(\varepsilon^\alpha t)\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+\varepsilon^{k\alpha}t^k q(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t)-$$
$$-\varepsilon^m r(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t),\ t\in[0,\varepsilon^{-\alpha}],$$

Из левой части последнего равенства выделим главную часть, так как $\varepsilon^{k\alpha}<\varepsilon^{(k-1)\alpha}$, поэтому главная часть примет вид:

$$\varepsilon^{n-2\alpha}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon^{(k-1)\alpha}t^k p(\varepsilon^\alpha t)\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon^m r(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t).$$

Уравнивая порядков поведения слагаемых по малому параметру двух любых членов имеем соответствующие характерные пределы, возможны следующие три случаи:

$$1)\ n-2\alpha=(k-1)\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{n}{k+1}\ ;$$

$$2)\ n-2\alpha=m\ \Rightarrow\alpha=\frac{n-m}{2};$$

$$3)\ (k-1)\alpha=m\Rightarrow\alpha=\frac{m}{k-1}.$$

В первом случае, если $\alpha = \dfrac{n}{k+1}$, то получим:

$$\varepsilon^{\frac{n(k-1)}{k+1}} \frac{d^2 y_\varepsilon(t)}{dt^2} + \varepsilon^{\frac{n(k-1)}{k+1}} t^k \frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} - \varepsilon^m y_\varepsilon(t).$$

Пусть $\varepsilon^m y_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)$, тогда имеем выражение:

$$\varepsilon^{\frac{n(k-1)}{k+1}-m}\left(\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2} + t^k \frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}\right) - \psi_\varepsilon(t)$$

по условию $\dfrac{n(k-1)}{k+1} - m > 0$, поэтому при $\varepsilon \to 0$ главной частью выражения является $\psi_\varepsilon(t)$ и здесь отсутствует производная функций $\psi_\varepsilon(t)$, а также невозможно получить дополнительную информацию. Поэтому случай, т.е. $\alpha = \dfrac{n}{k+1}$ не будем рассматривать.

Во втором случае, если $\alpha = \dfrac{n-m}{2}$ и $\varepsilon^m y_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)$, то получим

$$\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2} - \psi_\varepsilon(t) + \varepsilon^{\frac{(k-1)(n-m)}{2}-m} t^k \frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}$$

и здесь главной частью полученного выражения является:

$$\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2} - \psi_\varepsilon(t)$$

в которой присутствует производная второго порядка. Поэтому этот случай, т.е. $\alpha = \dfrac{n-m}{2}$ будем исследовать.

И последний случай, если $\alpha = \dfrac{m}{k-1}$ и $\varepsilon^m y_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)$, то получим выражение:

$$\varepsilon^{n-m-\frac{2m}{k-1}} \frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2} + t^k \frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} - \psi_\varepsilon(t),$$

главной частью которого является:

$$t^k \frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} - \psi_\varepsilon(t).$$

Этот случай тоже будем исследовать, так как и здесь в главной части присутствует производная первого порядка.

В результате в окрестности точки x=0 мы получили два характерных предела, это во втором и в третьем случаях.

Так как $\frac{n-m}{2} > \frac{m}{k-1}$ поэтому второй случай ($\alpha = \frac{n-m}{2}$) будет описывать левый пограничный слой, а третий случай ($\alpha = \frac{m}{k-1}$) будет описывать промежуточный пограничный слой между левым пограничным слоем и внешним решением. Ряд (4.3.7) тоже подсказывает каким должна быть внутренняя переменная в соседнем пограничном слое, который пересекается с внешним решением т.е. $x = \sqrt[k-1]{\varepsilon^m}\, t$.

Теперь докажем необходимость условия $m < \frac{n(k-1)}{k+1}$. Для этого нам надо показать при нарушении этого неравенства появляется только один характерный предел.

Нетрудно заметить, что если выполняется равенство $m = \frac{n(k-1)}{k+1}$, то все эти три случая совпадут т.е. будут одинаковыми и в этом случае будет только один характерный предел, т.е. один пограничный слои.

А если выполняется условие $m > \frac{n(k-1)}{k+1}$, то

- в первом случае, при $\alpha = \frac{n}{k+1}$ и $\varepsilon^{\frac{n(k-1)}{k+1}} y_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)$ получим:

$$\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2} + t^k \frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} - \varepsilon^{m-\frac{n(k-1)}{k+1}} \psi_\varepsilon(t)$$

при $\varepsilon \to 0$ главной частью выражения является:

$$\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2} + t^k \frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} \; \psi_\varepsilon(t)$$

требует рассмотрения (один характерный предел);

- во втором случае, при $\alpha = \dfrac{n-m}{2}$ и $\varepsilon^{\frac{(k-1)(n-m)}{2}} y_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)$, то получим

$$\varepsilon^{m-\frac{(k-1)(n-m)}{2}} \left(\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2} - \psi_\varepsilon(t) \right) + t^k \frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}$$

и здесь главной частью является: $t^k \dfrac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}$, поэтому этот случай не рассматривается;

- в третьем случае, при $\alpha = \dfrac{m}{k-1}$ и $\varepsilon^{n-\frac{2m}{k-1}} y_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)$, то получим выражение:

$$\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2} + \varepsilon^{m-n+\frac{2m}{k-1}} \left(t^k \frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} - \psi_\varepsilon(t) \right),$$

главной частью которого является: $\dfrac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2}$ – не подойдет, т.е. не рассматривается.

В результате при нарушении условия (неравенства) $m < \dfrac{n(k-1)}{k+1}$ в окрестности точки x=0 мы получаем только один характерный предел.

Формальное асимптотическое решение

Для начала упростим уравнение (1) с помощью преобразования:

$$y_\varepsilon(x) = z_\varepsilon(x) e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds}, \tag{4.3.8}$$

где $z_\varepsilon(x)$ – новая неизвестная функция.

Вычислим производные первого и второго порядков от выражения (4.3.8):

$$y'_\varepsilon(x) = z'_\varepsilon(x) e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds} + z_\varepsilon(x) \frac{q(x)}{p(x)} e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds},$$

$$y''_\varepsilon(x) = z''_\varepsilon(x) e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds} + 2z'_\varepsilon(x) \frac{q(x)}{p(x)} e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds} + z_\varepsilon(x) e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds} \tilde{p}(x),$$

где $\tilde{p}(x)=\left(\dfrac{q(x)}{p(x)}\right)'+\left(\dfrac{q(x)}{p(x)}\right)^2$.

