

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Б. ОСМОНОВА

На правах рукописи

УДК 517.928

Нурматова Майрамгул Нарбековна

**Асимптотика решений автономных сингулярно возмущенных уравнений
при смене устойчивости положения равновесия**

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальные управления

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Алыбаев Курманбек Сарманович

Жалал-Абад – 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	4
ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1. ПРЕДЫСТОРИЯ ИССЛЕДУЕМОЙ ЗАДАЧИ	15
§1.1. Явление задержки решения в теории сингулярно возмущенных уравнений.....	15
§1.2. Сингулярно возмущенные уравнения в комплексных областях	17
§1.3. Заключение по главе 1	19
ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ..	20
§2.1. Объект исследования и постановка задачи	20
§2.2. Методология исследования.....	22
2.2.1. Методы, используемые в данной работе.....	22
2.2.2. Некоторые сведения, на которых базируются используемые методы	23
§ 2.3. Заключение по главе 2	29
ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ.....	31
§3.1. Основные критерии для геометрических построений.....	31
§3.2. Геометрические построения	33
3.2.1. Построения для случая C1.....	33
3.2.2. Построения для случая C2.....	38
3.2.3. Построения для случая C3.....	40
3.2.4. Построения для случая C4.....	46
3.2.5. Построения для случая C5.....	49
§ 3.3. Заключение по главе 3	51

ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДЕРЖКИ РЕШЕНИЙ.....	52
§4.1. Задержка решения для случая С1.....	52
§4.2. Задержка решения для случая С2.....	58
§4.3. Задержка решения для случая С3.....	60
§4.4. Задержка решения для случая С4.....	74
§4.5. Задержка решения для случая С5.....	84
Заключение по главе 4	86
ВЫВОДЫ	87
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	88

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

1. Обозначения

- R, C – множества действительных и комплексных чисел;
- $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица;
- $t = t_1 + it_2$ – комплексная переменная, где t_1, t_2 – действительные переменные;
- $D \subset C$ и D – односвязная, ограниченная открытая область;
- $Q(D)$ – пространство аналитических функций в D ;
- $ReA(t), ImA(t)$ – вещественно значные функции двух действительных переменных;
- $(K) [t_0, t]$ – часть кривой (K) , соединяющая точки t_0 и t ;
- $0 < \varepsilon$ – малый положительный вещественный параметр;
- СВУ – сингулярно возмущенное уравнение;
- НУ – невозмущенное уравнение;
- ОП – область притяжения;
- ЗПУ – затягивание потери устойчивости;
- ПР – положение равновесия;
- ЗР – задержка решения;

2. Символы

- $\forall t$ – для любого t ;
- $\exists t$ – существует такое t ;
- $\exists! t$ – существует такое, единственное t ;
- $=$ – знак равенства;
- $\neq$ – знак неравенства;
- $\in$ – знак принадлежности;
- $\notin$ – знак не принадлежности;
- $\cup$ – знак объединения;
- $\cap$ – знак пересечения;
- $\subset$ – знак вложения;

- Λ – союз «и»;
- $\vee$ – союз «или»;
- $r_2 \gg r_1$ – “ r_2 значительно больше чем r_1 .”

3. Понятия

1. Если $x(t, \varepsilon) = (x_1(t, \varepsilon), \dots, x_n(t, \varepsilon))$ и $t \in \mathcal{D} \subset C$, то

$$\|x\| \leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j(t, \varepsilon)|, \quad t \in \mathcal{D}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

2. Если задано уравнение

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = A(t)x(t, \varepsilon) + f(\varepsilon, t, x(t, \varepsilon)), \quad (1)$$

то $A(t)$ – называется матрицей-функцией первого приближения.

3. Если в (1) возьмем $\varepsilon = 0$, то уравнение

$$A(t)\xi(t) + f(0, t, \xi(t)) = 0$$

называется невозмущенным (вырожденным) уравнением, соответствующим (1).

4. Если

1) $\forall t \in \Omega_0$ ($|z(t, \varepsilon)|$ – ограничено по ε);

2) $\forall t \in \Omega_0$ ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z(t, \varepsilon)$ – не существует),

то множество Ω_0 называется погранслоинным множеством.

5. Погранслоинной линией называется погранслоинное множество, которое является непрерывным и локально-взаимно однозначным образом отрезка.

6. Если $\xi(t)$ – решение невозмущенного уравнения и $\forall t \in \mathcal{D}$ существует уравнение (1) с начальным условием

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0$$

и выполняется соотношение

$$\forall t \in \mathcal{D} (x(t, \varepsilon) \rightarrow \xi(t) \text{ по } \varepsilon),$$

то $\mathcal{D}$ называется областью притяжения решения $x(t, \varepsilon)$ к решению $\xi(t)$.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Обыкновенные или в частных производных дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром при старших производных называются сингулярно возмущенными уравнениями [57]. Полагая малый параметр равным нулю, получаем невозмущенное (вырожденное) уравнение (НУ).

(Для уравнений в частных производных см. М.И.Вишик, Л.А.Люстерник [22], Д.А.Турсунов [68]).

В этой работе мы будем рассматривать только обыкновенные уравнения. Их аргумент и соответственно известные функции могут быть из R или из C . В последнем случае существенно новые результаты дают аналитические функции.

Может рассматриваться либо одно (скалярное) уравнение, либо система таких уравнений (векторно-матричное уравнение).

Для таких уравнений мы будем рассматривать только начальные задачи.

(Для краевых задач см. К.Алымкулов [10], этот метод также применяется в для асимптотического разложения решения ОДСВУ и СВУ в частных производных [12], [66-68]).

Обыкновенные дифференциальные уравнения разделяются на два класса: автономные и неавтономные. Но введением дополнительной искомой функции, производная которой равна единице, неавтономные уравнения приводятся к автономным. Поэтому в дальнейшем не будем различать неавтономные и автономные. В данной работе уравнения представлены в автономном виде. В дальнейшем сингулярно возмущенные.

Л.С.Понтрягин предложил начать исследование автономных сингулярно возмущенных уравнений с исследования систем быстрых переменных, в зависимости от стационарных решений, при фиксированных значениях медленной переменной. Используются стационарные решения: положение равновесия или периодические решения. Его основные результаты изложены в [57] и дальнейшее развитие теории - в [58], [39-40].

Для неавтономных сингулярно возмущенных уравнений начальные результаты были получены А.Н.Тихоновым и его учениками А.Б.Васильевой, В.Ф.Бутузовым [18-21].

А.Н.Тихонов [64-65] доказал, что при условии устойчивости точки покоя присоединенной системы в окрестности начального значения независимой переменной, появляется пограничная зона. В пограничной зоне решения сингулярно возмущенных уравнений и невозмущенного уравнения асимптотически не близки по малому параметру (при стремлении малого параметра к нулю), но потом становятся близкими. Далее теория сингулярно возмущенных уравнений развивалась в направлении построения разложения решений сингулярно возмущенных уравнений по малому параметру. По методу А.Б.Васильевой [18] разложение состоит из двух частей (слагаемых). Первая часть называется пограничной, а вторая - регулярной. Первая часть содержит пограничные функции, которые существенны только в достаточно малой окрестности начального значения. Вне этой окрестности пограничные функции стремятся к нулю (имеют экспоненциальный характер убывания).

С.А.Ломов [37] предложил способ построения асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений при помощи подъема в пространство с большим числом измерений.

М.И.Иманалиев применил метод пограничных функций для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений и разработал более простой, удобный для практического применения алгоритм вычисления пограничных функций [25], [28].

М.И.Иманалиев, П.С.Панков, Г.М.Кененбаева [26-29] нашли ряд явлений в теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, на основе чего Г.М.Кененбаева ввела рамочные понятия эффекта и явления в математике [33].

В 70-х годах прошлого столетия под руководством [71] Л.С. Понтрягина в теории сингулярно возмущенных уравнений было обнаружено новое явление, которая получила название задержка интегральных кривых вблизи неустойчивого положения равновесия. Суть этого явления заключается в

следующем. Из общей теории автономных сингулярно возмущенных уравнений следует, если система быстрых движений имеет положение равновесия, которое устойчиво при некоторых значениях медленной переменной и теряет устойчивость при некотором бифуркационном значении медленной переменной, то решение быстрой системы покидает возникшее неустойчивое положение равновесия и устремляется по подпространству медленной переменной, к другому устойчивому положению равновесия. Оказывается, что это далеко не всегда так, а именно когда положение равновесия становится неустойчивым, то решение не сразу покидает возникшее неустойчивое положение равновесия, а в течение конечного времени остается вблизи него.

С.Каримов [31-32] нашел асимптотику решений для одного класса сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости фокуса в плоскости быстрых движений. А.И.Нейштадт [45-46] установил, что явление затягивание потери устойчивости для аналитических систем является общим положением. Он рассмотрел случай, когда в системе быстрых переменных, устойчивость положения равновесия определяется только одной парой комплексно-сопряженных собственных значений.

К.С.Алыбаев [2] разработал метод линии уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при смене устойчивости точки покоя.

Г.М.Анарбаева [13] исследовала случай, когда одна пара комплексно-сопряженных собственных значений имеют кратные нули.

М.А.Азимбаев [1] рассмотрел случай, когда область независимой переменной является неограниченной.

Д.А.Турсунов [67] установил, для некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений время затягивания можно расширить неограниченно.

Задержка решений при потере устойчивости для сингулярно возмущенных уравнений с траекториями-утка рассмотрена в работах [23-24], [61-62], [76], [80], [85].

Задержка решений при потере устойчивости по трем направлениям была реализована в [89], на основе чего был изготовлен механический странный аттрактор.

В ранних работах были рассмотрены случаи, когда устойчивость положения равновесия определяется одной парой комплексно-сопряженных собственных значений матрицы-функции первого приближения. На некотором отрезке действительной оси действительные части таких собственных значений меняют свои знаки с отрицательного на положительное. Таким образом, происходит смена устойчивости положения равновесия. Случаи, когда на устойчивость положения равновесия влияют все собственные значения матрицы-функции первого приближения, не были исследованы. В этом случае действительные части всех собственных значений в некоторых точках отрезка действительно оси меняют знаки. Следовательно, проведение исследований в этом направлении является актуальной задачей и основное содержание диссертации составляют исследование асимптотики решений автономных сингулярно возмущенных уравнений при нарушении устойчивости положения равновесия в нескольких точках и решение других задач, связанных с данной проблемой.

Связь темы диссертации с приоритетными научными направлениями, крупными научными программами (проектами), основными научно-исследовательскими работами, проводимыми образовательными и научными учреждениями:

Диссертация выполнялась в связи с тематикой научных исследований кафедры “Математики и математического моделирования” Жалал-Абадского государственного университета имени Б.Осмонова.

Цель и задачи исследования:

Исследование асимптотического поведения решений автономных систем сингулярно возмущенных уравнений, имеющих положения равновесия, когда устойчивость положения равновесия определяется всеми собственными значениями матрицы-функции первого приближения.

Для достижения цели поставлены следующие задачи исследования:

1. Исследовать асимптотическое поведение решений автономных систем сингулярно возмущенных уравнений, матрицы-функции первого приближения, которые имеют различное количество (больше двух) собственных значений и все собственные значения влияют на устойчивость положения равновесия;
2. Применяя свойства поверхностей и линии уровня гармонических функций, произвести геометрические построения в комплексной плоскости;
3. Сформулировать критерии построения областей, которые также определяют оптимальный выбор путей интегрирования;
4. Упростить рассматриваемые уравнения с заменой начальных значений на переменные начальные условия на некоторых линиях;
5. Выявить собственные значения, оказывающих существенное влияние на задержку решения;
6. Выбрать совокупность методов для исследования асимптотического поведения рассматриваемых АССВУ.

Научная новизна работы:

1. Установлено асимптотическое поведение решений новых классов автономных систем сингулярно возмущенных уравнений, когда устойчивость положения равновесия теряется в нескольких точках действительного отрезка;
2. Предложена методика использования поверхностей гармонических функций, для определения области в комплексной плоскости;
3. Впервые применены методы Лапласа и стационарной фазы в сочетании при получении асимптотических оценок;
4. Для различных случаев уравнений определены собственные значения, оказывающие существенное влияние на задержку решений;
5. Применен метод замены начальных условий на переменные начальные условия на некоторых линиях и уравнения приведены к наиболее простому виду.

Практическая значимость полученных результатов. Работа вносит вклад в теорию сингулярно возмущенных уравнений; применяемую методологию

можно использовать для дальнейшего развития теории автономных систем сингулярно возмущенных уравнений на задержку решения.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Найдены новые классы автономных систем сингулярно возмущенных уравнений, имеющие положения равновесия;
2. Построена асимптотика решений в случаях, когда матрицы-функции первых приближений рассматриваемых уравнений имеют различное количество (больше двух) собственных значений и все собственные значения влияют на устойчивость положения равновесия;
3. Разработана методология построения области в комплексной плоскости, основанная на свойствах поверхностей и линии уровня гармонических функций;
4. Найдены критерии оптимального выбора путей интегрирования;
5. Разработана методика замены начальных значений на переменные начальные условия на некоторых линиях;

Личный вклад соискателя: Основные положения диссертации были разработаны соискателем. Постановка задач исследования принадлежит научному руководителю, профессору К.С. Алыбаеву, а решение поставленных задач и получение основных результатов – выполнены диссертантом.

Апробации результатов исследования. Результаты настоящей работы доложены и обсуждены на:

- семинаре кафедры Математики и математического моделирования Жалал-Абадского государственного университета имени Б.Осмонова под руководством профессора К.С.Алыбаева (г. Жалал-Абад, 2018-2025 гг.);
- международной научной конференции “Проблемы современной математики и ее приложения”, посвященной 70-летию академика А.А.Борубаева (Бишкек-Иссык-Куль, 16-18 июня, 2021 г.);
- международной научной конференции “Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения”, приуроченной к 90-летию

- со дня рождения академика АН РУз М.С.Салахитдинова (Узбекистан, г. Ташкент, 23-25 ноября, 2023 г.);
- молодежной школе-конференции (55-я Всероссийская) “Современные проблемы математики и ее приложения” (г. Екатеринбург, с 29 января по 2 февраля и 16 февраля 2024 года);
 - межрегиональном семинаре математиков юга Кыргызстана «Актуальные проблемы математики и их применения» имени члена-корр. НАН КР, профессора К.Алымкулова (г. Жалал-Абад, 2-марта, 2024 г.);
 - межрегиональном семинаре математиков юга Кыргызстана «Актуальные проблемы математики и их применения» имени члена-корр. НАН КР, профессора К.Алымкулова (г. Ош, 29-марта, 2024 г.);
 - международной научной конференции «V Борубаевские чтения», посвященной 70-летию Национальной академии наук Кыргызской Республики и 40-летию Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики, (г. Бишкек 20-21-июня, 2024 г.);
 - международной научной конференции «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании», посвященной 85-летию ОшГУ, 50-летию научно-педагогической деятельности и 70-летию заслуженного работника образования Кыргызской Республики, лауреата премии Ленинского комсомола, к.ф.-м.н., доцента А.О.Абдувалиева (г. Ош, 26-сентября, 2024 г.);
 - международной научной конференции “Неклассические уравнения математической физики и их приложения”, приуроченной к 90-летию со дня рождения академика АН РУз Т.Д.Джураева (Узбекистан, г. Ташкент, 24-26 октября, 2024 г.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях.

Основные результаты диссертации опубликованы в 10 статьях [47-55], [84]. В совместных работах [50-55] К.С.Алыбаеву принадлежит постановка задач, а автору – их решение, в работе [84] К.С.Алыбаеву и А.М.Джураеву принадлежит постановка задачи, автору – их решение, в работе [49] К.С.Алыбаеву

принадлежит постановка задачи, автору – её решение, Н.К.Мусакуловой - совместное обсуждение некоторых результатов.

