УДК 517.928

# ИСТОРИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ

**Алыбаев Курманбек Сарманович**
**д.ф.м.н., профессор, ЖАГУ им. Б.Осмонова**
**г. Жалал-Абад, Кыргызская Республика**
**e-mail:**alybaevkurmanbek@rambler.ru

***Аннотация.*** *Статья носит обзорный характер и содержит историю одной задачи в теории сингулярно возмущенных уравнений.*

***Ключевые слова.*** *Сингулярно возмущенные уравнения, устойчивость, положение равновесие,затягивание потери устойчивости, аналитические и гармонические функции, линии уровня, погранслойные линии и области, области притяжения*

# БИР МАСЕЛЕНИН ТАРЫХЫ

**Алыбаев Курманбек Сарманович, ф.м.и.д, профессор,**
alybaevkurmanbek@rambler.ru
**Б.Осмонов атындагы ЖАМУ**
**Жалал-Абад шаары, Кыргыз Республикасы**

***Аннотация.*** *Макала жалпы мүнөздө болуу менен сингулярдык козголгон теңдемелер теориясында бир маселенин тарыхын камтыйт.*

***Түйүндүү сөздөр.*** *Сингулярдык козголгон теңдеме, туруктуулук, тең салмактуулук, туруктуулуктун жоголушунун узартылышы, аналитикалык жана гармоникалык функциялар, деңгээл сызыктар, чектик катмар сызыктар жана катмарлар, тартылуу областтар.*

# HISTORY OF ONE TASK

**Alybiev Kurmanbek Sarmanovich**
**doctor of physics and mathematics. sciences**
**JASU,** alybaevkurmanbek@rambler.ru
**Kyrgyz Republic, Jalal-Abad city**

***Abstract.*** *The article is of a survey nature and contains the history of the development of one problem in the theory of singularly perturbed equations.*

***Key words.*** *Singularly perturbed equations, stability, equilibrium position, buckling, analytic and harmonic functions, level lines, boundary layer lines and regions, attraction regions*

1. Изначальная задача

В 70-х годах прошлого столетия под руководством академика Л.С. Понтрягина в теории сингулярно возмущенных уравнений было обнаружено новое явление, которое получило название «задержка течения интегральных кривых» или «затягивание потери устойчивости». Суть этого явления заключается в следующем.

В [1] рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned}\varepsilon x_1'(t,\varepsilon) &= y(x_1(t,\varepsilon)-y)-x_2(t,\varepsilon)+\gamma(x_1(t,\varepsilon)-y)\times\\ &\times((x_1(t,\varepsilon)-y)^2+x_2^2(t,\varepsilon)),\\ \varepsilon x_2'(t,\varepsilon) &= (x_1(t,\varepsilon)-y)+yx_2(t,\varepsilon)+\gamma x_2(t,\varepsilon)\times\\ &\times((x_1(t,\varepsilon)-y)^2+x_2^2(t,\varepsilon))\end{aligned} \tag{1}$$

$$y'=1, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon-$ малый вещественный параметр; $t\in R-$ множество вещественных чисел; $\gamma-const\neq 0$; $x_1,x_2-$ неизвестные функции.

Системы вида (1) называются сингулярно возмущенными. Сингулярно возмущенные уравнения (с.в.у),
как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений подразделяются на автономные и неавтономные. Наиболее общие результаты по исследованию неавтономных с.в.у, получены А.Н. Тихоновым [2].
Основная идея исследования автономных с.в.у

$$\begin{aligned} \varepsilon x'(t,\varepsilon) &= f(x,y), \\ y'(t,\varepsilon) &= g(x,y) \end{aligned} \tag{3}$$

принадлежит Л.С. Понтрягину. Он предложил, исследование с.в.у начать с исследования системы «быстрых движений» т.е системы

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = f(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)) \tag{4}$$

в зависимости от того, каковы стационарные решения системы (4). В (4) y рассматривается как параметр. Стационарными решениями могут быть положения равновесия, предельные циклы и другие. Л.С. Понтрягин исследовал систему (4) , в предположении, что она имеет положения равновесия.