Подставляя (4.3.8) и их производные в уравнение (4.3.1) получим:

$$\varepsilon^n\left(z''_\varepsilon(x)+2z'_\varepsilon(x)\frac{q(x)}{p(x)}+z_\varepsilon(x)\tilde{p}(x)\right)+x^k p(x)\left(z'_\varepsilon(x)+z_\varepsilon(x)\frac{q(x)}{p(x)}\right)+$$

$$-(x^k q(x)+\varepsilon^m r(x))z_\varepsilon(x)=f(x)e^{-\int\limits_1^x\frac{q(s)}{p(s)}ds},$$

или

$$\varepsilon^n z''_\varepsilon(x)+\left(x^k p(x)+\varepsilon^n\tilde{q}(x)\right)z'_\varepsilon(x)+\left(\varepsilon^n\tilde{p}(x)-\varepsilon^m r(x)\right)z_\varepsilon(x)=\tilde{f}(x), \quad (4.3.9)$$

где $\tilde{q}(x)=\dfrac{2q(x)}{p(x)}$, $\tilde{f}(x)=f(x)e^{\int\limits_x^1\frac{q(s)}{p(s)}ds}$.

Краевые условия (4.3.2) примут вид:

$$z_\varepsilon(0)=a_1,\ z_\varepsilon(1)=b, \quad (4.3.10)$$

где $a_1=ae^{\int\limits_0^1\frac{q(s)}{p(s)}ds}$.

Как и в предыдущих параграфах, решение задачи (4.3.9), (4.3.10) будем искать в виде суммы трех неизвестных функций:

$$z_\varepsilon(x)=V_\varepsilon(x)+W_\mu(t)+\Pi_\lambda(\tau), \quad (4.3.11)$$

где $x=\mu^m t,\ \mu^{k-1}=\varepsilon;\ x=\lambda^{n-m}\tau,\ \varepsilon=\lambda^2$.

Формально подставляя выражение (4.3.11) в уравнение (4.3.9) получим следующие уравнения относительно неизвестных функций $V_\varepsilon(x), W_\mu(t), \Pi_\lambda(\tau)$, соответственно:

$$\varepsilon^n V''_\varepsilon(x)+(x^k p(x)+\varepsilon^n\tilde{q}(x))V'_\varepsilon(x)+(\varepsilon^n\tilde{p}(x)-\varepsilon^m r(x))V_\varepsilon(x)=\tilde{f}(x)-h_\varepsilon(x), \quad (4.3.12)$$

$$\begin{gathered}\mu^{(k-1)n-2m}W''_\mu(t)+\left((\mu^m t)^k p(\mu^m t)+\mu^{(k-1)n}\tilde{q}(\mu^m t)\right)\mu^{-m}W'_\varepsilon(t)+\\ +\left(\mu^{(k-1)n}\tilde{p}(\mu^m t)-\mu^{(k-1)m}r(\mu^m t)\right)W_\varepsilon(t)=h_\mu(\mu^m t),\end{gathered} \quad (4.3.13)$$

$$\lambda^{2m}\Pi''_{\lambda}(\tau)+\left((\lambda^{n-m}\tau)^{k}p(\lambda^{n-m}\tau)+\lambda^{2n}\tilde{q}(\lambda^{n-m}\tau)\right)\lambda^{m-n}\Pi'_{\lambda}(\lambda^{n-m}\tau)+ \\ +\left(\lambda^{2n}\tilde{p}(\lambda^{n-m}\tau)-\lambda^{2m}r(\lambda^{n-m}\tau)\right)\Pi_{\varepsilon}(\lambda^{n-m}\tau)=0, \tag{4.3.14}$$

Краевые условия (10) примут вид:

$$V_{\varepsilon}(0)+W_{\mu}(0)+\Pi_{\lambda}(0)=a_{1},\ V_{\varepsilon}(1)+W_{\mu}(\mu^{-m})+\Pi_{\lambda}(\lambda^{m-n})=b,$$

Отсюда имеем:

$$V_{\varepsilon}(1)=b, \tag{4.3.15}$$

$$W_{\mu}(\mu^{-m})=0, \tag{4.3.16}$$

$$\Pi_{\lambda}(0)=a-(V_{\varepsilon}(0)+W_{\mu}(0)),\ \lim_{\tau\to\infty}\Pi_{\lambda}(\tau)=0. \tag{4.3.17}$$

Решение задачи (4.3.12), (4.3.15)

Исследуем уравнение (4.3.12) с краевым условием (4.3.15).

Пусть

$$V_{\varepsilon}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}v_{j}(x),\ h_{\varepsilon}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}h_{j}(x), \tag{4.3.18}$$

где $v_j(x)$ и $h_j(x)$ – пока неизвестные функций.

Формально подставляя выражения (4.3.18) в равенство (4.3.12) имеем:

$$\varepsilon^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}v''_{j}(x)+(x^{k}p(x)+\varepsilon^{n}\tilde{q}(x))\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}v'_{j}(x)+ \\ +(\varepsilon^{n}\tilde{p}(x)-\varepsilon^{m}r(x))\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}v_{j}(x)=\tilde{f}(x)-\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}h_{j}(x),$$

и здесь приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, получаем следующие рекуррентные уравнения:

$$x^{k}p(x)v'_{0}(x)=\tilde{f}(x)-h_{0}(x), \tag{4.3.19}$$

$$x^{k}p(x)v'_{j}(x)=r(x)v_{j-m}(x)-\tilde{p}(x)v_{j-n}(x)-\tilde{q}(x)v'_{j-n}(x)-v''_{j-n}(x)-h_{j}(x),\ j\in N, \tag{4.3.20}$$

где $v_s(x)\equiv 0,\ s<0$.

Решения уравнений (4.3.19), (4.3.20) с соответствующими условиями:

$$v_{0}(1)=b,\ v_{j}(1)=0;$$

существуют и единственны:

$$v_0(x) = b + \int_1^x \frac{\tilde{f}(s) - h_0(s)}{s^k p(s)} ds,$$

$$v_j(x) = \int_1^x \frac{r(s)v_{j-m}(s) - \tilde{p}(s)v_{j-n}(s) - \tilde{q}(s)v'_{j-n}(s) - v''_{j-n}(s) - h_j(s)}{s^k p(s)}, \ j \in N,$$

где $v_s(x) \equiv 0$, $s < 0$.

Эти решения в общем случае не будут гладкими в рассматриваемом отрезке и мы здесь определяем, точнее выбираем неизвестные функций $h_j(x)$, $j = 0,1,...$ так чтобы эти решения $v_k(x)$ были гладкими, т.е. $v_k \in C^\infty[0,1]$.