Всего опубликовано 10 работ в системе РИНЦ, одна из них опубликована в журнале, входящем в базу Scopus. Общий балл 215.

Структура и объем диссертации:

Работа состоит из оглавления, списка условных обозначений и математических записей, использованных в работе, введения и четырёх глав, которые соответственно разбиты на параграфы, заключений по каждой главе, списка использованных источников, состоящего из 89 наименований.

Общий объем диссертации 97 страниц, всего 21 рисунок.

Нумерация параграфов состоит из двух чисел, отделённых точками, где первое число означает номер главы, а второе – номер параграфа. Нумерация определений, теорем, лемм, задач и формул состоит из трёх чисел, отделённых точками, где первое число – номер главы, второе – номер параграфа, а третье – номер определения, теоремы, леммы, задачи или формулы. Нумерация рисунков также состоит из трёх чисел, отделённых точками, где первое число – номер главы, второе – номер параграфа, а третье – номер рисунка.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, дается общая характеристика работы, формулируются цели и задачи исследования, описываются научная новизна полученных результатов и практическая ценность, а также излагаются основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава состоит из трех параграфов. Приведен краткий обзор ранних исследований, наиболее близких к данной работе. Анализ исследований условно подразделён на следующие части: явление задержки решения в теории сингулярно возмущённых уравнений; сингулярно возмущённые уравнения в комплексных областях.

Вторая глава состоит из трех параграфов, которые охватывают объект исследования и постановку задачи, различные случаи собственных значений и методологию исследования. Введено понятие задержки решения вблизи неустойчивого положения (ЗР). Перечислены методы использованные в данной

работе. Приведены некоторые понятия из теории функции комплексного переменного и линии уровня гармонических функций.

Третья глава состоит из трех параграфов, которые содержат: основные критерии для геометрических построений; геометрические построения и определение областей для каждого из случаев $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, изложенных в главе 2.

Четвертая глава содержит материалы исследования задержки решения. Рассмотрены случаи $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$. Исследования проведены согласно, геометрическим построениям, а также использованы методы последовательных приближений, Лапласа, стационарной фазы, интегрирование по частям и другие асимптотические оценки.

В выводах изложены полученные результаты.

Автор выражает искреннюю благодарность и признательность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Курманбеку Сармановичу Алыбаеву, за его руководство, ценные советы и консультации в процессе обсуждения полученных результатов.

ГЛАВА 1. ПРЕДЫСТОРИЯ ИССЛЕДУЕМОЙ ЗАДАЧИ

В данной главе будет произведен обзор ранних работ, связанных с тематикой данной работы. Обзор включает в себе явление задержки решения для СВУ с аналитическими функциями. Изложены основные результаты развития теории СВУ с аналитическими функциями в комплексных областях.

§1.1. Явление задержки решения в теории сингулярно возмущенных уравнений

В 70-годах прошлого столетия под руководством академика Л.С.Понтрягина, впервые было обнаружено явление задержки решения СВУ вблизи возникшего неустойчивого положения равновесия [68]. Была рассмотрена система

$$\varepsilon x_1'(t, \varepsilon) = y(x_1(t, \varepsilon) - y) - x_2(t, \varepsilon) + \gamma[(x_1(t, \varepsilon) - y)^2 + x_2^2(t, \varepsilon)], \quad (1.1.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon x_2'(t, \varepsilon) &= x_1(t, \varepsilon) - y + yx_2(t, \varepsilon) + \gamma[(x_1(t, \varepsilon) - y)^2 + x_2^2(t, \varepsilon)], \\ y' &= 1 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

где $\gamma - const$.

Согласно терминологии Л.С. Понтрягина [57], система (1.1.1) называется системой быстрых движений, а уравнение (1.1.2) – для медленной переменной.

Система (1.1.1) имеет матрицу-функцию следующего вида:

$$A(y) = \begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$$

Матрица-функция $A(y)$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2}(y) = y \pm i$, а система (1.1.1) в точке $(y; 0)$ имеет положение равновесия типа фокус.

Фокус устойчив при $y < 0$ и неустойчив при $y > 0$, т.е. при значении $y = 0$ теряется устойчивость фокуса.

Из результатов исследований, проведенных [71], следует, если положение равновесия теряет устойчивость при некотором бифуркационном значении медленной переменной, то решение системы быстрых переменных должно было сразу отойти на конечное расстояние, от возникшего неустойчивого положения равновесия. Оказалось, что это не всегда так. На примере системы (1.1.1) – (1.1.2)

доказано, когда фокус системы становится неустойчивым, то решение системы (1.1.1), удовлетворяющие условию

$$|x_1(-1, \varepsilon)| = O(\varepsilon), |x_2(-1, \varepsilon)| = O(\varepsilon) \quad (1.1.3)$$

не сразу покидает возникший неустойчивый фокус, а в течении конечного времени остается вблизи него.

Таким образом, в теории СВУ было обнаружено новое явление, которая впоследствии получило название затягивание потери устойчивости или задержка решения вблизи неустойчивого положения равновесия (ЗР). Далее будем придерживаться термина ЗР.

ЗР в [71] было установлено аналитическим продолжением (1.1.1) – (1.1.2) в комплексную плоскость. Решение (1.1.2) было представлено в виде $y = t$ и в комплексной плоскости определен квадрат K с вершинами в точках $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(0; -1)$. Система (1.1.1) заменена интегральными системами, с учетом (1.1.3) и применяя метод последовательных приближений, доказано существование решение на всем K и явление ЗР.

С.Каримов [31-32] нашел асимптотику решений для одного класса сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений вида (1.1.1) в случае смены устойчивости фокуса в плоскости быстрых движений.

А.И.Нейштадт [45-46] рассмотрел более общую систему автономных СВУ при условии, что матрица-функция первого приближения имеет одну пару комплексно-сопряженных собственных значений, которые мнимую ось пересекают с ненулевой скоростью, оставшиеся собственные значения имеют отрицательные действительные части, и доказал, что для аналитических систем при определенных условиях происходит явление ЗР.

В этой работе не были рассмотрены случаи, когда одна пара комплексных сопряженных значений мнимую ось пересекает с нулевой скоростью.

Г.Н.Анарбаева [13] исследовала случай, когда $\lambda_{1,2}(y) = (t \pm i)^n$. При этом были рассмотрены случаи, когда областью в комплексной плоскости, являются квадраты и треугольники. Другие имеющиеся случаи, не исследованы.

Д.А.Турсунов исследовал случай [67], когда матрица-функция первого приближения имеет собственные значения $\lambda_{1,2}(y) = \frac{1}{(t \pm i)^n}$. Он доказал, что в некоторых случаях, время задержки решения можно увеличить до $(+\infty)$.

К.С.Алыбаев [2] разработал общую методологию исследования СВУ при потере устойчивости положения равновесия. Он ввел понятие «размеченные множества» и в терминах размеченных множеств сформулировал достаточные условия ЗР. Являются ли, эти условия также необходимыми, к этому времени еще не исследованы.

М.Азимбаев [1] рассмотрел случаи, когда размеченные множества являются неограниченными.

В [26-29], [33], [56], был обнаружен ряд новых явлений и эффектов в теории СВУ. Траектория-утка, или «французская утка» впервые была описана французскими математиками на примере уравнения Ван-дер-Поля [76], в качестве аппарата исследования при этом применен нестандартный анализ. В работах [80-81] впервые для построения траектории-утки был применен метод «склеивания» устойчивых и неустойчивых интегральных многообразий медленных дифференциальных систем. Еще один способ построения траекторий-уток, основанный на технике сингулярно возмущенных краевых задач, предложен в [34].

В [23-24], [85] были исследованы более широкие классы СВУ на ЗР, когда имеются траектории-утка. Вычислено время задержки решения.

§1.2. Сингулярно возмущенные уравнения в комплексных областях

Исследования, проведенные в [2], дали толчок на развитие исследований СВУ в комплексных областях.

В этом направлении выполнены работы Нарбаева М.Р. [42], Тампагарова К. Б. [63], Мурзабаевой А. Б. [41], Нарымбетова Т. К. [43], Матанова Ш. М. [38].

В работе [42] было введено понятие «простирающийся пограничный слой» и для линейных и некоторых классов слабо нелинейных СВУ и доказано существование таких слоев.

В [63] введены понятия погранслоиная линия, погранслоиные области, сингулярные и регулярные области и для линейных и слабо нелинейных СВУ было доказано их существование. Погранслоиные линии можно рассмотреть, как разновидность линии Стокса. Также было доказано существование промежуточных пограничных слоев. В этой работе для исследования СВУ с аналитическими функциями были введены понятия основная функция, амплитудная скорость, разработаны методы равномерного спуска и подъема. Также доказано, что ЗР происходит только при определенных условиях, т. е. в случае, когда регулярная область содержит отрезок, где происходит смена устойчивости положение равновесия.

В [43] было введено понятие: область притяжения. Это такая область в комплексной плоскости, где решение СВУ стремится к решению невозмущенного уравнения. Были рассмотрены некоторые классы СВУ и доказано существование ОП.

В [9] была построена компьютерная программа для нахождения погранслоиной линии.

В [41] исследованы СВУ первого порядка, в общем случае, когда НУ имеет несколько решений. Сформулированы наиболее общие условия существования ОП. Также были рассмотрены случаи, когда НУ имеет несколько решений, но ОП существует не для всех решений НУ. Исследована взаимосвязь ОП. Сформулированы условия существования общей части ОП.

В [38] рассмотрены СВУ первого порядка, когда функция-коэффициент при неизвестной в некоторой точке рассматриваемой области имеет n -кратный нуль. Для выяснения структуры области применено конформное отображение области. При этом, рассматриваемые СВУ приведены к более простому, удобному для исследования виду.

Если в [63] погранслоиные линии и области определялись начальными значениями независимой переменной, то в этой работе доказано, что они определяются также нулями независимой переменной. Также выяснены зависимость ОП от выбора начальных условий.

На примере СВУ типа Бернулли, доказано существование решений имеющих некоторые сходства с релаксационным колебанием в теории автономных СВУ [39-40], [57-58].

В работе [38] все рассматриваемые задачи решены геометрическими построениями с использованием линии уровней некоторых гармонических функций.

§1.3. Заключение по главе 1

В данной главе приведен краткий обзор ранних исследований, наиболее близких к данной работе. Анализ исследований условно подразделён на следующие части: явление задержки решения в теории сингулярно возмущённых уравнений; сингулярно возмущённые уравнения в комплексных областях. В работах, где изучены различные аспекты ЗР и его условия, упоминаются системы, имеющие траектории-утка и методы их исследования. Приведенный анализ показывает динамику развития исследований ЗР и развитие исследований СВУ в комплексных областях.

ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

§2.1. Объект исследования и постановка задачи

Объектом исследования данной работы являются АССВУ вида:

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = A(y)\tilde{x}(t, \varepsilon) + V^k(\tilde{x}(t, \varepsilon))\tilde{x}(t, \varepsilon), \quad (2.1.1)$$

$$y' = 1, \quad (2.1.2)$$

с начальным условием

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, y(t_0) = t_0 \quad (2.1.3)$$

где $k = 1, 2$;

$$t \in \Omega \subset \mathbb{C}, \Omega = \{t \in \mathbb{C}, |t| < r_0, r_0 \in \mathbb{R} - r_0 \gg |t_0|\},$$

$$x = colon(x_1, \dots, x_n), \tilde{x} = colon(x_1 - y, x_2, x_3 - y, x_4, \dots, x_{2n-1} - y, x_{2n}),$$

$$A(y) = \begin{pmatrix} A_1(y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2(y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_n(y) \end{pmatrix},$$

$$V(\tilde{x}(t, \varepsilon)) = ((x_1 - y)^2 + x_2^2 + (x_3 - y)^2 + x_4^2 + \dots + (x_{2n-1} - y)^2 + x_{2n}^2).$$

Рассматриваются следующие случаи:

C1.

$$A(y) = \begin{pmatrix} A_1(y) & 0 \\ 0 & A_2(y) \end{pmatrix},$$

$$A_1(y) = \begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}, A_2(y) = \begin{pmatrix} y & -2 \\ 2 & y \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица-функция первого приближения имеет собственные значения:

$$\lambda_{1,2}(y) = y \pm i, \lambda_{3,4}(y) = y \pm 2i.$$

C2.

$$A_j(y) = \begin{pmatrix} y & -\alpha_j \\ \alpha_j & y \end{pmatrix}, (j = 1, \dots, n),$$

Матрица-функция первого приближения имеет $2n$, попарно комплексно-сопряженных, собственных значений вида:

$$\lambda_{2j-1}(y) = y + i\alpha_j, \lambda_{2j}(y) = y - i\alpha_j, j = 1, \dots, n, \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n.$$

С3.

$$A(y) = \begin{pmatrix} y & -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Матрица-функция первого приближения имеет собственные значения:

$$\lambda_{1,2}(y) = y \pm i\alpha_1, \lambda_3(y) = y - \alpha_2, 0 < \alpha_1, 0 < \alpha_2,$$

С4.

$$A(y) = \begin{pmatrix} A_1(y) & 0 \\ 0 & A_2(y) \end{pmatrix}, A_1(y) = \begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}, A_2(y) = \begin{pmatrix} 1 - y^2 & 2y \\ -2y & 1 - y^2 \end{pmatrix},$$

$$V^2 = (x_1 - y)^2 + x_2^2 + (x_3 - y)^2 + x_4^2.$$

Матрица-функция первого приближения имеет собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = y \pm i, \lambda_{3,4} = -(y \pm i)^2.$$

С5.

$$A(y) = \begin{pmatrix} y - \alpha_j & 1 \\ -1 & y - \alpha_j \end{pmatrix}, (j = 1, \dots, n),$$

Матрица-функция первого приближения имеет собственные значения

$$\lambda_{2j-1}(y) = y - \alpha_j + i, \lambda_{2j}(y) = y - \alpha_j - i, j = 1, \dots, n,$$

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 1.$$

Особенность рассматриваемых случаев состоит в том, что система (2.1.1)-(2.1.2) в пространстве быстрых переменных в точке $(y, 0, y, 0, \dots, y, 0)$ имеет ПР, причем на устойчивость ПР влияют все собственные значения матрицы-функции $A(y)$.

ПР устойчива для значений y , когда действительные части собственных значений отрицательны.

В случаях С1, С2 действительные части всех собственных значений $(\lambda_1(y), \lambda_2(y))$ обращаются в нуль при $y = 0$ и меняют знаки с отрицательного на положительное.

Для С3 действительные части двух собственных значений $(\lambda_1(y), \lambda_2(y))$ обращаются в нуль при $y = 0$, а $\lambda_3(y)$ обращается в нуль при $y = \alpha_2 > 0$ ($0 < \alpha_2 < \alpha_1$) и при $y = \alpha_1 > 0$ ($0 < \alpha_1 < \alpha_2$).

При С4 действительные части собственных значений $\lambda_{1,2}(y)$ обращаются в нуль при $y = 0$, а $\lambda_{3,4}(y)$ при $y = \pm 1$.

При С5, то действительные части собственных значений $\lambda_{2j-1}(y), \lambda_{2j}(y)$ обращаются в нуль в точках $y = \alpha_j$ ($j = 1, \dots, n$), $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 1$.

Определение 2.1.2. Если устойчивость положения равновесия теряется при некоторых значениях y , но решение уравнения (2.1.1) не сразу покидает возникшее неустойчивое положение равновесия, а в течении конечного времени остаётся вблизи него, то будем говорить, что происходит задержка решения вблизи неустойчивого положения равновесия (ЗР).

Задача 2.1.1. Для всех рассматриваемых случаев исследовать задачу (2.1.1)-(2.1.2) на ЗР и решить все задачи, связанные с ЗР (влияние собственных значений ЗР и определение границы ЗР и т.д.).