Пусть $x = \varphi(y)$ (*) - некоторое положение равновесия системы (4). Подставляя $x = \varphi(y)$ в (3), получим

$$y' = g(\varphi(y), y). \tag{5}$$

Пусть $y = \psi(t)$ - решение (5).

Предполагается, что в интервале $-\alpha \le t < 0$ решение (4) определено и положение равновесия (*) экспоненциально устойчиво, а при $t$ =0 экспоненциальная устойчивость теряется. Тогда решение

$$x = \varphi(\psi(t)), \quad y = \psi(t) \tag{6}$$

вырожденной системы, соответствующее системе (3), является приближенным решением системы (3) с точностью до порядка $\varepsilon$ на интервале $-\alpha \le t \le -\beta$ ( $\beta$ - достаточно малое положительное число, не зависящее от $\varepsilon$), если начальные значения системы (3) при $t = -\alpha$ отклоняются от начальных значений решения вырожденной системы на величину порядка $\varepsilon$.
Для нужд приложений оказывается важным изучить поведение решений системы (3) на всем интервале $-\alpha \le t \le 0$.
На всем интервале $-\alpha \le t \le 0$ теорема А.Н. Тихонова не решает вопроса о близости решения системы (3) и вырожденной системы.
Впервые этот вопрос решен Л.С. Понтрягиным [3] для системы (3), им получено асимптотическое разложение решение системы (3) при значениях $t$, включающих значение, $t$ =0 с точностью до величин порядков $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ и $\varepsilon \ln \varepsilon$.

Предполагается, что система (4) при каждом $y$ своими стационарными решениями имеет лишь положение равновесия.

Тогда, если система $\varepsilon x' = f(x, y_1)$ имеет устойчивые положения равновесия, то точка $x$, перемещаясь по закону (4), быстро приблизится к одному из них, например к $x = x_2$ а потому фазовая точка системы (3) попадает в окрестность (порядка $\varepsilon$) точки $\wp(x_2, y_2)$. После этого переменные $x$ и $y$ в системе (3) будут изменяться уже со сравнимыми скоростями, а движение по траектории этой системы будет происходить плавно, вблизи поверхности $f(x,y) = 0$. Эту поверхность обозначают Г. Описываемое движение является как бы сопровождением устойчивого положения равновесия системы (4), перемещающегося по поверхности Г и при меняющемся y. Изменение $y$ происходит медленно, подчиняясь вырожденной системе. Поэтому переменную $y$ естественно назвать медленной переменной. Характер движения фазовой точки системы (3) вблизи поверхности Г сохраняется до тех пор, пока при некотором бифуркационном значении, например при $y = y_2$, сопровождаемое устойчивое положение равновесия не исчезает (в результате слияния с некоторым неустойчивым положением равновесия системы (4)). Тогда фазовая точка системы (3) быстро устремится в окрестность другого положения равновесия системы

$$\varepsilon x' = f(x, y_2).$$

Может случиться, что в результате последовательного чередования медленных и быстрых движений возникает замкнутая траектория. Тогда соответствующее ей периодическое решение системы (3) будет релаксационным колебанием. Таковы в общих чертах механизмы возникновения релаксационных колебаний, описанные в работе [64].

Если при каждом значении $y$ система (4) имеет своими стационарными решениями не только положения равновесия, то возникают многочисленные задачи.

Выше было отмечено, что если система (4) имеет положение равновесия, устойчивое при некоторых значениях $y$, и теряет устойчивость, например при $y = y_0$, то фазовая точка системы (3) быстро устремится, почти по подпространству $y = y_0$ в окрестность другого устойчивого положения равновесия системы $\boldsymbol{\varepsilon x' = f(x, y_0)}$ .