Такой выбор существует, действительно, если:

$$\begin{aligned} h_0(x) &= f_{0,0} + f_{0,1}x + ... + f_{0,k-1}x^{k-1}, \\ h_j(x) &= f_{j,0} + f_{j,1}x + ... + f_{j,k-1}x^{k-1}, \ j = 1,2,... \end{aligned} \qquad (4.3.21)$$

где $f_{0,i} = \dfrac{1}{i!} \tilde{f}^{(i)}(0),$

$$f_{j,i} = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dx^i} F_j(0), \ F_j(x) = r(x)v_{j-m}(x) - \tilde{p}(x)v_{j-n}(x) - \tilde{q}(x)v'_{j-n}(x) - v''_{j-n}(x).$$

То все функций $v_k(x)$ будут гладкими, т.е. $v_k \in C^\infty[0,1]$, следовательно и функция $V_\varepsilon(x)$ будет гладкой.

Решение задачи (4.3.13), (4.3.16)

Перейдем к исследованию уравнения (4.3.13) с краевыми условиями (4.3.16).

Пусть

$$W_\mu(t) = \frac{1}{\mu^{(k-1)m}} \sum_{j=0}^\infty \mu^j w_j(t), \ \ h_\mu(\mu^m t) = \sum_{j=0}^\infty \mu^{(k-1)jm} h_j(\mu^m t), \qquad (4.3.22)$$

где $w_j(t)$ – пока неизвестные функций, а функций $h_j(\mu^m t)$ определенные в (4.3.21).

Подставляя формально ряды (4.3.22) в равенство (4.3.13) получим:

$$\mu^{(k-1)(n-m)-2m}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w''_j(t)+t^k p(\mu^m t)\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w'_j(t)-r(\mu^m t)\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w_j(t)+$$

$$+\mu^{(k-1)(n-m)-m}\tilde{q}(\mu^m t)\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w'_j(t)+\mu^{(k-1)(n-m)}\tilde{p}(\mu^m t)\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w_j(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\mu^{(k-1)jm}h_j(\mu^m t),$$

или

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j(t^k p(\mu^m t)w'_j(t)-r(\mu^m t)w_j(t))=\sum_{j=0}^{\infty}\mu^{(k-1)jm}h_j(\mu^m t)-\mu^{(k-1)(n-m)-2m}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w''_j(t)-$$

$$-\mu^{(k-1)(n-m)-m}\tilde{q}(\mu^m t)\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w'_j(t)-\mu^{(k-1)(n-m)}\tilde{p}(\mu^m t)\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w_j(t).$$

(4.3.23)

По условию $\dfrac{n-m}{2}>\dfrac{m}{k-1}$, отсюда следует, что $(k-1)(n-m)-2m>0$.

Равенство (4.3.23) можно записать в виде:

$$t^k p(\mu^m t)w'_j(t)-r(\mu^m t)w_j(t)=H_j(\mu^m t,w_{j-1},w_{j-2},...,w_0),\ t\in(0,\mu^{-m}),\ \ j=0,1,2,...$$

где $H_j(\mu^m t,w_{j-1},w_{j-2},...,w_0)$ – линейно зависит от предыдущих $w_{j-1},w_{j-2},...,w_0$, и их производных, полиномиально зависят от $\mu^m t$, причем $H_0(\mu^m t,w_{j-1},w_{j-2},...,w_0)=h_0(\mu^m t)$.

Решения этих уравнений с соответствующими граничными условиями $w_j(\mu^{-m})=0,\ j=0,1,...$ существуют, единственны и представимы в виде:

$$w_j(t)=E(t)\int_{\mu^{-m}}^{t}\frac{H_j(\mu^m s,w_{j-1},w_{j-2},...,w_0)}{s^k p(\mu^m s)}E^{-1}(s)ds,$$

$$E(t)=e^{\int_{\mu^{-m}}^{t}\frac{r(\mu^m s)}{s^k p(\mu^m s)}ds},\ t\in[0,\mu^{-m}],$$

где постоянная с определяется по соответствующим граничным условиям.

Решение задачи (4.3.14), (4.3.17)

А теперь перейдем к исследованию уравнения (4.3.14) с краевым условием (4.3.17).

Пусть $\Pi_\lambda(\tau)=\dfrac{1}{\lambda^{2m}}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi_j(\tau)$ тогда (4.3.14) можно представить в виде:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi''_j(\tau)+\left(\lambda^{n(k-1)-m(k+1)}\tau^k p(\lambda^{n-m}\tau)+\lambda^{n-m}\tilde q(\lambda^{n-m}\tau)\right)\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi'_j(\tau)+$$
$$+\left(\lambda^{2(n-m)}\tilde p(\lambda^{n-m}\tau)-r(\lambda^{n-m}\tau)\right)\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi_j(\tau)=0,$$

или

$$\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j(\pi''_j(\tau)-r(\lambda^{n-m}\tau)\pi_j(\tau))=-\lambda^{2(n-m)}\tilde p(\lambda^{n-m}\tau)\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi_j(\tau)-$$
$$-\left(\lambda^{n(k-1)-m(k+1)}\tau^k p(\lambda^{n-m}\tau)+\lambda^{n-m}\tilde q(\lambda^{n-m}\tau)\right)\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi'_j(\tau). \tag{4.3.24}$$

Полученную уравнению (4.3.24) можно записать в следующем виде:

$$\pi''_j(\tau)-r_0\pi_j(\tau)=P_j(\lambda^{n-m}\tau,\pi_{j-1},\pi_{j-2},...,\pi_0,\pi'_{j-1},\pi'_{j-2},...,\pi'_0),\quad j=0,1,... \tag{4.3.25}$$

Здесь правая часть равенства $P_j(\lambda^{n-m}\tau,\pi_{j-1},\pi_{j-2},...,\pi_0,\pi'_{j-1},\pi'_{j-2},...,\pi'_0)$ линейно зависит от π_i и их производных, а также полиноминально от $\lambda^{n-m}\tau$.

