УДК 517.956

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пирматов Абдыманап Зияйдинович – к.ф.-м.н., ОшГУ, **pirmatov@mail.ru**
Абдукадыр кызы Айнагул – преподаватель, abdukadyrkyzy2014@mail.ru
Сатимкулов Азизбек Ядигарович
Магистрант ЖАГУ имени Б.Осмонова,
azizbek.satimkulov@inbox.ru

***Аннотация**. Доказана существование и единственность решения краевой задачи для гиперболического уравнения четвертого порядка с переменным коэффициентом. Приведен пример.*

***Ключевые слова**: краевые задачи, существование, единственность, интегральное уравнение, резольвента, гиперболическое уравнение.*

ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕСИ ЖӨНҮНДӨ

Пирматов Абдыманап Зияйдинович – ф.-м.и.к., ОшГУ, pirmatov@mail.ru
Абдукадыр кызы Айнагул – окутуучу, abdukadyrkyzy2014@mail.ru
Сатимкулов Азизбек Ядигарович
Магистрант ЖАГУ,
azizbek.satimkulov@inbox.ru

***Аннотация**. Өзгөрүлүүчү коэффициентүү төртүнчү тартиптеги гиперболикалык теңдемелер үчүн чек аралык маселелердин жашашы жана жалгыздыгы далилденди. Мисал келтирилди.*

***Ключевые слова**: чек аралык маселелер, жашашы, жалгыздыгы, интегралдык теңдеме, резольвента, гиперболикалык теңдеме.*

ON THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE FOURTH-ORDER HYPERBOLIC PARTIAL DERIVATIVE EQUATION

Pirmatov Abdymanap Ziyaydinovich,
OshSU, **pirmatov@mail.ru**
Abdukadyr kyzy Ainagul, teacher,
abdukadyrkyzy2014@mail.ru
Satimkulov Azizbek Yadigarovich,
master's degree student
JASU named after him. B.Osmonov,
azizbek.satimkulov@inbox.ru

***Annotation:** The existence and uniqueness of a solution to the boundary value problem for a fourth-order hyperbolic equation with a variable coefficient is proved. An example is given.*

***Key words:** boundary value problems, existence, uniqueness, integral equation, resolvent, hyperbolic equation.*

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + c(x,y)u_y = f(x,y), \qquad (1)$$

в области $D = \{(x,y): 0 < x < 1, 0 < y < h\}$ $(1, h > 0)$ (Рис. 1), где $c(x,y), f(x,y)$ – заданные функции.

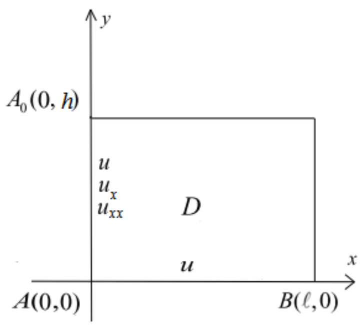

Рис. 1. Область D

Уравнение характеристик для уравнения (1) имеет вид [1]

$$-(dy)^3 dx = 0.$$

Следовательно, прямая $x = const$ является однократным характеристикой, а прямая $y = conts$ - трёхкратным характеристикой.

Пусть C^{n+m} означает класс функций, обладающие непрерывными производными вида $\partial^{r+s} / \partial x^r \partial y^s$ $(r = 0,1,2,...,n; s = 0,1,2,...,m)$.

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \mathrm{I}\ C^{3+1}(D)$;
2) удовлетворяет в области D уравнению (1);
3) удовлетворяет краевым и начальным условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u_x(0,y) = \varphi_2(y), u_{xx}(0,y) = \varphi_3(y), 0 \le y \le 1, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le 1, \qquad (3)$$

4) удовлетворяет условиям гладкости и согласования

$$\begin{cases} \varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y) \in C[0,h], \\ \tau(x) \in C^3[0,1],\ f(x,y) \in C[\bar{D}], \end{cases} \qquad (4)$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \tau^{'}(0) = \varphi_2(0), \tau^{''}(0) = \varphi_3(0). \qquad (5)$$

Краевые задачи для уравнения (1) рассмотрены в работах [1, 2]. Аналог задачи Дарбу для уравнения (1) изучена в работе [3].

Введем обозначение

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \upsilon(x,y), (x,y) \in D. \qquad (6)$$

Тогда из уравнения (1) имеем

$$\frac{\partial^3 \upsilon(x,y)}{\partial x^3} + c(x,y)\upsilon(x,y) = f(x,y), (x,y) \in D, \qquad (7)$$

а из краевых условий (2) получим следующие условия:

$$\upsilon(0,y)=\varphi_1'(y),\upsilon_x(0,y)=\varphi_2'(y),\upsilon_{xx}(0,y)=\varphi_3'(y),0\le y\le h. \qquad (8)$$