§2.2. Методология исследования

Методология – это совокупность методов и приемов, а также основные положения, на которых базируются эти методы и приемы.

2.2.1. Методы, используемые в данной работе

При исследовании асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений используются следующие методы:

1. Преобразование уравнений и замена их интегральными;
2. Геометрические построения и обоснованный выбор путей интегрирования с использованием линии уровней и свойств гармонических функций.
3. Методы: последовательных приближений, Лапласа, стационарной фазы, интегрирование по частям, последовательная замена начальных условий на переменные начальные условия на некоторых линиях.

Перечисленные методы можно разделить на следующие составляющие:

М1. Геометрические построения и выбор путей интегрирования, основанные на свойствах гармонических функций.

М2. Модифицированный метод последовательных приближений, который включает в себе последовательную замену начальных условий на непрерывно меняющиеся начальные условия.

М3. Методы: Лапласа и стационарной фазы, асимптотическая оценка интегралов, содержащих большой, положительный параметр; Вейерштрасса, построение мажорантных рядов, для доказательства сходимости функциональных рядов; индукции; интегрирование по частям.

М1 близок к топологическим методам, а М2 и М3 – аналитические.

2.2.2. Некоторые сведения, на которых базируются используемые методы

Область

Точка P называется внутренней точкой множества G , если все точки достаточно малого круга с центром в точке P принадлежат этому множеству G .

Областью называется множество G точек плоскости, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) G состоит из одних внутренних точек;
- 2) любые 2 точки множества можно соединить ломаной с достаточно большим числом звеньев так, чтобы все точки этой линии принадлежали самому множеству.

Если все точки достаточно малого круга с центром в точке Q не принадлежат области G , тогда такая точка Q называется внешней точкой области G .

Если при сколь угодно малом круге с центром в точке Q точки принадлежат области G , такая точка Q называется граничной точкой. Совокупность всех граничных точек области G называются ее границей.

Множество, которое состоит из области G и ее границы, называется замкнутой областью и обозначается через $\overline{G}$.

Область называется ограниченной, если все ее точки лежат внутри некоторого круга с центром в нулевой точке достаточно большого постоянного радиуса.

Кривые Жордана

В данной работе используются линии Жордана.

Пусть $x(t), y(t)$ – действительные непрерывные функции переменного t , где $\alpha \leq t \leq \beta$.

Два уравнения

$$x = x(t), y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (\text{НЛ})$$

дают параметрическое изображение непрерывной линии.

Если потребовать, чтобы двум различным значениям параметра t (за исключением значений $t = \alpha$ и $t = \beta$) всегда соответствуют две различные точки линии, тогда эта линия не будет иметь кратных точек. Такая линия называется линией Жордана или просто непрерывной линией.

Если положить $z = x + iy$, так что $z(t) = x(t) + iy(t)$, то аналитическое изображение можно записать с помощью одного уравнения:

$$z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (\text{ЖЛ})$$

Когда параметр t возрастает, изменяется на отрезке $[\alpha, \beta]$, тогда точка z описывает линию Жордана, в котором началом служит точка $z(\alpha)$, а концом $z(\beta)$ и на линии устанавливается положительное направление.

Линия Жордана геометрически представляет множество точек плоскости, являющееся взаимно однозначным, непрерывным отображением прямолинейного отрезка.

Если начало и конец линии Жордана между собой совпадают, т. е. $z(\alpha) = z(\beta)$, то она называется замкнутой, такая замкнутая линия без кратных точек делит плоскость на две области:

- 1) не содержащую бесконечно удаленной точки, которая называется внутренней по отношению к данной линии;
- 2) содержащую бесконечно удаленную точку, которая называется внешней по отношению к данной кривой.

Для этих областей данная линия является границей.

Предположим, что вышеуказанное положительное направление на линии выбрано так, что внутренняя часть кривой лежит слева от точки $z(t)$, движущейся в этом направлении. Замкнутую линию Жордана можно рассматривать как взаимно однозначный, непрерывный образ окружности, т. е. можем положить $\alpha = 0, \beta = 2\pi$ и рассматривать параметр t как аргумент точки окружности.

Область, которая лежит внутри замкнутой линии Жордана обладает следующим свойством: какую бы замкнутую непрерывную линию мы не провели в этой области, ее внутренняя часть также принадлежит данной области.

Всякая область, обладающая этим свойством, называется односвязной.

А область, не обладающая упомянутым свойством, называется многосвязной.

Множество точек, состоящее из точек области G и ее граничных точек, называется замкнутой областью и обозначается $\bar{G}$.

Линия Жордана называется гладкой, если эта линия имеет непрерывно изменяющуюся касательную. Аналитически гладкая линия может быть представлена уравнением $t(s) (\alpha \leq s \leq \beta)$, где $t(s)$ непрерывна и $t(s) \neq 0$, причем $t(s_1) \neq t(s_2)$, если $s_1 \neq s_2$.

Линия Жордана называется кусочно-гладкой, если эта линия состоит из конечного числа гладких дуг.

Аналитическая функция

Пусть $f(t)$ – функция комплексного переменного, т. е. $t = t_1 + it_2, t_1, t_2$ – действительные переменные.

Для непрерывных функций на замкнутых ограниченных множествах также справедливы обычные свойства функций, непрерывных на замкнутых интервалах.

Каждая функция $f(t)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $\bar{G}$:

- 1) ограничена на нем, т.е. $\forall t \in \bar{G}: |f(t)| \leq M, M > 0 - const$;
- 2) достигает своего наибольшего и наименьшего по модулю значений, т.е. в $\bar{G}$ существует точки $\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}$, что

$$|f(\tilde{t})| \geq |f(t)|, |f(\tilde{t})| \leq |f(t)|.$$

Справедливо неравенство

$$|f(t)| - |g(t)| \leq |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|.$$

Условие дифференцируемости $f(t)$ выражается следующей теоремой:

Теорема 2.2.1. Пусть $f(t) = u(t_1, t_2) + iv(t_1, t_2)$ определена в некоторой окрестности точки t , причем $u(t_1, t_2), v(t_1, t_2)$ дифференцируемы в этой точке. Тогда для дифференцируемости функции комплексного переменного $f(t)$ в точке t необходимо и достаточно, чтобы в этой точке имело место следующее соотношение:

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial v}{\partial t_2}, \frac{\partial u}{\partial t_2} = -\frac{\partial v}{\partial t_1}. \quad (\text{К-Р})$$

Эти условия называются условиями Коши-Римана (К-Р).

Функция $\omega = f(t)$, дифференцируемая в точке t , называется моногенной в этой точке.

Если функция $\omega = f(t)$ является моногенной в каждой точке области G , то функция $\omega = f(t)$ называется аналитической в области G .

Пусть $\omega = f(t) = u + iv$ есть однозначная функция комплексного переменного $t = t_1 + it_2$, определенная в области G , где u, v – функции действительных переменных t_1, t_2 .

Если имеют место условия К-Р повсюду в области G и функции u и v дифференцируемы в области, то функция $\omega = u + iv$ будет аналитической в G .

Функция аналитичная в области G имеет производные всех порядков.

Теорема 2.2.2. Если:

- 1) функции $f_1(t), f_2(t)$ аналитичны в области G ;
- 2) задана последовательность $\{a_n\}$ в G , сходящейся к внутренней точке a области G ;
- 3) $f_1(a_n) \equiv f_2(a_n)$;

При выполнении этих условий $f_1(t) \equiv f_2(t)$ всюду в G .

Интегралы от функции комплексного переменного

Пусть задана некоторая ориентированная кривая L и на ней функция комплексного переменного $f(t)$.

По определению, интегралом от $f(t)$ вдоль кривой L называется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (t_{k+1} - t_k) = \int_C f(t) dt,$$

где $a = t_0, t_1, \dots, t_{n+1} = b$ – последовательные точки, разбивающие L на n участков, через a, b обозначены концы L , ξ_k – произвольная точка, которая лежит на участке $[t_k, t_{k+1}]$, предел берется так, чтобы $\max |t_{k+1} - t_k| \rightarrow 0$.

Если кривая L – кусочно-гладкая, а функция $f(t)$ – кусочно-непрерывная, ограниченная, то интеграл всегда существует.

Теорема 2.2.3. (теорема Коши) Если функция $f(t)$ аналитична в односвязной области L , то для всех кривых L , лежащих в этой области, а также имеющих общее начало и концы, интеграл

$$\int_L f(t) dt$$

имеет одно и то же значение.

$$|f(t)| \leq M,$$

$$\left| \int_L f(t) dt \right| \leq M \text{ для } L.$$

Пусть $t(\xi) = t_1(\xi) + it_2(\xi)$ ($\alpha \leq \xi \leq \beta$) – представление кривой L , причем $t(\alpha) = a, t(\beta) = b$, где a и b – концы кривой L .

Тогда

$$\int_L f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t(\xi)) t'(\xi) d\xi;$$

$$\left| \int_L f(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| \left| \frac{dt_1}{d\xi} + i \frac{dt_2}{d\xi} \right| d\xi \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dl;$$

Если кривая состоит из частей $L_1, L_2, \dots, L_n$, тогда

$$\left| \int_L f(t) dt \right| \leq \left| \int_{L_1} f(t) dt \right| + \left| \int_{L_2} f(t) dt \right| + \dots + \left| \int_{L_n} f(t) dt \right|.$$

$f(t)$ – аналитична в Ω , $x = \varphi(t)$ аналитична в $\mathcal{D}$, то $f(\varphi(t))$ аналитична в $\mathcal{D}$.

Если функция $f(t)$ аналитична в односвязной области L , то интеграл, в котором верхний предел – переменная

$$F(t) = \int_{t_0}^t t(\xi) d\xi$$

также является аналитической в области G , где $F'(t) = f(t)$.

Лемма 2.2.1. Пусть $\lambda_1(t) = \overline{\lambda_2(t)}$ и функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ аналитичны в некотором круге, содержащем область

$$H = \{(t_1, t_2): t_0 \leq t_1 \leq T, -D \leq t_2 \leq D\},$$

где $0 < D - \text{const}$, $t_0 < T$ – заданные числа.

Тогда функции $\operatorname{Re} \int_{t_0}^t \lambda_k(s) ds$ в симметричных точках относительно действительной оси области H принимают равные значения.

Гармонические функции и их линии уровня

Определение 2.2.1. Множество

$$(\mathcal{P}) = \{(x, y) \in \mathcal{D} \subset R^2, u(x, y) = p - \text{const}\},$$

называется линией уровня функции $u(x, y)$.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Л})$$

Уравнение (Л) называется уравнением Лапласа и всякая функция, удовлетворяющая этому уравнению, называется гармонической.

В работе рассматриваются аналитические и гармонические функции, их связи выражены в следующих теоремах:

Теорема 2.2.3. Действительная и мнимая часть однозначной и аналитической функции в области $\mathcal{D}$: $f(t) = u(t_1, t_2) + iv(t_1, t_2)$ являются в этой области гармоническими функциями.

Связанные условием (К-Р) гармонические функции $u(t_1, t_2), v(t_1, t_2)$ называются сопряженными.

Теорема 2.2.4. Для гармонической функции в односвязной области $\mathcal{D}$ найдется сопряженная функция $v(t_1, t_2)$.

Совокупность всех гармонических функций, сопряженных с функцией $u(t_1, t_2)$ дает формула:

$$v(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} -\frac{\partial^2 u}{\partial t_2} dt_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1} dt_2 + C.$$

где $C - const$.

Если линии уровня сопряженно-гармонических функций, тогда:

1. Линии уровня $u(t_1, t_2) = C$ и $v(t_1, t_2) = C$ взаимно-ортогональны, где $C - const$.
2. Функция $u(t_1, t_2)$ строго возрастает (или строго убывает) по линии уровня функции $v(t_1, t_2) = C$, также $v(t_1, t_2)$ строго возрастает (или строго убывает) по линии уровня $u(t_1, t_2) = C$, где $C - const$.
3. Если гармоническая функция $u(t_1, t_2)$, отличная от постоянной, имеет замкнутую линию $u(t_1, t_2) = u_0 - const$, тогда внутри линии находится хотя бы одна особая точка функции $u(t_1, t_2)$.
4. Линии уровня определяемые гармонической функцией $u(t_1, t_2)$ полностью заполняют рассматриваемые области, взаимно не пересекаются, не образуют замкнутых линий, упираются к границам областей.
5. Линии уровня однажды покинув Ω_p (круговая окрестность некоторой точки (t_{10}, t_{20})) не сможет вернуться туда обратно.
6. Линии уровня не имеют точек возврата, изолированных, концевых точек (Рисунок 2.2.1).



Рисунок 2.2.1. Различные точки.

§ 2.3. Заключение по главе 2

В данной главе приведены АССВУ состоящие из нескольких уравнений первого порядка, которые являются основным объектом исследования. Системы быстрых переменных имеют ПР. Особенность рассматриваемых систем уравнений заключается в том, что на устойчивость ПР влияют все собственные значения матрицы-функции первого приближения, т.е. действительные части

всех собственных значений меняют свои знаки с отрицательного на положительное при одном или нескольких значениях медленной переменной. Дано определение задержки решения СВУ вблизи возникшего неустойчивого ПР. Поставлена задача исследования решений СВУ на ЗР. Описана методология исследования, которая состоит из нескольких методов. Методы разделены на топологические и аналитические группы. Приведены некоторые известные факты из теории двумерных областей; кривых Жордана; аналитических и гармонических функций, а также некоторые свойства линии уровней гармонических функций, которые используются в данной работе.

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

В данной главе сформулированы основные критерии геометрических построений и для случаев С.1, С.2, С.3, С.4, С.5 указанных в главе 2, проведены геометрические построения.

§3.1. Основные критерии для геометрических построений

Как показывают проведенные исследования [47-55], [84] при исследовании асимптотического поведения решений СВУ в областях из C , существенное влияние оказывают интегралы вида

$$\mathcal{I}(t_0, t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t \exp \frac{F(t) - F(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (3.1.1)$$

где $t_0, t \in \mathcal{D} \subset C$, $F(t) \in Q(\mathcal{D})$.

Требуется определить, при каких условиях интеграл (3.1.1) сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. $|\mathcal{I}(t_0, t, \varepsilon)|$ – ограничена.

Этот вопрос решается следующей леммой:

Лемма 3.1.1. Пусть существует:

1. $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, $t_0 \in \mathcal{D}_0$.
2. Множество $\Omega = \{(\mathcal{P}(t_0, t))\}$, где $(\mathcal{P}(t_0, t))$ – гладкая или кусочно-гладкая кривая Жордана, соединяющая точки t_0 и $t \in \mathcal{D}_0$.
3. $\forall (\mathcal{P}(t_0, t)) \in \Omega$ ($Re(F(t))$ – не возрастает).

При выполнении этих условий $|\mathcal{I}(t_0, t, \varepsilon)|$ – ограничена.

Доказательство. Поскольку $F(t) \in Q(\mathcal{D})$ то, не ограничивая общности будем считать, что $(\mathcal{P}(t_0, t))$ состоит из линии уровней функций $ReF(t)$, $ImF(t)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}(t_0, \tilde{t})) &= \{\tilde{t} \in \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}, ReF(t) = \mathcal{P} - const\}, \\ (Q(\tilde{t}, t)) &= \{t \in \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}, ImF(t) = Q - const\} \end{aligned}$$

(Рисунок 3.1.1).

Будем считать, по (Q) функция $ReF(t)$ убывает.