Краевые условия (4.3.17) при $\Pi_\lambda(\tau)=\dfrac{1}{\lambda^{2m}}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi_j(\tau)$ можно представить в виде:

$$\pi_{2k-1}(0)=0,\ \lim_{\tau\to\infty}\pi_{2k-1}(\tau)=0,\ k\in N; \tag{4.3.26}$$

$$\pi_{2j}(0)=-\tilde w_j(0),\ \lim_{\tau\to\infty}\pi_{2j}(\tau)=0,\quad j\neq ms,\ s\in N; \tag{4.3.27}$$

$$\pi_{2m}(0)=a-v_0(0)-\tilde w_m(0),\ \lim_{\tau\to\infty}\pi_{2m}(\tau)=0, \tag{4.3.28}$$

$$\pi_{2m(s+1)}(0)=-v_s(0)-\tilde w_{m(s+1)}(0),\ \lim_{\tau\to\infty}\pi_{2m(s+1)}(\tau)=0, \tag{4.3.29}$$

где

$$\tilde w_j(0)=w_{j(k-1)}(0)+\mu w_{j(k-1)+1}(0)+\mu^2 w_{j(k-1)+2}(0)+...+\mu^{k-2}w_{j(k-1)+k-2}(0).$$

Решения уравнений (4.3.25) с соответствующими краевыми условиями (4.3.26), (4.3.27), (4.3.28) и (4.3.29) существуют, единственны и экспоненциально убывают при $\tau\to\infty$, [29].

В результате нами определены все три функций $V_\varepsilon(x), W_\mu(t), \Pi_\lambda(\tau)$ в виде рядов по степеням малых параметров ε, μ, λ, соответственно.

Обоснование разложения (4.3.11)

Пусть

$$R_\varepsilon(x) = z_\varepsilon(x) - z_{\varepsilon,s}(x),$$

где $R_\varepsilon(x)$ – остаточная функция,

$$z_{\varepsilon,s}(x) = \sum_{j=0}^{s} \varepsilon^{jm} v_j(x) + \frac{1}{\mu^{(k-1)m}} \sum_{j=0}^{(k-1)m(s+1)} \mu^j w_j(t) + \frac{1}{\lambda^{2m}} \sum_{j=0}^{2m(s+1)} \lambda^j \pi_j(\tau),$$

функций $v_j(x)$, $w_j(t)$ и $\pi_j(\tau)$ определены выше.

Тогда для остаточной функций $R_\varepsilon(x)$ получим следующую краевую задачу

$$\varepsilon^n R''_\varepsilon(x) + \left(x^k p(x) + \varepsilon^n \tilde{q}(x)\right) R'_\varepsilon(x) + \left(\varepsilon^n \tilde{p}(x) - \varepsilon^m r(x)\right) R_\varepsilon(x) = \varepsilon^{ms+m}\Phi, \qquad (4.3.30)$$

$$R_\varepsilon(0) = 0, \; R_\varepsilon(1) = 0, \qquad (4.3.31)$$

где $\Phi = \Phi(v_j, v'_j, v''_j, w_j, w'_j, w''_j, \pi_j, \pi'_j)$ – линейно зависит от функций $v_j, v'_j, v''_j, w_j, w'_j, w''_j, \pi_j, \pi'_j$.

Для краевой задачи (4.3.30)-(4.3.31) применяя принцип максимума (§2.2 теорема 3), получаем оценку для остаточной функций точно также как и в предыдущем параграфе:

$$R_\varepsilon(x) = O(\varepsilon^{ms}), \varepsilon \to 0, \; x \in [0,1].$$

Нами доказана

Теорема 4.4. Для решения двухточечной краевой задачи Дирихле (4.3.1), (4.3.2) на отрезке $x \in [0,1]$ при $m < \dfrac{n(k-1)}{k+1}$ справедливо асимптотическое разложение:

$$y_\varepsilon(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{jm} v_j(x) + \frac{1}{\mu^{(k-1)m}} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w_j(t) + \frac{1}{\lambda^{2m}} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \pi_j(\tau) \right) e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds}, \; \varepsilon \to 0$$

с соответствующими функциями, определенными выше.

Пример 4.1. Пусть n=4, k=2, m=1, $p(x)$≡1, $q(x)$≡1, $r(x)$≡1, $f(x)$=1+x+x^2, a=–1, b=1. Т.е. уравнение

$$\varepsilon^4 y_\varepsilon''(x) + x^2 y_\varepsilon'(x) - (x^2+\varepsilon) y_\varepsilon(x) = 1 + x + x^2, \qquad (4.3.32)$$

с граничными условиями:

$$y_\varepsilon(0) = -1, \; y_\varepsilon(1) = 1. \qquad (4.3.33)$$

Все условия выполняются, и неравенство $m < \dfrac{n(k-1)}{k+1}$.

Преобразование примет вид: $y_\varepsilon(x) = z_\varepsilon(x) e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds} = z_\varepsilon(x) e^{x-1}$.

$$\varepsilon^4 z''_\varepsilon(x) + (2\varepsilon^4 + x^2) z'_\varepsilon(x) + (\varepsilon^4 - \varepsilon) z_\varepsilon(x) = (1 + x + x^2) e^{1-x},$$

здесь $\tilde{f}(x) = (1 + x + x^2) e^{1-x}$.

Равенство (4.3.11) примет вид:

$$z_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j(x) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j(t) + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \pi_j(\tau),$$

где $x = \mu t, \; \mu = \varepsilon; \; x = \lambda^3 \tau, \; \varepsilon = \lambda^2$.

Для простоты ограничимся первым приближением. Т.е. решение будем искать в виде

$$z_\varepsilon(x) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \frac{1}{\varepsilon} w_0(t) + w_1(t) + \varepsilon w_2(t) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda^2} \pi_0(\tau) + \frac{1}{\lambda} \pi_1(\tau) + \pi_2(\tau) + \lambda \pi_3(\tau) + \lambda^2 \pi_4(\tau) + R_\varepsilon(x),$$

где $R_\varepsilon(x)$ – остаточная функция.

В нашем случае, ряд Маклорена для функций $\tilde{f}(x)$ примет вид:

$$\tilde{f}(x) = (1 + x + x^2) e^{1-x} = e\left(1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{8} x^4 - \frac{2}{15} x^5 + \ldots\right),$$

поэтому, из (4.3.27) имеем:

$$f_{0,0} = e, \; f_{0,1} = 0 \Rightarrow h_0(x) = e.$$

Равенство (4.3.19) примет вид:

$$x^2 v'_0(x) = (1 + x + x^2) e^{1-x} - e \;\Rightarrow\; v'_0(x) = \frac{(1 + x + x^2) e^{1-x} - e}{x^2} \;\Rightarrow$$

$$v_0(x) = 1 + \int_1^x \frac{(1+s+s^2)e^{1-s} - e}{s^2} ds .$$

Из (4.3.20) при j=1 имеем:

$$x^2 v'_1(x) = v_0(x) - h_1(x).$$

Отсюда находим $v_1(x)$:

$$v_1(x) = \int_1^x \frac{v_0(s) - h_1(s)}{s^2} ds .$$

Так как

$$v_0(0) = 1 + \int_1^0 \frac{(1+s+s^2)e^{1-s} - e}{s^2} ds = 3 - e;$$

$$v'_0(x) = \frac{(1+x+x^2)e^{1-x} - e}{x^2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x+x^2)e^{1-x} - e}{x^2} = \frac{e}{2},$$

поэтому $h_1(x) = 3 - e + \frac{e}{2} x$. Нетрудно заметит, что $v_0, v_1 \in C^\infty[0,1]$.