Таким образом, для определения функции $\upsilon(x,y)$, придём к задаче Коши (7), (8). Интегрируя трижды уравнение (7) по x от 0 до x имеем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $\upsilon(x,y)$:

$$\upsilon(x,y)=f_1(x,y)+\int_0^x K(x,\xi)\upsilon(\xi,y)d\xi, \qquad (9)$$

где

$$K(x,\xi)=-\frac{1}{2}(x-\xi)^2c(\xi,y),\ f_1(x,y)=\varphi_1'(y)+x\varphi_2'(y)+$$

$$+\frac{1}{2}x^2\varphi_3'(y)+\frac{1}{2}\int_0^x(x-\xi)^2 f(\xi,y)d\xi.$$

Методом резольвенты получим решение уравнения (9) в виде [4]

$$\upsilon(x,y)=f_1(x,y)+\int_0^x R(x,\xi)f_1(\xi,y)d\xi, \qquad (10)$$

где $R(x,\xi)$ - резольвента ядра $K(x,\xi)$:

$$R(x,\xi)=K_1(x,\xi)+K_2(x,\xi)+...+K_n(x,\xi)+...,$$

$$K_1(x,\xi)=K(x,\xi),\ K_1(x,x)=0,$$

$$K_2(x,\xi)=\int_\xi^x K_1(x,s)K_1(s,\xi)d\xi,\ K_2(x,x)=0,$$

$$...\qquad ...$$

$$K_n(x,\xi)=\int_\xi^x K_1(x,s)K_{n-1}(s,\xi)d\xi,\ K_n(x,x)=0,...$$

Нетрудно заметить, что $R(x,x)=0,$ так как $K(x,x)=0.$ Отметим также, что $f_1(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f_1(0,y)=\varphi_1'(y),\ f_{1x}(0,y)=\varphi_2'(y),\ f_{1xx}(0,y)=\varphi_3'(y). \qquad (11)$$

Следовательно, функции $\upsilon(x,y),$ определенная формулой (10), является решением задачи (7), (8).

В случае, когда $c(x,y)\equiv 0,$ из (10) получим явное решение в виде

$$\upsilon(x,y)=\varphi_1'(y)+x\varphi_2'(y)+\frac{1}{2}x^2\varphi_3'(y).$$

Подставляя выражение $\upsilon(x,y),$ определенная по формуле (10) в (6) и интегрируя по y полученное равенства в пределах от 0 до y имеем

$$u(x,y)=\tau(x)+\int_0^y f_1(x,\eta)d\eta+\int_0^x d\xi\int_0^y R(x,\xi)f_1(\xi,\eta)d\eta. \qquad (12)$$

Нетрудно заметить, что функция $u(x,y),$ определенная по формуле (12) удовлетворяет начальному условию (3).

Проверим выполнение краевых условий (2). Из формулы (12) имеем:

$$u(0,y)=\tau(0)+\int_0^y f_1(0,\eta)d\eta=\tau(0)+\int_0^y \varphi_1'(\eta)d\eta=$$

$$=\tau(0)+\varphi_1(y)-\varphi_1(0)=\varphi_1(y).$$

Так как $R(x,x)=0$, то из (12) находим:

$$u_x(x,y)=\tau'(x)+\int_0^y f_{1x}(x,\eta)d\eta+\int_0^x d\xi\int_0^y R_x(x,\xi)\,f_1(\xi,\eta)d\eta.$$

Следовательно,

$$u_x(0,y)=\tau'(0)+\int_0^y f_{1x}(0,\eta)d\eta=$$

$$=\tau'(0)+\int_0^y \varphi_2'(\eta)d\eta=\tau'(0)+\varphi_2(y)-\varphi_2(0)=\varphi_2(y).$$

Аналогично имеем, что

$$u_{xx}(0,y)=\tau''(0)+\int_0^y f_{1xx}(0,\eta)d\eta=$$

$$=\tau''(0)+\int_0^y \varphi_3'(\eta)d\eta=\tau''(0)+\varphi_3(y)-\varphi_1(0)=\varphi_3(y).$$

Следовательно, все граничные условия (2) выполняются. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняется условия (4) и (5). Тогда решение задачи 1 существует, единственно и представимо в виде (12).

Пример 1. Требуется определить решение задачи 1, если $c(x,y)\equiv 0$,

$$f(x,y)\equiv 0,\ \tau(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\quad \varphi_1(y)=\frac{\gamma}{1+y^2},\ \varphi_2(y)=\beta\cos y,\quad \varphi_3(y)=2\alpha e^y,$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ - произвольные действительные числа.

Нетрудно проверить, что условия согласования (5) выполняется, а $R(x,\xi)\equiv 0$. Функция $\upsilon(x,y)$, согласно формуле (10), определяется следующим образом:

$$\upsilon(x,y)=-\frac{2\gamma y}{(1+y^2)^2}-\beta x\sin y+\alpha x^2 e^y. \tag{13}$$

Интегрируя равенство (6) по y в пределах от 0 до y и учитывая при этом равенство (13), находим явный вид решение задачи 1 в виде

$$u(x,y)=\alpha x^2 e^y+\beta x\cos y+\frac{\gamma}{1+y^2}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что найденное решение удовлетворяет всем условиям задачи 1.

Литература:

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. -144 с.

2. Саадалов Т.Ы. Краевые задачи для псевдопарабо-гиперболического уравнения четвертого порядка// Естественные и математические науки в современном мире. – Сибак. 2016. №5(40). –С. 138-145.
3. Пирматов А.З. Краевые задачи для смешанных псевдо-параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка. - Дис. на соиск. уч. степени к.ф.-м.н. – Ош, 2003.-128 с.
4. Краснов М.А., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. –М: КомКнига, 2007. – 192 с.