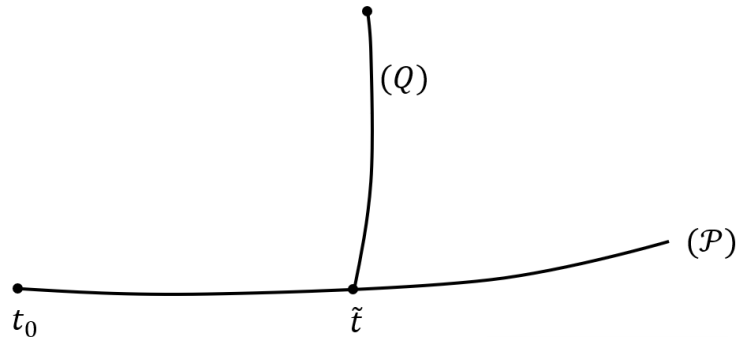


Рисунок 3.1.1. Линии $(\mathcal{P})$ и (Q) .

Примечание 3.1.1. Можно использовать и такой вариант $(Q(t_0, \tilde{t})) \cup (\mathcal{P}(\tilde{t}, t))$.

Используя выбранный путь, (3.1.1) можно представить в виде

$$\mathcal{I}(t_0, t, \varepsilon) = \int_{t_0}^{\tilde{t}} \exp \frac{F(t) - F(\tau)}{\varepsilon} d\tau + \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{F(t) - F(\tau)}{\varepsilon} d\tau. \quad (3.1.2)$$

В (3.1.2) проведем преобразование

$$\mathcal{I}(t_0, t, \varepsilon) = \int_{t_0}^{\tilde{t}} \exp \frac{F(t) - F(t_0) - F(\tau) + F(t_0)}{\varepsilon} d\tau + \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{F(t) - F(\tau)}{\varepsilon} d\tau \quad (3.1.3)$$

По первой части пути $\operatorname{Re} F(\tau) = \mathcal{P} - \text{const}$, а по второй части пути $\operatorname{Re} F(\tau)$ – убывает.

Таким образом

$$\operatorname{Re} F(t) - \operatorname{Re} F(t_0) \leq 0, \operatorname{Re} F(\tau) - \operatorname{Re} F(t_0) = i(\operatorname{Im} F(\tau) - \operatorname{Im} F(t_0))$$

(для первой части),

$$\operatorname{Re} F(t) - \operatorname{Re} F(\tau) \leq 0 \text{ (для второй части).}$$

Следовательно

$$|\mathcal{I}(t_0, t, \varepsilon)| - \text{ограничена. Лемма доказана.}$$

Примечание 3.1.2. Вместо $(\mathcal{P}(t_0, \tilde{t})), (Q(\tilde{t}, t))$ можно использовать и другие кривые Жордана, удовлетворяющие условию 3 леммы 3.1.1.

Заметим, если по некоторым кривым $\operatorname{Re} F(t)$ или $\operatorname{Im} F(t)$ постоянны, то такие кривые являются только линиями уровней этих функций.

Лемма 3.1.1 определяет основной критерий геометрических построений. Геометрические построения сводятся к определению множества Ω .

Только в нашем случае, вместо $F(t)$ надо будет рассмотреть систему функций $(F_1(t), \dots, F_n(t))$ и определить одно множество Ω для этой системы.

В дальнейших исследованиях симметрию будем понимать относительно действительной части.

Пусть $\mathcal{D}$ симметричная область и система $(F_1(t), \dots, F_n(t))$ состоит из попарно комплексно-сопряженных функций:

$$n = 2k \text{ и } F_{2j-1}(t) = \overline{F_{2j}(t)} \quad (j = 1, \dots, k).$$

Для таких случаев построение Ω базируется на следующей лемме.

Лемма 3.1.2. Пусть $(\mathcal{P}(t_0, t))$, $(\bar{\mathcal{P}}(t_0, t))$ симметричны и по $(\mathcal{P}(t_0, t))$ функции $(F_{2j-1}(t), j = 1, \dots, k)$ не возрастают, тогда по $(\bar{\mathcal{P}}(t_0, t))$ функции $(F_{2j}(t), j = 1, \dots, k)$ также не возрастают.

Доказательство Леммы 3.1.2 следует из принципа симметрии и Леммы 2.2.1 (Глава 2).

Подводя итог, можем сказать, что Леммы 3.1.1, 3.1.2 определяют основные критерии для геометрических построений.

§3.2. Геометрические построения

3.2.1. Построения для случая С1

Рассмотрим функции

$$F_1(t) = (t + i)^2, F_2(t) = (t - i)^2, F_3(t) = (t + 2i)^2, F_4(t) = (t - 2i)^2$$

и $ReF_1(t), ReF_2(t), ReF_3(t), ReF_4(t)$.

Имеем

$$ReF_1(t) = t_1^2 - (t_2 + 1)^2, ReF_2(t) = t_1^2 - (t_2 - 1)^2,$$

$$ReF_3(t) = t_1^2 - (t_2 + 2)^2, ReF_4(t) = t_1^2 - (t_2 - 2)^2.$$

В точках, симметричных относительно действительной оси, функции $ReF_1(t)$ и $ReF_2(t)$, $ReF_3(t)$ и $ReF_4(t)$ принимают равные значения.

Напомним, область $\mathcal{D}$ - открытый круг с центром в точке $(0; 0)$ и достаточно большого радиуса.

Таким образом, принцип симметрии области сохраняется.

Согласно Леммы 3.1.2 для определения Ω , достаточно рассмотреть функции $ReF_1(t)$ и $ReF_3(t)$.

Введем в рассмотрение линии уровня

$$(\mathcal{P}_{10}) = \{t \in C, t_1^2 - (t_2 + 1)^2 = 0\},$$

$$(\mathcal{P}_{20}) = \{t \in C, t_1^2 - (t_2 + 2)^2 = 0\}.$$

Линия $(\mathcal{P}_{10})$ разветвляется в точке $(-1, 0)$, а $(\mathcal{P}_{20})$ разветвляется в точке $(-2, 0)$ и плоскость C разделяют на четыре сектора (Рисунок 3.2.1).

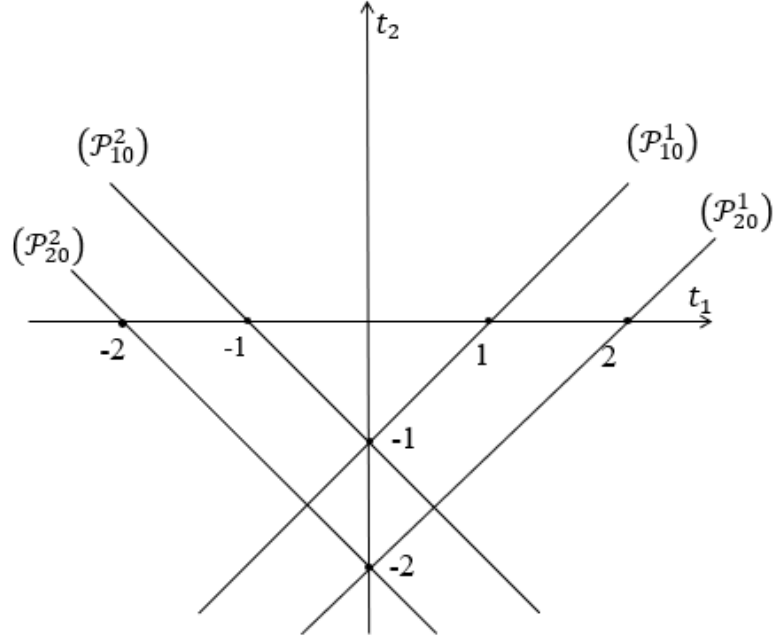


Рисунок 3.2.1. Деление плоскости C линиями $(\mathcal{P}_{10})$ и $(\mathcal{P}_{20})$.

Ветви $(\mathcal{P}_{10})$ обозначим $(\mathcal{P}_{10}^1)$, $(\mathcal{P}_{10}^2)$; $(\mathcal{P}_{20})$ обозначим $(\mathcal{P}_{20}^1)$, $(\mathcal{P}_{20}^2)$ (Рисунок 3.2.1).

Рассмотрим случай $t_0 = -\sqrt{3}$.

Введем в рассмотрение линию уровня

$$(\mathcal{P}_3) = \{t \in C, t_1^2 - (t_2 + 2)^2 = -1\}.$$

Линия $(\mathcal{P}_3)$ проходит через точки $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, -1)$, $(\sqrt{3}, 0)$. Далее рассмотрим, часть $(\mathcal{P}_3)$, соединяющая точки $(-\sqrt{3}, 0)$ и $(0, -1)$.

Уравнение $(\mathcal{P}_3)$ можно записать в виде

$$t_2 = -2 + \sqrt{t_1^2 + 4 - t_0^2}, t_0 \leq t_1 \leq 0, \quad (K_1)$$

$$t_2 = -2 + \sqrt{t_1^2 + 1}.$$

Имеем

$$ReF_1(t) = t_1^2 - (t_2 + 1)^2 = t_1^2 - \left(-1 + \sqrt{t_1^2 + 1}\right)^2 = -2 + 2\sqrt{t_1^2 + 4}.$$

Отсюда получим

$$(ReF_1(t))'_{t_1} = \frac{2t_1}{\sqrt{t_1^2+1}}.$$

Таким образом, функция $ReF_1(t)$ убывает вдоль кривой (K_1) . Функция $ReF_3(t)$ постоянна вдоль (K_1) .

Лемма 3.1.2 справедлива для $ReF_1(t)$, $ReF_3(t)$ на кривой (K_1) .

Введем в рассмотрение линию уровня (одна из ветвей линии уровня $(\mathcal{P}_1)$)

$$(\mathcal{P}_{11}) = \{t \in C, t_1 - t_2 - 1 = 0\}$$

и рассмотрим часть $(\mathcal{P}_{11})$, соединяющую точки $(0, -1)$ и $(1, 0)$.

Имеем

$$t_2 = t_1 - 1, -1 \leq t_1 \leq 1. \quad (K_2)$$

Поставим задачу: будет ли функция $ReF_3(t)$ убывающей по кривой (K_2) ?

В выражении для $ReF_3(t)$ вместо t_2 , подставляя уравнение (K_2) , получим

$$ReF_3(t) = t_1^2 - (t_2 + 1)^2 = 2t_1 - 1.$$

Отсюда имеем

$$(ReF_1(t))'_{t_1} = -2 < 0.$$

Таким образом, вдоль (K_2) функция $ReF_3(t)$ убывает, а функция $ReF_1(t)$ постоянна.

Лемма 3.1.2 верна, на кривой (K_2) , для $ReF_3(t)$ и $ReF_1(t)$.

Подведя итог можем сказать, Лемма 3.1.2 справедлива для функций $ReF_1(t)$, $ReF_3(t)$ на кривой $(K_1) \cup (K_2)$.

Теперь, рассматривая функции $ReF_2(t)$, $ReF_4(t)$, определим кривые $(\bar{K}_1)$ и $(\bar{K}_2)$, которые, соответственно симметричны к кривым (K_1) , (K_2) .

На кривой $(\bar{K}_1) \cup (\bar{K}_2)$ для функций $ReF_2(t)$, $ReF_4(t)$ справедлива Лемма 3.1.1. согласно Леммы 3.1.2.

Область, ограниченную кривыми $(K_1) \cup (K_2)$ и $(\bar{K}_1) \cup (\bar{K}_2)$, обозначим $\mathcal{D}$ (Рисунок 3.2.2).

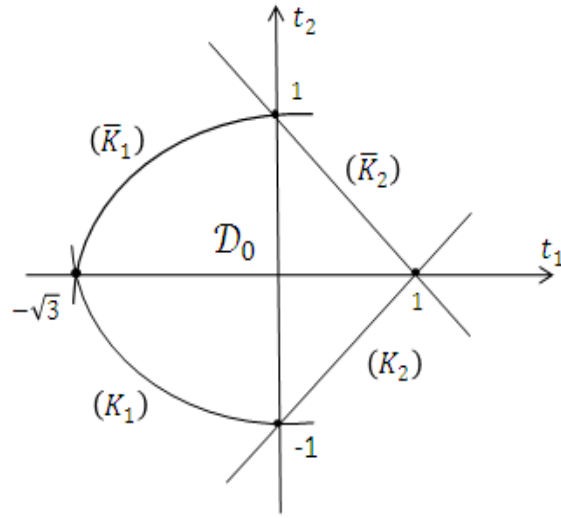


Рисунок 3.2.2. Область D_0 .

Введем в рассмотрение линии уровня $(\mathcal{P}_{01}) = \{t \in C, t_1 - t_2 - 1 = 0\}$,

Теперь область D_0 разделим на несколько частей. Возьмём линии

$$(\mathcal{P}_{11}) = \{t \in D_0, t_1 - t_2 - 1 = -\sqrt{\varepsilon}\},$$

$$(\mathcal{P}_{12}) = \{t \in D_0, t_1 - t_2 - 1 = -q, 0 \ll q \ll 1\},$$

$$(\mathcal{P}_{21}) = \{t \in D_0, t_1 + t_2 + 1 = \sqrt{\varepsilon}\},$$

$$(\mathcal{P}_{22}) = \{t \in D_0, t_1 + t_2 + 1 = q, 0 \ll q \ll 1\}.$$

Далее определим точки B_j ($j = 1, \dots, 11$) и $\bar{B}_j$ ($j = 3, \dots, 10$) (Рисунок 3.2.3).

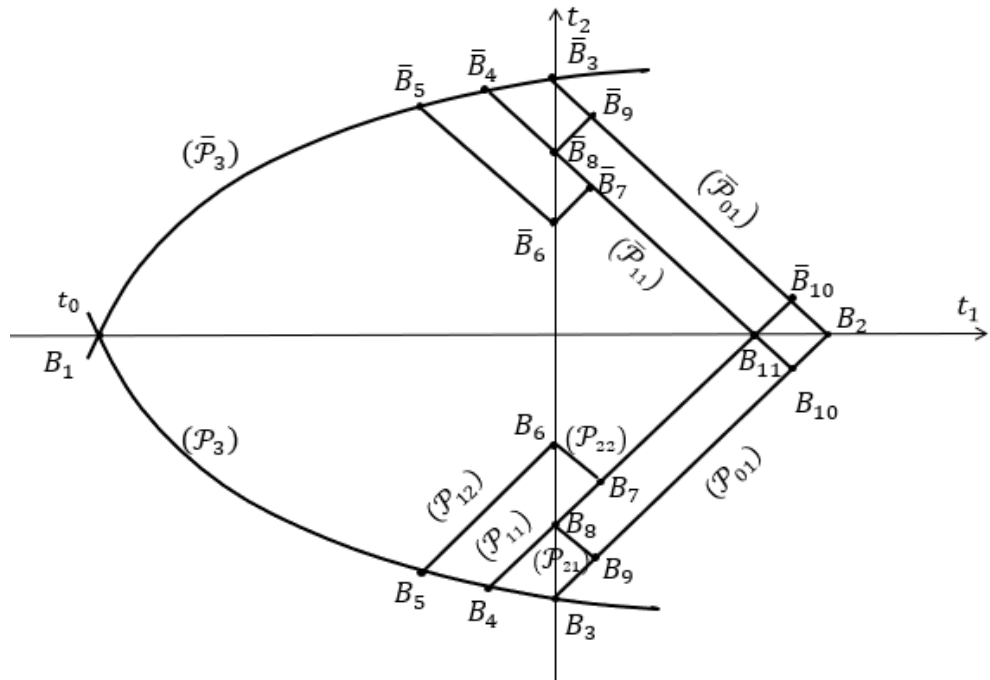


Рисунок 3.2.3. Точки $B_j, \bar{B}_j$.