Учитывая соотношение (4.3.23) и граничных условий $w_j(\varepsilon^{-1}) = 0,\ j = 0,1,2$ имеем следующие задачи:

$$t^2 w'_0(t) - w_0(t) = e,\ t \in [0, \varepsilon^{-1}],\ w_0(\varepsilon^{-1}) = 0;$$

$$t^2 w'_1(t) - w_1(t) = 3 - e + \frac{e}{2}\varepsilon t - w''_0(t),\ t \in [0, \varepsilon^{-1}],\ w_1(\varepsilon^{-1}) = 0;$$

$$t^2 w'_2(t) - w_2(t) = -w''_1(t) - 2w'_0(t),\ t \in [0, \varepsilon^{-1}],\ w_2(\varepsilon^{-1}) = 0.$$

Уравнению относительно $w_0(t)$ запишем в виде:

$$\left(w_0(t) e^{\frac{1}{t}} \right)' = \frac{e}{t^2} e^{\frac{1}{t}} .$$

Интегрируя последнее равенство, получаем:

$$w_0(t) = -e(1 - e^{\varepsilon - \frac{1}{t}} \Bigg).$$

Аналогично находим $w_1(t)$ и $w_2(t)$:

$$w_1(t) = e^{-\frac{1}{t}} \left(-\frac{3-e}{t} + \frac{e}{2}\varepsilon \ln t - \frac{1}{2t^4} e^{1+\varepsilon} + \frac{1}{5t^5} e^{1+\varepsilon} + \varepsilon(3-e) - \frac{e}{2}\varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon^4}{2} e^{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon^5}{5} e^{1+\varepsilon} \right);$$

$$\left(w_2(t)e^{\frac{1}{t}}\right)' = -\frac{w''_1(t)+2w'_0(t)}{t^2}e^{\frac{1}{t}} \Rightarrow w_2(t) = -e^{-\frac{1}{t}}\int\limits_{1/\varepsilon}^{t}\frac{w''_1(s)+2w'_0(s)}{s^2}e^{\frac{1}{s}}ds\,.$$

Для неизвестных пограничных функций $\pi_j(\tau),\ j=0,1,2,3,4$ получим следующие краевые задачи:

$\pi''_0(\tau)-\pi_0(\tau)=0,\ \tau\in[0,\lambda^{-3}],\ \pi_0(0)=-w_0(0),\ \lim\limits_{\tau\to\infty}\pi_0(\tau)=0;$

$\pi''_1(\tau)-\pi_1(\tau)=-\tau^2\pi'_0(\tau),\tau\in[0,\lambda^{-3}],\ \pi_1(0)=0,\ \lim\limits_{\tau\to\infty}\pi_1(\tau)=0;$

$\pi''_2(\tau)-\pi_2(\tau)=-\tau^2\pi'_1(\tau),\ \tau\in[0,\lambda^{-3}],\ \pi_2(0)=-1-v_0(0)-w_1(0),\ \lim\limits_{\tau\to\infty}\pi_2(\tau)=0;$

$\pi''_3(\tau)-\pi_3(\tau)=-\tau^2\pi'_2(\tau)-2\pi'_0(\tau),\tau\in[0,\lambda^{-3}],\ \pi_3(0)=0,\ \lim\limits_{\tau\to\infty}\pi_3(\tau)=0;$

$\pi''_4(\tau)-\pi_4(\tau)=-\tau^2\pi'_3(\tau)-2\pi'_1(\tau),\tau\in[0,\lambda^{-3}],\ \pi_4(0)=-v_1(0)-w_2(0),\ \lim\limits_{\tau\to\infty}\pi_4(\tau)=0.$ Находим решения этих задач:

$$\pi_0(\tau)=e^{1-\tau};\qquad \pi_1(\tau)=-\frac{1}{12}e^{1-\tau}\tau(2\tau^2+3\tau+3);$$

$$\pi_2(\tau)=-(4-e)e^{-\tau}+\tau\frac{20\tau^5+24\tau^4+15\tau^3-30\tau^2-45\tau-45}{1440}e^{1-\tau};$$

$$\pi_3(\tau)=\tau P_8(\tau)e^{1-\tau},\ P_8(\tau)-\text{ полином восьмой степени,}$$

$$\pi_4(\tau)=-(v_1(0+w_1(0))e^{-\tau}+\tau P_{11}(\tau)e^{1-\tau},\ P_{11}(\tau)-\text{ полином 11-й степени.}$$

А задача для остаточной функций $(4.3.30),(4.3.31)$ примет следующий вид:

$$\varepsilon^4R''_\varepsilon(x)+(2\varepsilon^4+x^2)R'_\varepsilon(x)-\varepsilon(1-\varepsilon^3)R_\varepsilon(x)=\varepsilon^2\Phi\,,$$

$$R_\varepsilon(0)=0,\ R_\varepsilon(1)=0,$$

где $\Phi=v_1(x)-\varepsilon w''_2(t)-2\varepsilon(w'_1(t)+\varepsilon w'_2(t))-\varepsilon(w_0(t)+\varepsilon w_1(t)+$

$$+\varepsilon^2w_2(t))-\lambda^2\sum_{j=0}^{4}\lambda^j\pi_j(\tau)-\tau^2\pi'_4(\tau)-2\sum_{j=1}^{4}\lambda^{j-1}\pi'_j(\tau).$$