Оказываеся, что это далеко не всегда так. Именно, если система (4) имеет положение равновесия, которое теряет устойчивость при некотором $y$, то решение системы (3) не сразу уходит от возникшего неустойчивого положения равновесия, а в течение конечного промежутка времени может оставаться вблизи него. Такое явление впервые было изучено для системы (1)-(2) в [1]. Система (1)-(2) в плоскости «быстрых движений» имеет единственное положение равновесие, являющееся фокусом, причем фокус устойчив при $\boldsymbol{y < 0}$ и и неустойчив при $\boldsymbol{y > 0}$.

Естественно, можно было ожидать, что если положение равновесия становится неустойчивым, то решение рассматриваемой системы сразу должно отойти на конечное расстояние от возникшего неустойчивого положения равновесия. В упомянутой работе доказано, что если положение равновесия становится неустойчивым, то решение не сразу уходит от него, а в течение конечного времени остается вблизи него.

Работа послужила толчком для развития исследований в этом направлении. Первой работой, где проводится систематическое исследование с.в.у, для решений которых имеет место явление затягивания потери устойчивости, является работа С.К. Каримова [4]. В данной работе рассматриваются с.в.у второго порядка следующего вида

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = A(t) z(t,\varepsilon) + \varepsilon\varphi(t) + f(t, z(t,\varepsilon)) \tag{7}$$

с начальным условием

$$\| z(t_0,\varepsilon) \| = O(\varepsilon), \tag{8}$$

где $z(t) = colon(z_1(t), z_1(t)),\ A(t) -$ квадратная матрица-функция порядка 2; $\varphi(t)$) и $f(t,z) -$ аналитическая вектор-функция по своим переменным, причем

$$\| f(t,z) \| = O(\| z \|^2).$$

Задача 7)-(8) исследована в случаях, когда матрица-функция *A(t)* имеет линейные собственные значения вида $\lambda_{1,2}(t) = ab + b \pm i(ct + d)$, где $a, b, c, d \in R$ и $a \neq 0$; или $\lambda_{1,2}(t) = (ab \pm ib)^2$, где $a, b \in R$ и $a \neq 0$.

В работе Г.М. Анарбаевой [5] рассмотрен случай, когда матрица-функция *A(t)* имеет собственные значения вида $\lambda_{1,2}(t) = (t + ib)^n$, где $n \in N$.

Особенность рассматриваемого случая заключается в том, что на некотором отрезке $[-t_0, t_0] \in R$ оси существуют несколько отрезков, в каждом из которых $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t)$ меняет свой знак, с отрицательного на положительное. Об этом подробно изложено в работе [7].

В данной работе рассмотрены только те случаи, когда областями в комплексной плоскости являются квадраты и треугольники и они содержат отрезки, где меняет знак $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t)$. Получены результаты, аналогичные [40].

Работа Нейштадта А.И. [6] посвящена исследованию автономных систем, которые содержат быстрые и медленные переменные. Система с быстрыми переменными имеет только положение равновесия. Для решений заданных систем ставится начальная задача и предполагается, что матрица- функция – коэффициент, в системе с быстрыми переменными при линейной неизвестной функции имеет различные собственные значения. Среди собственных значений имеется, одна пара комплексно сопряженных, которые в пространстве медленных переменных мнимую ось пересекают с нулевой скоростью (т.е. в этой точке действительная часть обращается в нуль, а мнимая часть остается отличной от нуля), оставшиеся собственные значения имеют отрицательные действительные части.
Также предполагается, собственные значения не имеют нулей.

Доказано, что в аналитических с.в.у происходит явление затягивания потери устойчивости, которая сопровождается динамическими бифуркациями, т.е. происходит срыв от положения равновесия. При этом метод определения точной границы отрезка(или времени) затягивание потери устойчивости не разработан.