Обозначим: $(\mathcal{P}_{01}) \cap (\mathcal{P}_{21}) = B_9, (\mathcal{P}_{21}) \cap (\mathcal{P}_3) = B_5, (\mathcal{P}_{11}) \cap (\mathcal{P}_3) = B_4,$
 $(\mathcal{P}_{12}) \cap (\mathcal{P}_{22}) = B_6, (\mathcal{P}_{11}) \cap (\mathcal{P}_{22}) = B_7, (\mathcal{P}_{11}) \cap (\mathcal{P}_{21}) = B_8, (\mathcal{P}_3) \cap (\mathcal{P}_{01}) = B_3,$
 $(\mathcal{P}_3) \cap (\bar{\mathcal{P}}_3) = B_1, (\bar{\mathcal{P}}_{01}) \cap (\mathcal{P}_{01}) = B_2, (\mathcal{P}_{01}) \cap (\bar{\mathcal{P}}_{11}) = B_{10}, (\bar{\mathcal{P}}_{11}) \cap (\mathcal{P}_{11}) = B_{11}.$
Пятиугольники, с вершинами в точках $(B_1 B_5 B_6 \bar{B}_6 \bar{B}_5), (B_6 B_7 B_{11} \bar{B}_7 \bar{B}_6),$
обозначим $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$; четырехугольники с вершинами $(B_4 B_5 B_6 B_7), (B_3 B_4 B_8 B_9),$
 $(B_8 B_9 B_{10} B_{11}), (B_2 B_{10} B_{11} \bar{B}_{10}),$ соответственно обозначим $\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6,$
четырехугольники, симметричные к $\mathcal{D}_j (j = 3, 4, 5),$ обозначим $\bar{\mathcal{D}}_j$ (Рисунок 3.2.4).

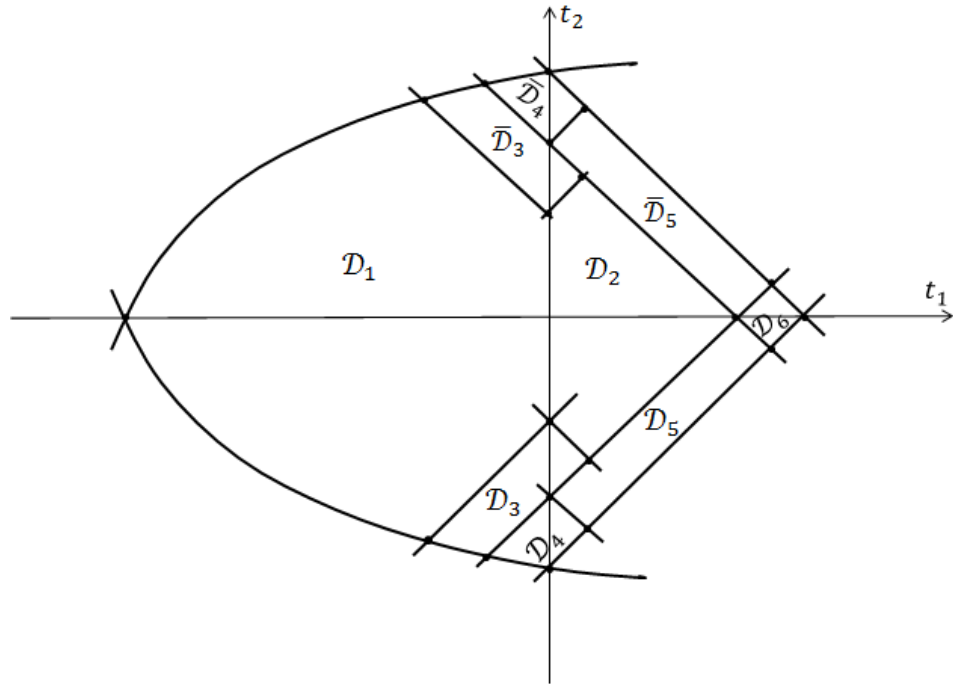


Рисунок 3.2.4. Области $\mathcal{D}_j (j = 1, \dots, 6)$ и $\bar{\mathcal{D}}_j (j = 3, 4, 5).$

Теперь определим множество Ω . Для $ReF_1(t), ReF_3(t)$ путь состоит:
если $t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4,$ то из части $(K_1)[t_0, \tilde{t}]$ и прямолинейного
отрезка $\mathcal{P}_1 = \{t \in \mathcal{D}_0, t_1 - t_2 + q = 0, -1 + \sqrt{\varepsilon} \leq q \leq 1\} [\tilde{t}, t];$
если $t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6 \cup \bar{\mathcal{D}}_5,$ то из части $(K_1) \cup (K_2) [t_0, \tilde{t}]$ ($\tilde{t} \in (K_2)$ и
прямолинейного отрезка $\mathcal{P}_2 = \{t \in \mathcal{D}_0, t_1 + t_2 - q = 0, -1 + \sqrt{\varepsilon} \leq q \leq 1\} [\tilde{t}, t].$
Для $ReF_2(t)$ и $ReF_4(t)$ путь определяется, симметричным к пути для $ReF_1(t),$
 $ReF_3(t).$ Ввиду симметричности рассматриваемой области, такая возможность

всегда имеется. Выбранные пути удовлетворяют условию Леммы 3.1.1 и определяют множество Ω .

3.2.2. Построения для случая C2

Рассмотрим линии уровня функций $ReF_{rj}(t)$ ($r = 1, 2; j = 1, 2, \dots, n$).

$$\begin{aligned} ReF_{1j}(t) &= t_1^2 - (t_2 + \alpha_j)^2, \\ ReF_{2j}(t) &= t_1^2 - (t_2 - \alpha_j)^2, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Функция $F_{1j}(t)$ в точке $t = -i\alpha_j$, а функция $F_{2j}(t)$ в точке $t = i\alpha_j$ имеют двухкратные нули, тогда линии уровня

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{1j}) &= \{t \in \mathbb{C}, ReF_{1j}(t) = 0\}, \\ (\mathcal{P}_{2j}) &= \{t \in \mathbb{C}, ReF_{2j}(t) = 0\}, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

соответственно в точках $t = -i\alpha_j, t = i\alpha_j$ разветвляются (по условию $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$) (Рисунок 3.2.5).

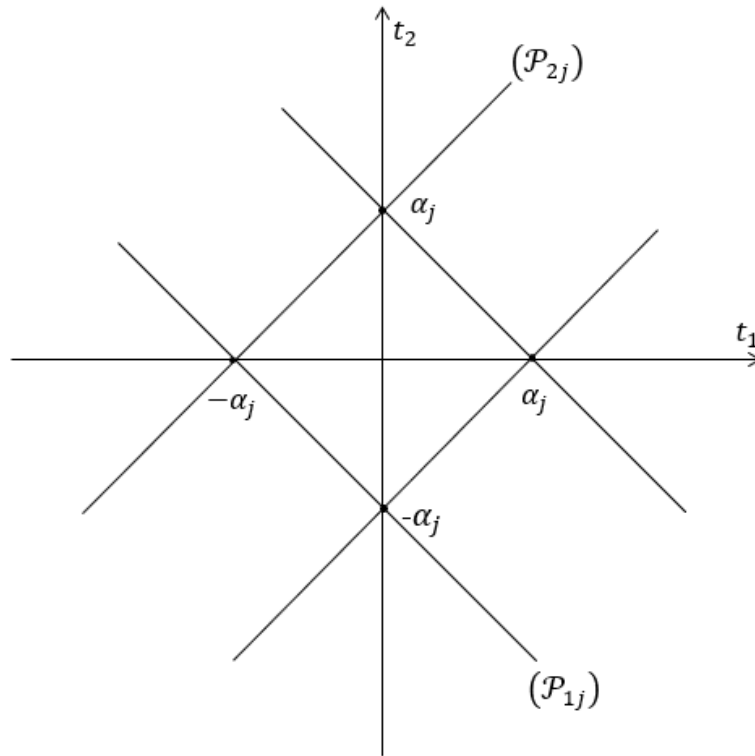


Рисунок 3.2.5. Линии уровня $(\mathcal{P}_{1j}), (\mathcal{P}_{2j})$.

Возьмем линии уровня

$$(\mathcal{P}_{1j}) = \{ReF_{1j}(t) = t_1^2 - (t_2 + \alpha_j)^2 = t_0^2 - \alpha_j^2\}$$

и

$$(\mathcal{P}_{1k}) = \{ReF_{1k}(t) = t_1^2 - (t_2 + \alpha_k)^2 = t_0^2 - \alpha_k^2\},$$

где $j \neq k$; $j, k = 1, \dots, n$.

Выясним, существуют ли, линия уровня функции $ReF_{1k}(t)$ ($k = 1, \dots, n$) одной по которым функции $ReF_{1j}(t)$ ($j = 1, \dots, n$) не возрастают.

Ответ на этот вопрос решается следующей леммой:

Лемма 3.2.1. По части: линии уровня $(\mathcal{P}_{1n})$, соединяющая точки $(t_0; 0)$ и $(0; -\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 - t_0^2})$ ($\alpha_n < t_0 < 0$), функции $ReF_{1j}(t)$ ($j = 1, \dots, n$) не возрастают; линии уровня $(\mathcal{P}_{11})$ соединяющая точки $(0; -\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 - t_0^2})$, $(\sqrt{\alpha_1^2 - (\alpha_1 - \alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 - t_0^2})^2}; 0)$, функции $ReF_{1j}(t)$ ($j = 1, \dots, n$) также не возрастают.

Доказательство. Возьмем произвольную линию уровня $(\mathcal{P}_{1k})$ из семейства $\{(\mathcal{P}_{1j}), j = 1, \dots, n\}$ соединяющую точки $(t_0; 0)$ и $(-t_0; 0)$. Уравнение $(\mathcal{P}_{1k})$ можно записать в виде

$$t_2 = -\alpha_k + \sqrt{t_1^2 - t_0^2 + \alpha_k^2}, \quad t_0 \leq t_1 \leq -t_0.$$

Рассмотрим $ReF_{1j}(t)$ вдоль $(\mathcal{P}_{1k})$. Имеем

$$\begin{aligned} ReF_{1j}(t) &= t_1^2 - (t_2 + \alpha_j)^2 = t_1^2 - \left(\alpha_j - \alpha_k + \sqrt{t_1^2 - t_0^2 + \alpha_k^2}\right)^2 = \\ &= t_1^2 - (\alpha_j - \alpha_k)^2 - 2(\alpha_j - \alpha_k)\sqrt{t_1^2 - t_0^2 + \alpha_k^2} - t_1^2 - t_0^2 + \alpha_k^2 = \\ &= -2(\alpha_j - \alpha_k)\sqrt{t_1^2 - t_0^2 + \alpha_k^2} + t_0^2 - \alpha_k^2 - (\alpha_j - \alpha_k)^2. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\left(ReF_{1j}(t)\right)'_{t_1} = \frac{-2(\alpha_j - \alpha_k)t_1}{\sqrt{t_1^2 - t_0^2 + \alpha_k^2}}.$$

Отсюда следует, если $t_1 < 0$, то только при условии $\alpha_j \leq \alpha_k$, все функции $ReF_{1j}(t)$ не возрастают. Поскольку $j = 1, \dots, n$, то должно быть $k = n$.

Если $0 < t_1$, то $ReF_{1j}(t)$ не возрастают при условии $\alpha_j \geq \alpha_k$ ($j = 1, \dots, n$), т.е. должна быть $k = 1$. Лемма доказана.

Часть $(\mathcal{P}_{1n})$, упомянутую в лемме, обозначим (K_1) , а часть $(\mathcal{P}_{11})$ обозначим (K_2) . Рассматривая линии уровня

$$(\mathcal{P}_{2j}) = \{ReF_{2j}(t) = t_1^2 - (t_2 - \alpha_j)^2 = t_0^2 - \alpha_j^2\}, j = 1, \dots, n$$

определим кривые $(\bar{K}_n)$, $(\bar{K}_1)$. Кривые (K_n) и $(\bar{K}_n)$, а также (K_1) и $(\bar{K}_1)$ симметричны.

Область, ограниченную кривыми (K_n) , $(\bar{K}_n)$, (K_1) , $(\bar{K}_1)$, обозначим $\mathcal{D}_0$ (Рисунок 3.2.6).

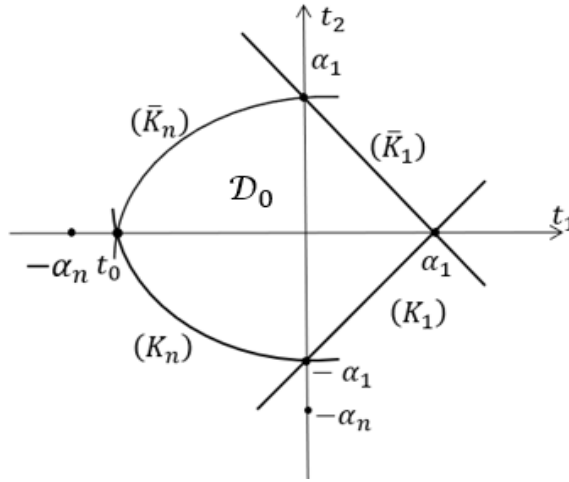


Рисунок 3.2.6. Область $\mathcal{D}_0$.

Границы области $\mathcal{D}_0$ удовлетворяют условию 3 Леммы 3.1.1.

Пусть $t \in \mathcal{D}_0$ и не является граничной точкой. Определим пути для $ReF_{1j}(t)$ ($j = 1, \dots, n$). Путь состоит из части $(K_n) \cup (K_1)$ $[t_0; \tilde{t}]$ прямолинейного отрезка $\{t \in \mathcal{D}_0, t_1 = \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \leq t_2\} [\tilde{t}; t]$.

Нетрудно проверить, что выбранные пути удовлетворяют условию 3 Леммы 3.1.1 для $ReF_{1j}(t)$ ($j = 1, \dots, n$). Для $ReF_{2j}(t)$ ($j = 1, \dots, n$) путь выбирается симметричным к путям $ReF_{1j}(t)$ ($j = 1, \dots, n$) (Лемма 3.1.2). Таким образом определена Ω .

3.2.3. Построения для случая СЗ

Построения проведем с использованием ЛУ функций $ReF_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$), где $F_1(t) = (t + i\alpha_1)^2$, $F_2(t) = (t - i\alpha_1)^2$, $F_3(t) = (t - \alpha_2)^2$.

Сначала уточним положение чисел α_1 и α_2 . Для них возможны случаи:

1. $0 < \alpha_1 < \alpha_2$;
2. $0 < \alpha_2 < \alpha_1$;
3. $\alpha_1 = \alpha_2$.

Сначала рассмотрим первый случай.

Введем линии уровня

$$(\mathcal{P}_{j0}) = \{t \in \mathcal{D}, \operatorname{Re} F_j(t) = 0\} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Линии уровня $(\mathcal{P}_{j0})$, соответственно, разветвляются в точках $(0; -\alpha_1)$, $(0; \alpha_1)$, $(\alpha_2, 0)$ (Рисунок 3.2.7).

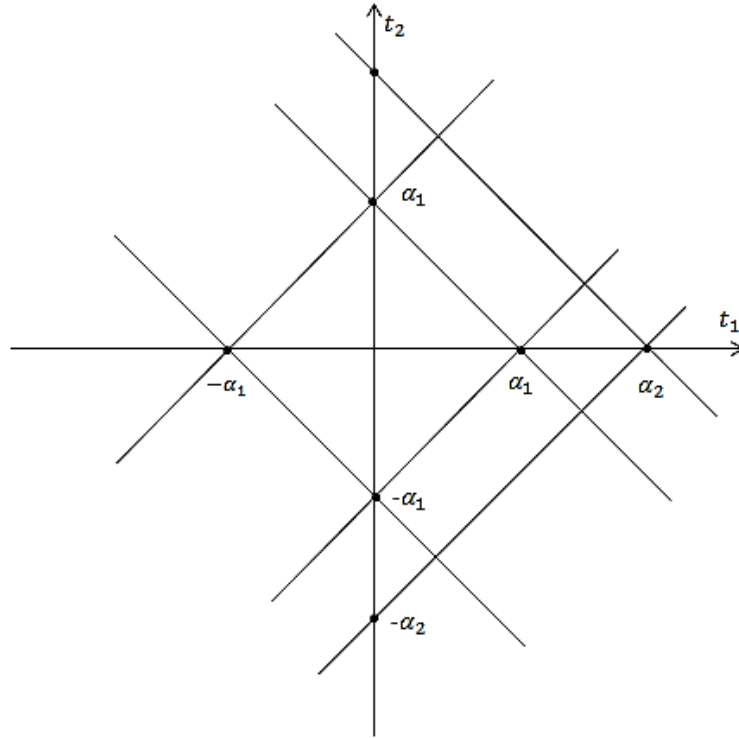


Рисунок 3.2.7. Разветвление линии уровней $(\mathcal{P}_{j0})$ ($j = 1, 2, 3$).