Следовательно, получаем

$$R_\varepsilon(x)=O(\varepsilon),\varepsilon\to0,\ x\in[0,1].$$

В результате асимптотическое решение задачи (4.3.32)-(4.3.33) примет вид:

$$y_\varepsilon(x) = e^{x-1}\left(1+\int_1^x \frac{(1+s+s^2)e^{1-s}-e}{s^2}ds+\right.$$

$$+\varepsilon\int_1^x \frac{1}{s^2}\left(1+\int_1^s \frac{(1+u+u^2)e^{1-u}-e}{u^2}du-3+e-\frac{e}{2}s\right)ds-\frac{1}{\varepsilon}e(1-e^{\varepsilon-\frac{1}{t}}\Bigg)+$$

$$+e^{-\frac{1}{t}}\left(-\frac{3-e}{t}+\frac{e}{2}\varepsilon\ln t-\frac{1}{2t^4}e^{1+\varepsilon}+\frac{1}{5t^5}e^{1+\varepsilon}+\varepsilon(3-e)-\frac{e}{2}\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon^4}{2}e^{1+\varepsilon}-\frac{\varepsilon^5}{5}e^{1+\varepsilon}\right)-$$

$$-\varepsilon e^{-\frac{1}{t}}\int_{1/\varepsilon}^{t}\frac{w''_1(s)+2w'_0(s)}{s^2}e^{\frac{1}{s}}ds+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}e^{1-\tau}-\frac{1}{12\lambda}e^{1-\tau}\tau(2\tau^2+3\tau+3)+$$

$$-(4-e)e^{-\tau}+\tau\frac{20\tau^5+24\tau^4+15\tau^3-30\tau^2-45\tau-45}{1440}e^{1-\tau}+$$

$$+\lambda\tau P_8(\tau)e^{1-\tau}-\lambda^2(v_1(0+w_1(0))e^{-\tau}+\lambda^2\tau P_{11}(\tau)e^{1-\tau}+O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0.$$

Заключение по главе 4

Исследованы асимптотические поведения решений двухточечных краевых задач на отрезке для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Существенные особенности задачи – присутствие малого параметра перед производной второго порядка от искомой функции, существование промежуточного (двойного) пограничного слоя на левом конце отрезка при $x = 0$ и не гладкость решения соответствующей невозмущенной краевой задачи. Требуется найти достаточное условие существование промежуточного пограничного слоя и построить равномерное асимптотическое разложение решения трех зонной двухточечной краевой задачи на единичном отрезке с любой степенью точности при стремлении малого параметра к нулю. Из-за второй и третьей особенности задачи так легко невозможно построить асимптотическое разложение решения по малому параметру известными асимптотическими методами. Задача решается в два этапа: на первом этапе строится формальное разложение решения двухточечной краевой задачи, а на втором этапе приводится обоснование этого разложения, т. е. оценивается остаточный член разложения. В первом этапе формальное асимптотическое решение ищется в виде суммы трех решений: гладкое внешнее решение на всем отрезке; классическое погранслойное решений в окрестности $x = 0$, которое экспоненциально убывает вне пограничного слоя и промежуточное погранслойное решение при $x = 0$, которое степенным т.е. не экспоненциальным характером убывает вне пограничного слоя.

Построенные асимптотические разложения решения двухточечной краевой задачи является асимптотическим в смысле Эрдей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдены достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Коши для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений трех зонных бисингулярных задач Коши.

Найдены достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Дирихле для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений трех зонных бисингулярных задач Дирихле.

С помощью оригинального подхода, суть которого в том, что вместо универсального метода согласования асимптотических разложений, разработанного и успешно применяемого в научной школе А. М. Ильина, используется метод вспомогательной функции, позволяющий получить равномерное асимптотическое разложение для рассматриваемого класса задач с помощью более простой процедуры.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Рекомендуем использовать научные результаты диссертации в физике, химии, в биологии, теории движения, гидродинамике, аэродинамике и других областях науки.

Надеемся, что разработанные алгоритмы построения асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач первого и второго порядков найдут практические применения.

Результаты исследования также могут быть использованы при чтении лекционных курсов по теории возмущений, преподавании спецкурсов по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Физико-математическое образование», «Математика и компьютерные науки» для аспирантов, PhD докторов, магистров и бакалавров. Кроме того, мы рекомендуем использовать научные результаты при решении теоретических задач в области математики, физики, техники и других наук, связанных с качественной теорией дифференциальных уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абдувалиев, А.О. Асимптотические представления решений некоторых сингулярно возмущенных краевых задач [Текст] / А.О. Абдувалиев, Н.Х. Розов, В.Г. Сушко // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 304. – № 4. – С. 777–780.

2. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости [Текст]: - дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / К.С. Алыбаев. - Жалалабат, 2001. - 203 с.

3. Алымкулов, К. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, А.А. Халматов // Матем. заметки, Т. 92. Вып. 6, 2012. – С. 819-824.

4. Алымкулов, К. Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Дирихле со слабой особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, Д. А. Турсунов, Б. А. Азимов // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. –2018. – Т. 10. – № 1. – С. 21–26.

5. Алымкулов, К. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач [Текст] / К. Алымкулов, Д. А. Турсунов // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 12. – С. 3–11.

6. Алымкулов, К. Метод структурного сращивания решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, Ж. К. Жээнтаева // Матем. заметки. – 2006. – Т. 79. – № 5. – С. 643–652.

7. Алымкулов, К. Равномерная асимптотика решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка со слабой особенностью [Текст] / К. Алымкулов, А.З. Зулпукаров // Доклады академии наук. – 2004. – Т. 398. – № 5. – С. 583–586.

8. Азимов, Б.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений со слабой особой точкой [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Б.А. Азимов. – Ош, 2017. – 112 с.

9. Бобочко, В. Н. Равномерная асимптотика решения неоднородной системы двух дифференциальных уравнений с точкой поворота [Текст] /

В.Н. Бобочко // Изв. вузов. Матем. – 2006. – № 5. – С. 8–18.

10. Бобочко, В. Н. Нестабильная дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений [Текст] / В.Н. Бобочко // Изв. вузов. Матем. –2005. – № 4. – С. 8–17.

11. Бутузов, В.Ф. О сингулярно возмущенных частично диссипативных системах уравнений [Текст] / В. Ф. Бутузов // ТМФ. – 2021. – Т. 207. – № 2. – С. 210–225.

12. Бутузов, В.Ф. О сингулярно возмущенных системах ОДУ с кратным корнем вырожденного уравнения [Текст] / В. Ф. Бутузов // Изв. РАН. Сер. матем. – 2020. – Т. 84. – № 2. – С. 60–89.

13. Бутузов, В.Ф. Асимптотика погранслойного решения стационарной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения [Текст] / В. Ф. Бутузов // Матем. сб. – 2019. – Т. 210. – № 11. – С. 76–102.