Работы К.С. Алыбаева [7] посвящены разработке методов исследования с.в.у, когда точка покоя присоединенной системы, на некотором отрезке действительной оси, теряет устойчивость. Он рассмотрел системы с.в.у следующего вида

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = A(t)z(t,\varepsilon) + \varepsilon\varphi(t) + \varepsilon f(t, z(t,\varepsilon)) + \varepsilon g(t, z(t,\varepsilon)), \quad t \in [t_0, T] \tag{1.2.11}$$

с начальным условием

$$\| z(t_0, \varepsilon) \| = O(\varepsilon),$$

где $z = colon(z_1, z_2, ..., z_n)$; $\varphi(t), f(t,z), g(t,z)$ – аналитические функции по своим переменным. $\| g(t,z) \| = O(\| z \|^2)$, $\| f(t,z) \| = O(\| z \|)$.

Матрица-функция $A(t) = diag[\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t)]$, причем $\lambda_j(t) \neq \lambda_k(t)$ при $j \neq k$ и среди этих собственных значений имеется одна пара комплексно-сопряженных, которые меняют знаки действительных частей на отрезке $[t_0, T]$.

К примеру, если $\lambda_1(t) = (\lambda_2(t))^*$, то $\operatorname{Re}\lambda_1(t) < 0$ при $t_0 \le t < T_0$; $\operatorname{Re}\lambda_1(T_0) = 0$; $\operatorname{Re}\lambda_1(t) < 0$ при $t_0 \le t < T$. Предполагается, в некоторой точке $t = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ $\lambda_1(t)$ имеет простой нуль.

Для исследовании поставленной задачи применен топологический подход. Введено понятие - размеченное множество - это такое множество (в $R^2$ или C), что оно полностью заполняется некоторыми ориентированными кривыми типа Жордана. В работе такими кривыми являются линии уровней гармонических функций, порождаемых собственными значениями $\lambda_{1,2}(t)$.

Доказано, что существование размеченных множеств, содержащих отрезок **$[t_0, T]$**, является достаточным условием затягивания потери устойчивости на этом отрезке. Является ли это условие необходимым, к этому времени еще не исследовано.

Сформулированы условия, при выполнении которых существуют размеченные множества. Разработанный метод назван «метод линий уровня». Метод позволяет точно определить длину отрезка «затягивание потери устойчивости» и применима, когда собственные значения имеют нулей

Д.А. Турсунов [8], применяя метод линий уровня доказал, что для некоторых классов с.в.у промежуток затягивания потери устойчивости можно растягивать вправо до $(+\infty)$, при этом $t_0$ стремится к нулю справа т.е $t_0 \to +0$ **или** $t_0 \to -\infty$.

Работы М.А. Азимбаева [9] посвящены исследованию с.в.у в тех случаях, когда комплексно- сопряженные собственные значения являются периодическими функциями; матрица-функция $A(t)$ при неизвестной функции имеет две пары комплексно - сопряженных собственных значений, действительные части каждой пары меняют знаки на отрезке $[t_0, T]$, причем размеченные множества являются неограниченными. Доказано, что в рассматриваемых случаях происходит явление затягивания потери устойчивости.

Далее, исследование с.в.у с аналитическими функциями, проведены в другом направлении. К таким относятся работы М.Р Нарбаева [10], К.Б Тампагарова [11], А.Б Мурзабаевой [12], и Т.К. Нарымбетова [13].

В перечисленных работах, с.в.у исследованы без привлечения устойчивости положений равновесия или точек покоя присоединенных уравнений и других условий.

М.Р. Нарбаев, рассматривая линейные с.в.у, обнаружил существование областей, где решение с.в.у и соответствующего невозмущенного уравнения асимптотически не близки (при $\varepsilon\to 0$). Такие области названы простирающиеся пограничные слои. Полученный результат обобщен на, некоторый класс, систем с.в.у состоящих из двух уравнений первого порядка.

К.Б. Тампагаров в теории с.в.у с аналитическими функциями ввел новые понятия: погранслойные линии, погранслойные области, регулярные и сингулярные области.