По условию $t_0 < 0$. Далее будем считать $t_0 < -\alpha_1$ и определим прямую

$$(\mathcal{P}) = \{t \in \mathcal{D}, \beta t_1 + t_2 + \alpha_1 = 0, \quad 0 < \beta < 1\}.$$

Прямая (p) проходит через точки $(-\frac{\alpha_1}{\beta}; 0)$, $(0; -\alpha_1)$ ($0 < \beta < 1$) $\Rightarrow$

$-\frac{\alpha_1}{\beta} < -\alpha_1$. Таким образом, можно считать $t_0 = -\frac{\alpha_1}{\beta}$.

Часть ветви $(\mathcal{P}_{10})$, соединяющую точки $(-\alpha_1; 0)$, $(\alpha_1; 0)$, обозначим (K_1) , а часть $(\mathcal{P})$, соединяющую точки $(t_0; 0)$, $(-\alpha_1; 0)$, обозначим (K_2) . Определим

$(\bar{K}_1), (\bar{K}_2)$ симметричные к (K_1) и (K_2) . Область, ограниченную $(K_1), (K_2), (\bar{K}_1), (\bar{K}_2)$, обозначим $\mathcal{D}_0$ (Рисунок 3.2.8).

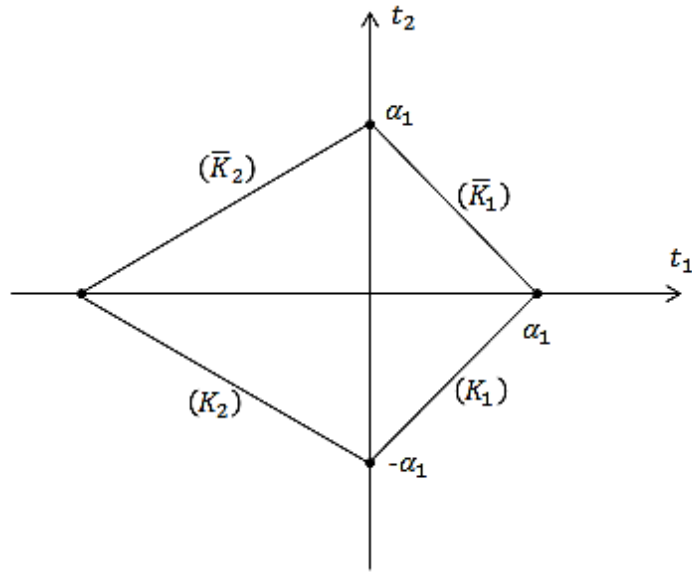


Рисунок 3.2.8. Область $\mathcal{D}_0$.

Определим прямые

$$(\mathcal{P}_1) = \{t \in \mathcal{D}, t_1 - t_2 - \alpha_1 + \sqrt{\varepsilon} = 0\},$$

$$(\mathcal{P}_2) = \{t \in \mathcal{D}, t_1 - t_2 - \alpha_3 = 0, 0 \ll \alpha_3 < \alpha_1 \wedge (\alpha_1 - \alpha_3) -$$

не зависит от $\varepsilon\}$,

$$(\mathcal{P}_3) = \{t \in \mathcal{D}, t_1 + t_2 + \alpha_1 - \sqrt{\varepsilon} = 0\},$$

$$(\mathcal{P}_4) = \{t \in \mathcal{D}, t_1 + t_2 + \alpha_3 = 0\}.$$

Часть $(\mathcal{P}_1)$, соединяющую точки, $B_1\left(-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\beta}; -\alpha_1 + \beta \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\beta}\right)$, $B_2(0; -\alpha_1 + \sqrt{\varepsilon})$, обозначим (K_3) ;

Часть $(\mathcal{P}_2)$, соединяющую точки $B_3\left(-\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{1+\beta}; -\frac{\alpha_1 + \alpha_3 \beta}{1+\beta}\right)$, $B_4(0; -\alpha_3)$, обозначим (K_4) ;

Часть $(\mathcal{P}_3)$, соединяющую точки $B_2(0; -\alpha_1 + \sqrt{\varepsilon})$, $B_5\left(-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}; -\alpha_1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right)$, обозначим (K_5) ;

Часть $(\mathcal{P}_4)$, соединяющую точки $B_4(0; -\alpha_3)$, $B_6\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2 - \sqrt{\varepsilon}}{2}; -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \sqrt{\varepsilon}}{2}\right)$, обозначим (K_6) .

Далее определим $(\bar{K}_j)$, симметричные к (K_j) ($j = 3, 4, 5, 6$) (Рисунок 3.2.9).

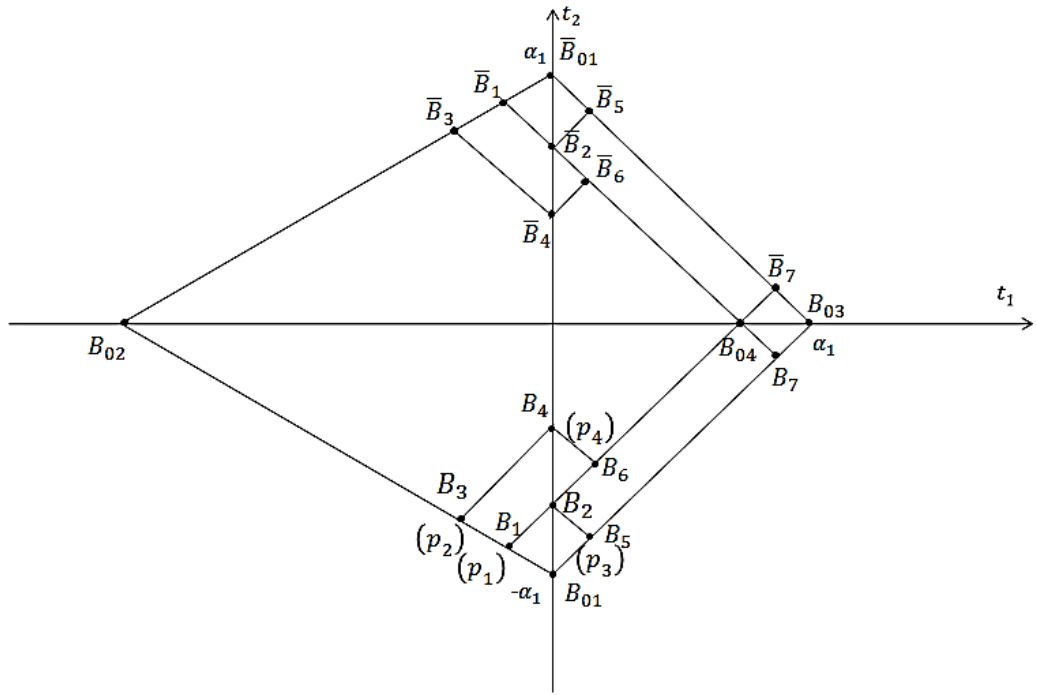


Рисунок 3.2.9. Прямые (P_j) ($j = 1, 2, 3, 4$) и их части (K_j) ($j = 3, 4, 5, 6$).

Пятиугольник с вершинами $(B_{02}B_3B_4\bar{B}_4\bar{B}_3)$ обозначим $\mathcal{D}_{01}$;

Пятиугольник с вершинами $(B_{04}B_6B_4\bar{B}_4\bar{B}_6)$ обозначим $\mathcal{D}_{02}$,

Четырехугольник с вершинами $(B_{01}B_1B_2B_5)$, $(B_1B_3B_4B_6)$, $(B_2B_5B_7B_{04})$, $(B_{03}B_7B_{04}\bar{B}_7)$ соответственно обозначим $\mathcal{D}_{03}$, $\mathcal{D}_{04}$, $\mathcal{D}_{05}$, $\mathcal{D}_{06}$.

Четырехугольники, симметричные к $\mathcal{D}_{0j}$ ($j = 3, 4, 5, 6$) обозначим

$\bar{\mathcal{D}}_{0j}$ ($j = 3, 4, 5, 6$) (Рисунок 3.2.10).

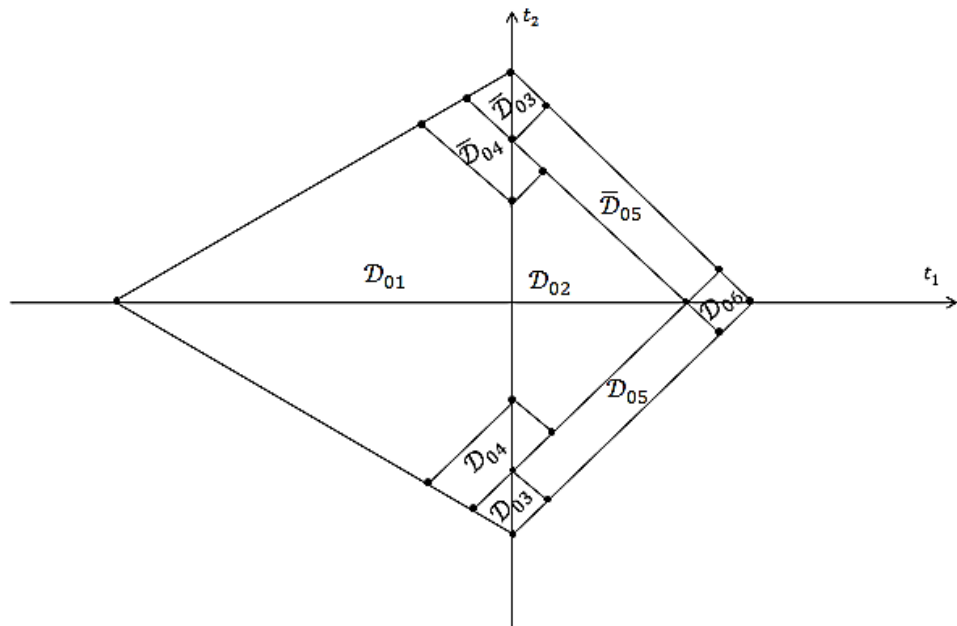


Рисунок 3.2.10. Области $\mathcal{D}_{01}, \mathcal{D}_{02}, \mathcal{D}_{06}, \mathcal{D}_{0j}, \bar{\mathcal{D}}_{0j}$ ($j = 3, 4, 5$).

Согласно, проведенных построений, имеем

$$\mathcal{D}_0 = \bigcup_{j=3}^5 (\mathcal{D}_{0j} \cup \bar{\mathcal{D}}_{0j}) \cup \mathcal{D}_{01} \cup \mathcal{D}_{02} \cup \mathcal{D}_{06}.$$

Теперь рассмотрим случай 2. $0 < \alpha_2 < \alpha_1$.

Для этого случая, линии уровня $(\mathcal{P}_{j0})$ разветвляются в точках $(0; -\alpha_1)$, $(0; \alpha_1)$, $(\alpha_2, 0)$ (Рисунок 3.2.11).

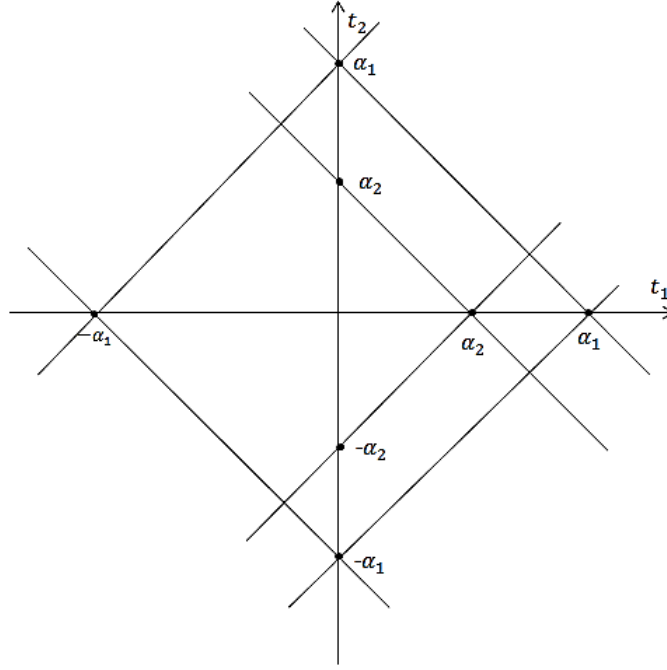


Рисунок 3.2.11. Разветвляющиеся линии уровня $(\mathcal{P}_{j0})$.

Как и в первом случае, сначала определим область $\mathcal{D}_0$.

Для этого рассмотрим ветвь линии уровня $(\mathcal{P}_{10})$, $(\mathcal{P}_{10}^1)$ $[(-\alpha_1; 0), (0; -\alpha_1)]$ и ветвь линии уровня $(\mathcal{P}_{30})$, $(\mathcal{P}_{30}^1)$ $[(0; -\alpha_2), (\alpha_2; 0)]$.

Ветви $(\mathcal{P}_{10}^1)$ и $(\mathcal{P}_{30}^1)$ пересекаются в точке $\left(-\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}; -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$.

Часть $(\mathcal{P}_{10}^1)$ $\left[(-\alpha_1; 0), \left(-\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}; -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\right]$ обозначим (K_2) ,

а часть $(\mathcal{P}_{30}^1)$ $\left[\left(-\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}; -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right), (\alpha_2; 0)\right]$ обозначим (K_1) .

Отрезки, симметричные к (K_1) , (K_2) , обозначим соответственно $(\bar{K}_1)$, $(\bar{K}_2)$.

Область, ограниченную (K_1) , (K_2) , $(\bar{K}_1)$, $(\bar{K}_2)$, обозначим $\mathcal{D}_0$ (Рисунок 3.2.12).

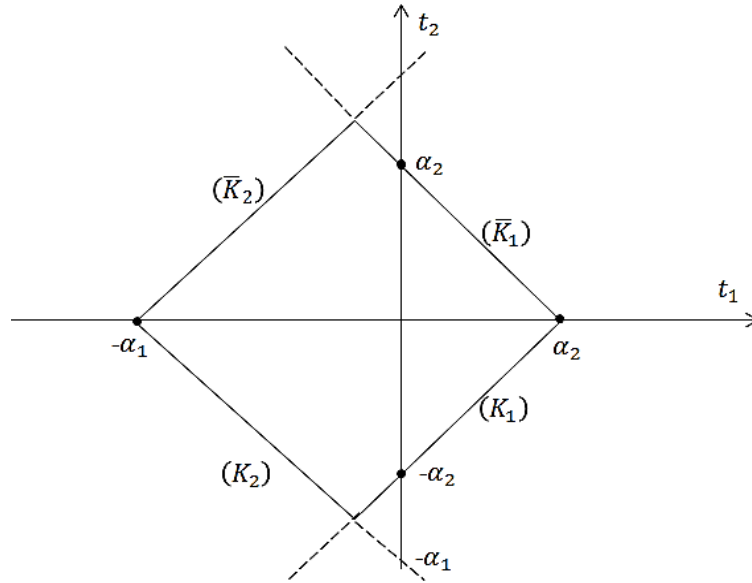


Рисунок 3.2.12. Область $\mathcal{D}_0$.