14. Бутузов, В.Ф. Асимптотика решения частично диссипативной системы уравнений с многозонным пограничным слоем [Текст] / В. Ф. Бутузов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2019. – Т. 59. – № 10. – С. 1731–1751.

15. Бутузов, В.Ф. Асимптотика и устойчивость стационарного погранслойного решения частично диссипативной системы уравнений [Текст] / В. Ф. Бутузов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2019. – Т. 59. – № 7. – С. 1201–1229.

16. Бутузов, В.Ф. Асимптотика и устойчивость решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трехкратным корнем вырожденного уравнения [Текст] / В. Ф. Бутузов // Изв. РАН. Сер. матем. –2017. – Т. 81. –№ 3. – С. 21–44.

17. Бутузов, В.Ф. О контрастных структурах с многозонным внутренним слоем [Текст] / В. Ф. Бутузов // Модел. и анализ информ. систем. – 2017. – Т. 24. – № 3. – С. 288–308.

18. Бутузов, В.Ф. О зависимости структуры пограничного слоя от краевых условий в сингулярно возмущенной краевой задаче с кратным корнем вырожденного уравнения [Текст] / В. Ф. Бутузов // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99.

– № 2. – С. 201–214.

19. Бутузов, В.Ф. Асимптотика решения сингулярно возмущенной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения [Текст] / В. Ф. Бутузов // Матем. сб. – 2016. – Т. 207. – № 8. – С. 73–100.

20. Бутузов, В.Ф. Асимптотика решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трех зонным пограничным слоем [Текст] / В. А. Белошапко, В. Ф. Бутузов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2016. – Т. 56. – № 8. – С. 1428–1440.

21. Бутузов, В.Ф. Сингулярно возмущённая краевая задача с многозонным внутренним переходным слоем [Текст] / В. Ф. Бутузов // Модел. и анализ информ. систем. – 2015. – Т. 22. – № 1. – С. 5–22.

22. Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. − Москва: Высшая школа. – 1990. – 208 с. [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Наука, 1973. – 272 с.

23. Данилин, А.Р. Асимптотика решения одной задачи о быстродействии с малым параметром [Текст] / А.Р. Данилин, О.О. Коврижных // Тр. ИММ УрО РАН. –2016. – Т. 22. – № 1. – С. 61–70.

24. Данилин, А.Р. Асимптотика оптимального времени в одной задаче о быстродействии с малым параметром [Текст] / А.Р. Данилин, О.О. Коврижных // Тр. ИММ УрО РАН. – 2015. – Т. 21. – № 1. – С. 71–80.

25. Елисеев, А.Г. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора [Текст] / А. Г. Елисеев, П. В. Кириченко // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН, М. – 2021, – Т. 192. – С. 55–64.

26. Емельянов, К.В. О разностной схеме первого порядка точности для сингулярно возмущенной задачи с точкой поворота [Текст] / К. В. Емельянов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2013. –Т. 19. – № 3. – С. 120–135.

27. Захарова, И.В. Построение асимптотических решений некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений с малым параметром [Текст] / И. В. Захарова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. –

2022. – Т. 212. – С. 50–56.

28. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе [Текст] / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 248 с.

29. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач [Текст] / А.М. Ильин. – М.: Наука. – 1989. – 334 с.

30. Кононенко, Л.И. Задача идентификации для сингулярных систем с малым параметром в химической кинетике [Текст] / Л. И. Кононенко // Сиб. электрон. матем. изв. – 2016. – Т. 13. – С. 175–180.

31. Кожобеков, К.Г. Равномерная асимптотика решений бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [Текст]: – дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / К.Г. Кожобеков – Ош, 2019. – 168 с.

32. Коул, Дж. Методы возмущений в механике жидкости [Текст] / Дж. Коул. – М.: Мир. 1972. – 276 с.

33. Курина, Г. А. Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными [Текст] / Г. А. Курина, М. А. Калашникова // Автомат. и телемех. – 2022. – № 11. – С. 3–61.

34. Локшин Б.Я, Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. – М.: Изд-во МГУ, 1992.

35. Ломов, С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений [Текст] / С.А. Ломов. – Москва: Наука. – 1981. – 400 с.

36. Ломов, С.А. Основы математической теории пограничного слоя [Текст] / С.А. Ломов, И.С. Ломов. – Москва: Изд-во МГУ, 2011. – 456 с.

37. Найфе, А. Введение в методы возмущений [Текст] / А. Найфе. – Москва: Мир. – 1984. – 535 с.

38. Нефедов, Н.Н. Существование и устойчивость стационарного решения с пограничным слоем системы уравнений реакция-диффузия с граничными условиями Неймана [Текст] / Н. Н. Нефедов, Н. Н. Дерюгина // ТМФ. – 2022. – Т. 212. – № 1. – С. 83–94.

39. Нефедов, Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение

[Текст] / Н. Н. Нефедов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2021. – Т. 61. – № 12. – С. 2074–2094.

40. Нефедов, Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для контрастных структур типа ступеньки в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях в пространственно двумерном случае [Текст] / Н.Н. Нефедов // Дифференц. уравнения. –2006. –Т. 42. – № 5. – С. 690–700.

41. Нефедов, Н.Н. Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для решений типа ступеньки в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях [Текст] / Н. Н. Нефёдов, А. Г. Никитин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. –2001. – Т. 41. – № 7. – С. 1057–1066.

42. Нефедов, Н.Н. Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость [Текст] / Н.Н. Нефедов // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36. – № 2. – С. 262–269.

43. Нефедов, Н.Н. Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина. [Текст] / Н.Н. Нефедов, А.Б. Васильева. – М. – 2007. – 9 с.

44. Омаралиева, Г.А. Промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенных уравнениях первого порядка [Текст] / Г.А. Омаралиева, Д.А. Турсунов // Труды Института математики и механики Уральского отделения Российской академии наук. – 2022. –Т. 28. – № 2. – С. 193-200.

45. Омаралиева, Г.А. Асимптотика решения двух зонной двухточечной краевой задачи [Текст] / Г.А. Омаралиева, Д.А. Турсунов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13. – № 2. – С. 40–46.

46. Омаралиева, Г.А. Сингулярно возмущенная задача с двойным пограничным слоем [Текст] / Г.А. Омаралиева, Турсунов Д.А., Маматбуваева М.И., Раманкулова Ш.А. // Вестник ОшГУ. – 2021. – Т. 1. – № 1. – С. 102-109.