Погранслойные линии являются границами погранслойных областей. В погранслойных линиях и областей не имеет место предельный переход решения с.в.у к решению н.у при $\varepsilon\to 0$. Регулярная область, где имеет место предельный переход. В сингулярной области решение с.в.у не ограничена. К.Б. Тампагаров доказал, что явление «затягивание потери устойчивости» для аналитических систем, происходит при выполнении определенных условий, а существование погранслойных линий, погранслойных областей, регулярных и сингулярных областей свойственны для таких систем. Следует отметить, погранслойные линии имеют некоторое сходство с линиями Стокса. Линии Стокса разделяют область на части, в каждом из которых определяются фундаментальные системы решений,а погранслойные линии разделяют на регулярные и сингулярные части.

А.Б. Мурзабаева исследовала некоторый класс с.в.у, соответствующие н.у которых имеют несколько решений. Ввела понятие область притяжений решения с.в.у к решению н.у. Доказала существование областей притяжений.

Т.К. Нарымбетов исследовал более широкий класс с.в.у на предмет существование областей притяжения и их взаимосвязи. Доказал, при определенных условиях, существование общих частей областей притяжений.

Подведя итог можно сказать в математике нередки, а может быть и закономерны, случаи, когда одна задача служит началом новой теории или направления. Таковым является задача предложенный академиком Л.С. Понтрягиным и решенная в [1].

**Литература:**

1. Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений малым параметром при высших производных [Текст]/М.А. Шишкова//Доклады АН СССР. - 1973. - Т. 209, №3. - С. 576-579.
2. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений содержащих малые параметры при производных [Текст] / А.Н. Тихонов // Математический сборник. -1952.-Т.31(73), №3. - С. 575-586.
3. Понтрягин Л.С. Асимптотическое поведение решений систем дифференци-альных уравнений с малым параметром при высших производных [Текст] / Л.С. Понтрягин // Известия АН СССР. - 1957. - Т. 21, No5. - С. 605-626.
4. Каримов С. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» [Текст]: дисс. ... Д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / С. Каримов. - Ош, 1983. - 260 с.
5. Анарбаева Г.М. Асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости положения равновесия (Текст): дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Г.М. Анарбаева. - Бишкек, __________1993. - 120 с.
6. Нейштадт А.И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях I, II [Текст] /
А.И. Нейштадт // Дифференциальные уравнения, 1987. - Т. 23. №12. - С. 2060-2067; 1988. - Т. 24. №2. - С. 226-233.
7. Алыбасв К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости [Текст]: - дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02/К.С. Алыбаев. - Жалалабат, 2001. - 203 с.
8. Турсунов Д.А. Асимптотика решений сингулярно возмущенных уравнений в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют п- кратный полюс [Текст]: дисс. ... канд.физ.-мат.наук: 01.01.02/ Д.А.Турсунов. - Ош, 2005. - 110 с.
9. Азимбаев М.А. Устойчивость решений начальной задачи линейных сингулярно возмущенных уравнений [Текст]: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02/ М.А. Азимбаев. - Бишкек, 2010. - 116 с.
10. Нарбаев М.Р. Простирающиеся пограничные слои в теории сингулярно возмущенных уравнений
при потере устойчивости [Текст]: - дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / М.Р. Нарбаев. - Бишкек, 2010. - 116 с.

11. Тампагаров К.Б. Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями [Текст]: - дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02/ К.Б. Тампагаров. - Бишкек, 2017. - 218 с.
12. Мурзабаева А. Исследование сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с разделением множеств при вырождении [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02/ Мурзабаева А. - Ош, 2019 - 120 с.
13. Нарымбетов Т.К. *Существования и связи областей притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений* [Текст]: - дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Т.К. Нарымбетов. - Ош, 2022. - 209 с.
14. К.С. Алыбасв. Покрытие областей в R2. [Текст] / К.С. Алыбасв, Т.К. Нарымбетов.// Вестник ЖАГУ 2019, Мо3 (42), стр: 133-142.