Далее будем считать $t_0 = -\alpha_1$.

Прямыми

$$(\mathcal{P}_1) = \{t \in C, t_1 = q, -\beta_1 \leq t_2 \leq \beta_1, 0 \ll q < \alpha_2 \text{ и } \alpha_2 - q \text{ не зависит от } \varepsilon\},$$

$$(\mathcal{P}_2) = \{t \in C, t_1 = \alpha_2 - \sqrt{\varepsilon}, -\beta_2 \leq t_2 \leq \beta_2\}$$

область $\mathcal{D}_0$ разделим на части $\mathcal{D}_0^1, \mathcal{D}_0^2, \mathcal{D}_0^3$ (Рисунок 3.2.13).

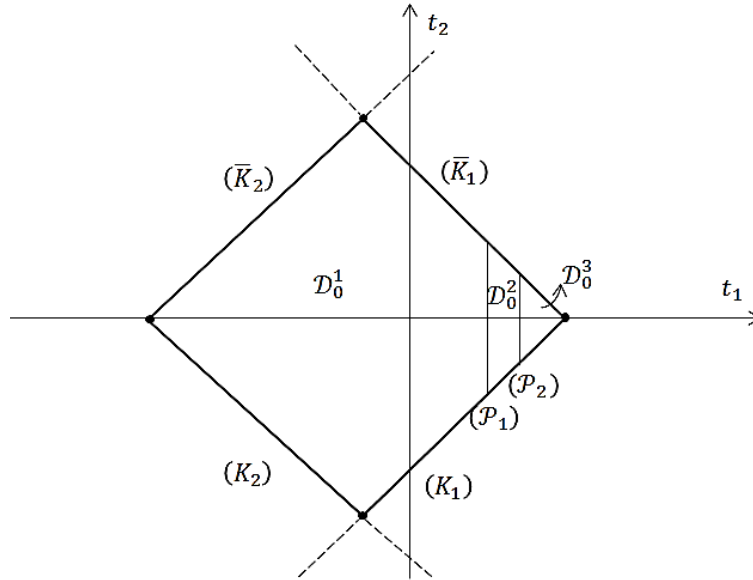


Рисунок 3.2.13. Области $\mathcal{D}_0^1, \mathcal{D}_0^2, \mathcal{D}_0^3$.

Теперь определим множество Ω (Лемма 3.1.1). Для $ReF_1(t)$ путь состоит: если $t \in \mathcal{D}_{01} \cup \mathcal{D}_{03} \cup \mathcal{D}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03} \cup \bar{\mathcal{D}}_{04}$, из части прямолинейного отрезка $[B_{02}B_1]$ $[t_0, \tilde{t}]$ и части прямолинейного отрезка

$$(\mathcal{P}_1) = \{\tau_1 - \tau_2 + \tilde{q} = 0, -\alpha_1 + \sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{q} \leq \alpha_1\} [\tilde{t}, t];$$

если $t \in \mathcal{D}_{02} \cup \mathcal{D}_{05} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05} \cup \mathcal{D}_{06}$, то из отрезка $[B_{02}B_{01}]$, отрезка $[B_{01}B_5]$, части прямой $\{\tau_1 + \tau_2 - \alpha_1 = 0\} [B_5 \tilde{t}]$, части прямой

$$\{\tau_1 + \tau_2 - \tilde{q} = 0, -\alpha_1 + \sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{q} \leq \alpha_1\} [\tilde{t}, t].$$

Путь для $ReF_2(t)$ выбирается симметричным к путям, определенным для $ReF_1(t)$.

$\forall t \in \mathcal{D}_0^1$ путь для $ReF_3(t)$ состоит из части: $(K_2) [t_0, \tilde{t}]$ и прямой

$$\{t_1 - t_2 - \alpha_1 + \tilde{q}_1 = 0, 0 \leq \tilde{q}_1 \leq -t_0 + \alpha_1\} [\tilde{t}_0, t].$$

Таким образом множество Ω определено.

3.2.4. Построения для случая С4

Возьмем функции $Re(t \pm i)^2, -Re(t \pm i)^3$.

Рассмотрим функции $Re(t + i)^2, -Re(t + i)^3$ и линии уровня

$$(\mathcal{P}_{01}) = \{t \in \mathcal{D}, Re(t + i)^2 = 0\},$$

$$(\mathcal{P}_{02}) = \{t \in \mathcal{D}, Re(t + i)^3 = 0\}.$$

Линии $(\mathcal{P}_{01}), (\mathcal{P}_{02})$ в точке $(0, -1)$ разветвляются (Рисунок 3.2.14).

Обозначим ветви $(\mathcal{P}_{01}^j) (j = 1, 2), (\mathcal{P}_{02}^j) (j = 1, 2, 3)$.

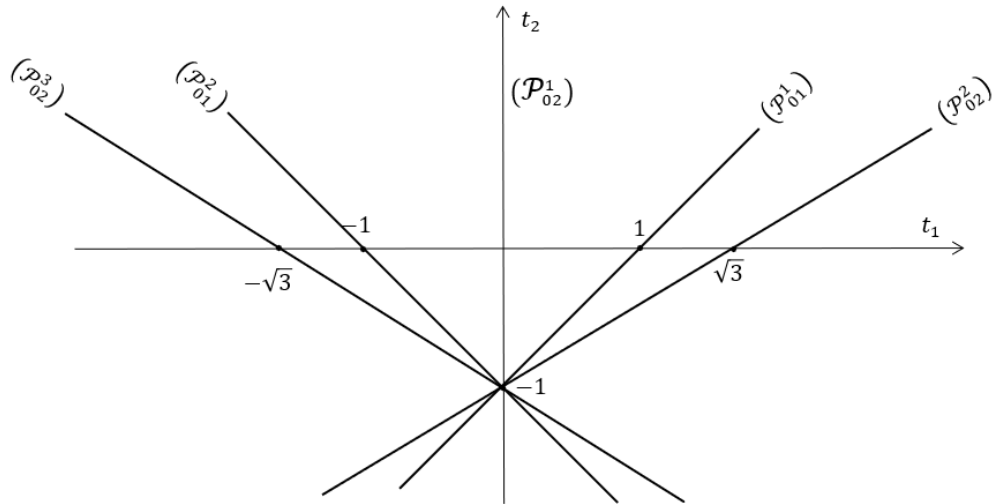


Рисунок 3.2.14. Ветви линий $(\mathcal{P}_{01}), (\mathcal{P}_{02})$

Ветви $(\mathcal{P}_{01}^j), (\mathcal{P}_{02}^j)$ разделяют область $\mathcal{D}$ соответственно на сектора $\Omega_{1k} (k = 1, 2, 3, 4), \Omega_{2k} (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ (Рисунок 3.2.15, 3.2.16).

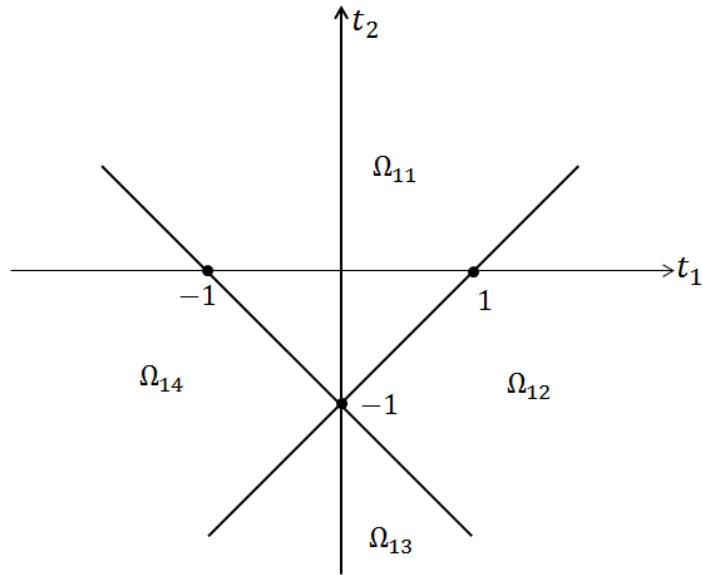


Рисунок 3.2.15. Сектора Ω_{1k} ($k = 1, \dots, 4$).

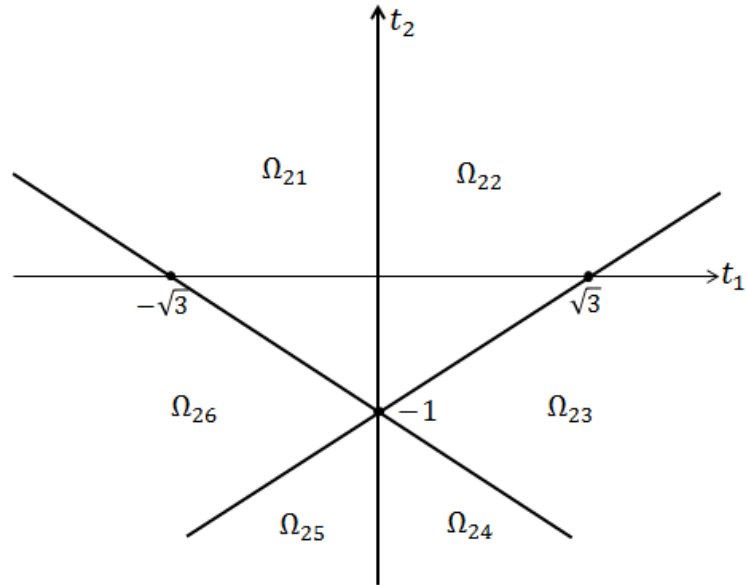


Рисунок 3.2.16. Сектора Ω_{2k} ($k = 1, \dots, 6$).

Рассматривая линии уровня $(\bar{\mathcal{P}}_{01}), (\bar{\mathcal{P}}_{02})$ (симметричные к линиям $(\mathcal{P}_{01}), (\mathcal{P}_{02})$), определим сектора $\bar{\Omega}_{1k}$ ($k = 1, 2, 3, 4$), $\bar{\Omega}_{2k}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Возьмем прямую $t_2 + 1 = \frac{1}{t_0} t_1$, где $t_0 < -\sqrt{3}$.

Данная прямая проходит через точки $B_1(t_0; 0)$ и $B_2(0; -1)$. Часть прямой, соединяющую точки B_1 и B_2 , обозначим (K_1) . Часть оси t_2 , соединяющую точки B_2 и $\bar{B}_2(0; 1)$, обозначим (K_2) . Обозначим $(\bar{K}_1)$, симметричный к (K_1) . Область, ограниченную (K_1) , (K_2) , $(\bar{K}_1)$, возьмем за область $\mathcal{D}_0$.

Произведем деление области $\mathcal{D}_0$. Возьмем прямые $t_1 = -q$ ($0 \ll q \ll -t_0$), $t_1 = -\varepsilon^\lambda$ ($0 < \lambda < 1$), $t_2 = -1 - \frac{\varepsilon^\lambda}{q}$ и точки пересечения с (K_1) обозначим B_3, B_4 , которые имеют координаты $B_3 \left(-q, -1 - \frac{q}{t_0}\right)$, $B_4 \left(-\varepsilon^\lambda, -1 + \frac{\varepsilon^\lambda}{q}\right)$. Далее возьмем точки $B_5 \left(0, -1 + \frac{\varepsilon^\lambda}{q}\right)$, $\bar{B}_5, \bar{B}_2, \bar{B}_3, \bar{B}_4$. Треугольники с вершинами $B_1, B_3, \bar{B}_3$; B_2, B_4, B_5 ; $\bar{B}_2, \bar{B}_4, \bar{B}_5$ соответственно обозначим $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_4, \bar{\mathcal{D}}_4$; четырехугольники с вершинами $B_3, B_4, \bar{B}_4, \bar{B}_3$; $B_4, B_5, \bar{B}_5, \bar{B}_4$ обозначим $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ (Рисунок 3.2.17).

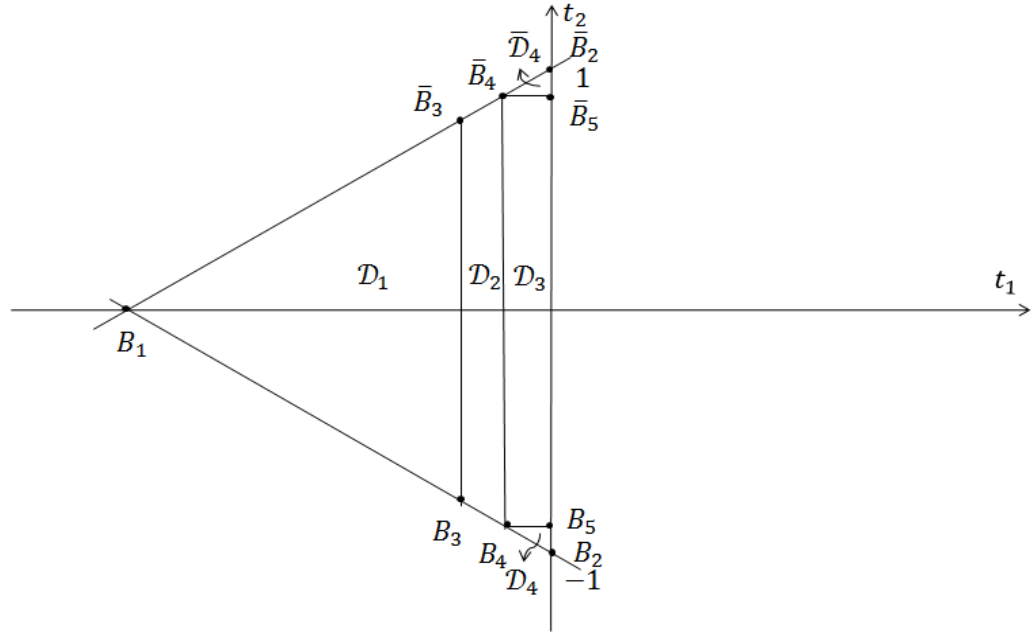


Рисунок 3.2.17. Области $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \bar{\mathcal{D}}_4$.

Как и в предыдущих случаях, определим множество Ω (Лемма 3.1.1).

Если $t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_4$, то для $ReF_1(t), -ReF_3(t)$ путь состоит из части $(K_1)[B_1, \tilde{t}]$ и отрезка

$$(K_3)\{(\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{D}_0, \tau_1 = \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \leq \tau_2 \leq t_2\} [\tilde{t}, t] \quad (\tilde{t} = \tilde{t}_1 + i\tilde{t}_2, t = \tilde{t}_1 + it_2);$$

Если $t \in \mathcal{D}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4$, то путь состоит из части $(K_1)[B_1, B_2], (K_2)[B_2, \tilde{t}]$, отрезка

$$(K_4)\{(\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{D}_0, t_1 \leq \tau_1 \leq 0, \tau_2 = \tilde{t}_2 = t_2\} [\tilde{t}, t] \quad (\tilde{t} = i\tilde{t}_2, t = t_1 + i\tilde{t}_2).$$

Для $ReF_2(t), -ReF_4(t)$ путь интегрирования выбирается, симметричным к путям $ReF_1(t), ReF_3(t)$. Заметим, пути интегрирования выбраны так, чтобы по ним функции $Re(t \pm i)^2, -Re(t \pm i)^3$ не возрастали.

Множество Ω построено.

3.2.5. Построения для случая С5

Возьмем функции $F_{2j-1}(t) = t - \alpha_j + i$, $F_{2j}(t) = t - \alpha_j - i$, $j = 1, \dots, n$.

Для геометрических построений используем линии уровня и свойства функций $ReF_{2j-1}(t)$, $ImF_{2j-1}(t)$, $ReF_{2j}(t)$, $ImF_{2j}(t)$. Функции $F_{2j-1}(t)$, $F_{2j}(t)$ соответственно в точках $t = \alpha_j - i$, $t = \alpha_j + i$ имеют двухкратные нули и линии уровня функций $ReF_{2j-1}(t)$, $ImF_{2j-1}(t)$, $ReF_{2j}(t)$, $ImF_{2j}(t)$ разветвляются в этих точках.