47. Омаралиева, Г.А. Бисингулярно возмущенное уравнение первого порядка с бипограничным слоем [Текст] / Г.А. Омаралиева, Турсунов Д.А., Муса уулу Н. Э. // Вестник ОшГУ. – 2022. – № 4. – С. 244-251.

48. Омаралиева, Г.А. Асимптотика решения трех зонной задачи Коши [Текст] / Г.А. Омаралиева // Вестник ЖАГУ. – 2022. – № 4. – С. 17-22.

49. Омаралиева, Г.А. Достаточное условие существования дополнительной зоны в сингулярно возмущенных краевых задачах второго порядка [Текст] / Г.А. Омаралиева // Бюллетень науки и практики. – 2023. – Т. 9. – № 2. – С. 10-16.

50. Орозов, М.О. Асимптотика решения краевых задач для линейных бисингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа [Текст]: – дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / М.О. Орозов – Ош, 2021. – 131 с.

51. Розов, Н.Х. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной [Текст] / Н.Х. Розов, В.Г. Сушко, Д.И. Чудова // Фундамент. и прикл. матем. – 1998. – Т. 4. – № 3. – С. 1063–1095.

52. Розов, Н.Х. Асимптотическое решение бисингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В. Г. Сушко, Н. Х. Розов // Матем. моделирование. –1997. – Т. 9. – № 10. – С. 33.

53. Розов, Н.Х. Метод барьерных функций и асимптотические решения сингулярно возмущенных краевых задач [Текст] / Н. Х. Розов, В. Г. Сушко // Докл. РАН. – 1993. – Т. 332. – № 3. – С. 294–296.

54. Розов, Н.Х. Некоторые замечания о бисингулярных краевых задачах [Текст] / Н. Х. Розов // Современная математика и ее приложения. – 2005. –Т. 35. – С. 44-47.

55. Тихонов, А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра [Текст] / А.Н. Тихонов // Математический сборник. – 1948. – Т. 22 (64). – С. 193-204.

56. Тихонов, А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных [Текст] / А.Н. Тихонов // Математический сборник. – 1952. – Т. 31(73). – № 3. – С. 575-586.

57. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений [Текст] / Д.А. Турсунов. – Ош: Билим, 2013. – 150 с.

58. Турсунов, Д.А. Асимптотическое решение задачи Неймана с нерегулярной особой точкой [Текст] / Д. А. Турсунов, К. Г. Кожобеков, // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН, М. – 2021. – Т. 201. – С. 98–102.

59. Турсунов, Д.А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем [Текст] / Д. А. Турсунов // Изв. вузов. Математика. – 2018. – № 3. – С. 70–78.

60. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» [Текст] / Д. А. Турсунов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2018. – № 54. – С. 46–57.

61. Усков, В.И. Асимптотическое решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве [Текст] / В.И. Усков // Матем. заметки. – 2021. – Т. 110. – Вып. 1. – С. 143–150.

62. Усков, В.И. Асимптотика решения уравнения первого порядка с малым параметром при производной с квадратичным возмущением в правой части [Текст] / В.И. Усков // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2022. – № 1. – С. 18–32.

63. Федорюк, М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1983. – 352 с.

64. Шарифзода, З.И. О циклических решениях уравнения Понтрягина с малым параметром [Текст] / З. И. Шарифзода, Э. М. Мухамадиев, И. Д. Нуров // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2021. – Т. 194. – С. 167–171.

65. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя [Текст] / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. –712 с.

66. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений [Текст]: – дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / У.З. Эркебаев – Ош, 2016. – 118 с.

67. Abrahamsson, L. A priori estimates for solutions of singular perturbations with a turning point [Text] / L.A. Abrahamsson // Stud.Appl.Math. – 1977. – 56. – P. 51-69.

68. Ackerberg, R.C. Boundary layer problems exhibiting resonance [Text] / R. C. Ackerberg, R. E. O'Malley // Studies in Appl. Math. –1970. – 49. –P. 277-295.

69. Alymkulov, K. Perturbed Differential Equations with Singular Points [Text] / K. Alymkulov, D.A.Tursunov // In book "Recent Studies in Perturbation Theory", Chapter 1, Edited by Dimo I. Uzunov. Publisher InTech. – 2017.

70. Alymkulov, K. Generalized method of boundary layer function for bisingularly perturbed differential Cole equation [Text] K. Alymkulov, D. A. Tursunov, B. A. Azimov / FJMS. – 2017. – V. 101. No 3. – P. 507–516.

71. Carrier, C.F. Boundary lave problems in applied mathematics [Text] / C.F. Carrier // Comm. Appl. Math. – 1954. – V.7. – P.11-17.

72. Nayfeh, Ali H. Perturbation Methods [Text] / Ali H. Nayfeh // John Wiley & Sons. 2008.

73. Niijima, K. Approximate Solutions of Singular Perturbation Problems with a Turning Point [Text] / K. Niijima // Funkcialaj Ekvacioj. –1981. – Vol. 24. – P. 259-280.

74. Niijima, K. On the behavior of solutions of a singularly perturbed boundary value problem with a turning point [Text] / K. Niijima // SLAM J. Math. Anal. – 1978. – Vol. 9. – P. 298-311.

75. O'Malley, R.E. Introduction to Singular Perturbation [Text] / R. E. O'Malley // Academic Press, New York. 1974.

76. Omaralieva, G.A. Asymptotics of the Solution of Bisingular Boundary Value Problems with a Biboundary Layer [Text] / G.A. Omaralieva,

K.G. Kozhobekov, D.A. Tursunov // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022. – Vol. 43. – no. 11. –P. 166–172.

77. Omaralieva, G.A. Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem with additional boundary layer [Text] / G.A. Omaralieva, D.A. Tursunov // MADEA-8 International Conference. Kyrgyzstan-Turkey-Ukraine. Bishkek. – 2018. – P. 128.

78. Omaralieva, G.A. Three-band boundery boundary value problem [Text] / G.A. Omaralieva, D.A. Tursunov, M.O. Orozov // Theses of international scientific conference "Problem of modern mathematics and its applications". Kyrgyzstan, Bishkek-Issyk-Kul, 16-19 June, 2021. – P. 67.

79. Prandtl, L. Uber Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung [Text] / L. Prandtl. – Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker Kongresses, Heidelberg, 1904. – P. 484-491.

80. Protter, M.H. Maximum Principles in Differential Equations [Text] / M.H. Protter, H.F. Weinberger // Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1967.

81. Tursunov, D. A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem [Text] / D. A. Tursunov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38. No 3. – P. 542–546.