Введем обозначения

$$(\mathcal{P}_{0\ 2j-1}) = \{t \in \mathcal{D}, ReF_{2j-1}(t) = 0\},$$

$$(\mathcal{P}_{0\ 2j}) = \{t \in \mathcal{D}, ReF_{2j}(t) = 0\} \text{ (Рисунок 3.2.18).}$$

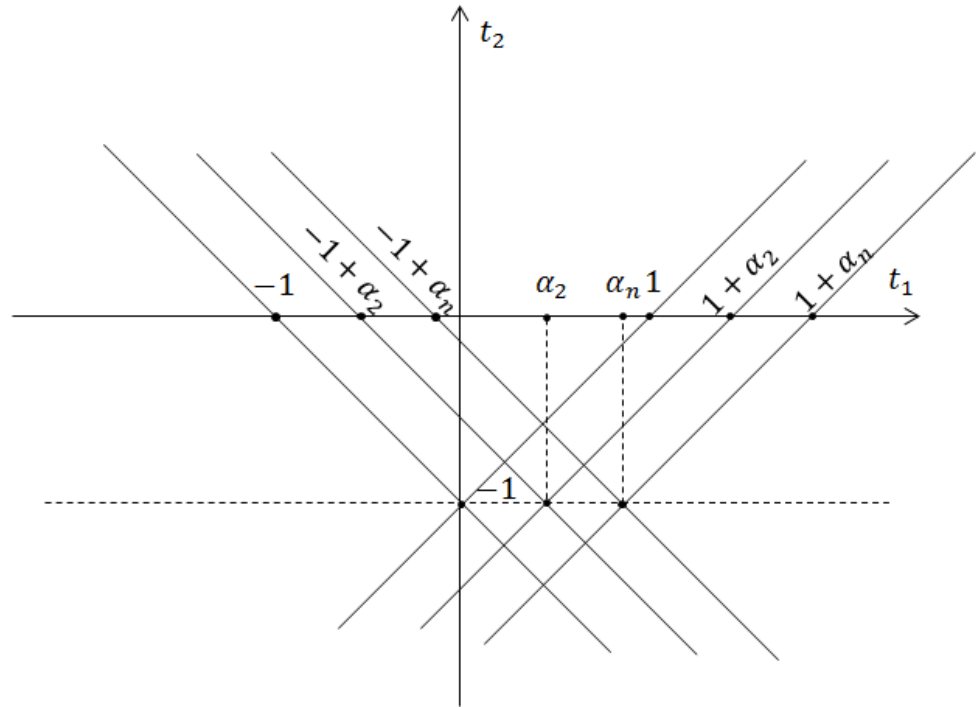


Рисунок 3.2.18. Разветвляющиеся линии $(\mathcal{P}_{0\ 2j-1})$, $(\mathcal{P}_{0\ 2j})$.

Определим прямую

$$(\mathcal{P}_1): t_2 = \frac{1}{t_0}(t_1 - t_0),$$

которая проходит через точки $(t_0; 0)$, $(0; -1)$, причем будем считать $t_0 < -1$.

Часть $(\mathcal{P}_1)$, соединяющую точки $(t_0; 0)$, $(0; -1)$, обозначим (K_1) . Часть ветви (p_{01}) , соединяющую точки $(0; -1)$, $(1; 0)$, обозначим (K_2) . Определим $(\bar{K}_1)$, $(\bar{K}_2)$

симметричные к (K_1) , (K_2) . Область, ограниченную (K_1) , (K_2) , $(\bar{K}_1)$, $(\bar{K}_2)$, обозначим $\mathcal{D}_0$.

С учетом дальнейших вычислений область $\mathcal{D}_0$ разделим на несколько частей. Для этого определим прямые

$$(\mathcal{P}_2): \{t \in \mathcal{D}, t_1 - t_2 - 1 + \sqrt{\varepsilon} = 0\},$$

$$(\mathcal{P}_3): \{t \in \mathcal{D}, t_1 - t_2 - 1 + q_1 = 0, 0 \ll q_1 \ll 1 \text{ и не зависит от } \varepsilon\},$$

$$(\mathcal{P}_4): \{t \in \mathcal{D}, t_1 + t_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon} = 0\},$$

$$(\mathcal{P}_5): \{t \in \mathcal{D}, t_1 + t_2 + 1 - q_1 = 0\}$$

и прямые $(\bar{\mathcal{P}}_j)$ ($j = 2, \dots, 5$) симметричные к $(\mathcal{P}_j)$ ($j = 2, \dots, 5$).

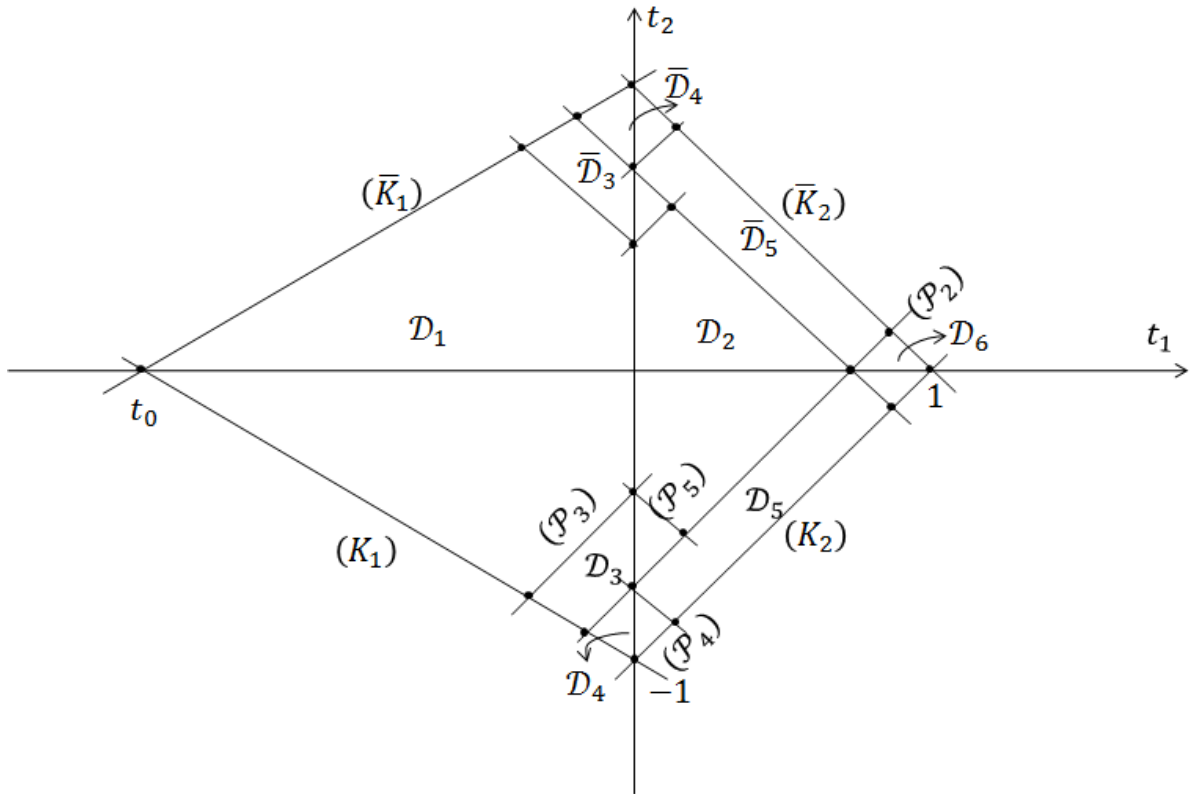


Рисунок 3.2.19. Деление области $\mathcal{D}_0$.

Прямыми $(\mathcal{P}_j)$, $(\bar{\mathcal{P}}_j)$ ($j = 2, \dots, 5$) область $\mathcal{D}_0$ разделяется на части $\mathcal{D}_j$ ($j = 1, \dots, 6$), $\bar{\mathcal{D}}_3, \bar{\mathcal{D}}_4, \bar{\mathcal{D}}_5$ (Рисунок 3.2.19).

Пусть $(p(t_0, t))$ для $ReF_{2j-1}(t)$ ($j = 1, \dots, n$) состоит:

если $t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4$, то из части (K_1) $[t_0, \tilde{t}]$; части прямой

$$(\mathcal{P}_1): \{t_1 - t_2 - 1 + \tilde{q}_1 = 0, 0 \leq \tilde{q}_1 \leq 1 - t_0\};$$

если $t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6 \cup \bar{\mathcal{D}}_5$, то из кривой $(K_1) [t_0, (0; -1)]$; части $(K_2) [(0; -1); \tilde{t}]$, части

$$(\mathcal{P}_2): \{t_1 + t_2 + 1 - \tilde{q}_2 = 0, \sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{q}_2 \leq 2\} [\tilde{t}, t].$$

Пути для $ReF_{2j}(t)$ ($j = 1, \dots, n$) выбираются симметричными, к путям для $ReF_{2j-1}(t)$ ($j = 1, \dots, n$).

Нетрудно проверить, что выбранные пути удовлетворяют условию 3 Леммы 3.1.1, т.е. множество Ω определено.

§ 3.3. Заключение по главе 3

В данной главе сформулированы основные критерии для геометрических построений.

При изложении критериев использованы некоторые интегралы зависящие от малого параметра. Доказано, что сходимость или ограниченность таких интегралов зависит от определения некоторого множества путей. Пути выбираются так, чтобы по ним заданные гармонические функции были невозрастающими. Исходя из критерия-сходимости, используя гармонические функции, для случаев C1, C2, C3, C4, C5 изложенного в главе 2, проведены геометрические построения. Все геометрические построения включают в себе определение некоторой области и множества путей, удовлетворяющих критерию-сходимости. При выборе путей использован принцип симметрии.

ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДЕРЖКИ РЕШЕНИЙ

В данной главе уравнения, рассмотренные в § 2.1 (случаи С1, С2, С3, С4, С5) исследованы на предмет ЗР. Уравнения заменяются интегральными уравнениями и применяется метод последовательных приближений и для доказательства сходимости последовательных приближений используются геометрические построения, проведенные в §3.2.

Далее, во всех случаях решение (2.1.2) возьмем в виде $y = t$ и аргументы неизвестных функций будем опускать. Буква M с разными индексами (типа M_k или M_{jk}) означает положительные постоянные, не зависящие от ε .

§4.1. Задержка решения для случая С1

В (2.1.1) введем новые неизвестные функции

$$u_1 = x_1 - t, u_2 = x_2, u_3 = x_3 - t, u_4 = x_4;$$

$$z_1 = u_1 + iu_2, z_2 = u_1 - iu_2, z_3 = u_3 + iu_4, z_4 = u_3 - iu_4$$

и уравнение приведем к виду:

$$\varepsilon z'_j = (t + k_j i) z_j + V^2(z_1, z_2, z_3, z_4) z_j - \varepsilon, \quad (4.1.1)$$

$$z_j(t_0, \varepsilon) = z_j^0, \quad z_j^0 \leq M\varepsilon, \quad (4.1.2)$$

где $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 2, k_4 = -2$; $V(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1 z_2 + z_3 z_4$.

(4.1.1)-(4.1.2) заменим следующим интегральным уравнением

$$z_j = z_j^0 \exp \frac{(t+k_j i)^2 - (t_0+k_j i)^2}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (-\varepsilon + V^2) z_j \exp \frac{(t+k_j i)^2 - (\tau+k_j i)^2}{2\varepsilon} d\tau \quad (4.1.3)$$

и применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом

$$z_{jm} = z_j^0 e^{\frac{(t+k_j i)^2 - (t_0+k_j i)^2}{2\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (-\varepsilon + V_{m-1}) z_{j\,m-1} e^{\frac{(t+k_j i)^2 - (\tau+k_j i)^2}{2\varepsilon}} d\tau, \quad z_{j\,0} \equiv 0, \quad (4.1.4)$$

$$V_{m-1} = z_{1\,m-1} z_{2\,m-1} + z_{3\,m-1} z_{4\,m-1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Последовательные приближения (4.1.4) будем рассматривать в области $\mathcal{D}_0$, определенной в §3.2, П 3.2.1.

За пути интегрирования возьмем пути, определенные в П 3.2.1 для $ReF_j(t)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) (определение множества Ω).

При этом для z_{jm} выберем путь, определенный для

$$ReF_j(t) (z_{1m} \rightarrow ReF_1(t), z_{2m} \rightarrow ReF_2(t), z_{3m} \rightarrow ReF_3(t), z_{4m} \rightarrow ReF_4(t)).$$

Теперь проведем оценку и докажем равномерную сходимость ПП (4.1.4).

Оценка первых приближений.

Согласно выбранных путей интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} z_{11} = z_1^0 \exp \frac{(t+i)^2 - (t_0+i)^2}{2\varepsilon} - \int_{\substack{t_0 \\ (K_2)}}^{\tilde{t}} \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau \\ - \int_{\substack{\tilde{t} \\ (P_1)}}^t \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Если $t \in \mathcal{D}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4$, то, применяя интегрирование по частям к интегралам в (4.1.5) (функция $(t+i)$ не имеет особенностей) и переходя к модулю, получим

$$|z_{11}| \leq M_1 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4 \quad (4.1.6)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_3$. Тогда в (4.1.5), к первому интегралу применим метод Лапласа.

Из уравнения (K_2) , определяем $t_2 = -2 + \sqrt{t_1^2 + 1}$. Имеем

$$Re(t+i)^2 = t_1^2 - \left(-1 + \sqrt{t_1^2 + 1}\right)^2 = -2 + 2\sqrt{t_1^2 + 1}.$$

$$(Re(t+i)^2)' = \frac{2t_1}{\sqrt{t_1^2 + 1}}.$$

Таким образом, функция $(-Re(\tau+i)^2)$ возрастает при $t_0 \leq t_1 \leq T_0(\varepsilon)$, где $T_0(\varepsilon)$ первая координата точки B_4 и $T_0(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{\varepsilon}(2+\sqrt{\varepsilon})}{2(1+\sqrt{\varepsilon})}$.

Если рассмотреть отрезок $[t_0, \tilde{t}_1]$ ($\tilde{t}_1 \leq T_0(\varepsilon)$), то максимальное значение $(-Re(\tau+i)^2)$ достигается в точке $\tau_1 = \tilde{t}_1$ и $(-Re(\tau+i)^2)'_{\tau_1=\tilde{t}_1} = -\frac{2\tilde{t}_1}{\sqrt{\tilde{t}_1^2+1}} > 0$.

Тогда

$$|\mathcal{I}_1| \leq \left| \int_{\substack{\tilde{t}_0 \\ (\text{по } (K_2))}}^{\tilde{t}_1} e^{\frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 - \tau_1^2 + (\tau_2+1)^2}{2\varepsilon}} d\tau_1 \right| \leq M_0 \frac{-\sqrt{\tilde{t}_1^2 + 1} \cdot \varepsilon}{2\tilde{t}_1} e^{\frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 + 2 - 2\sqrt{\tilde{t}_1^2 + 1}}{2\varepsilon}}.$$

По выбранным путям $Re(t+i)^2$ убывает, следовательно

$$t_1^2 - (t_2 + 1)^2 + 2 - 2\sqrt{\tilde{t}_1^2 + 1} \leq 0, \tilde{t}_1 \leq T_0(\varepsilon).$$

Учитывая эти неравенства, получим

$$|\mathcal{I}_1| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon} \quad (4.1.7)$$

Оценим, второй интеграл в (4.1.5). Запишем уравнение $(\mathcal{P}_1)$ и определим

$$t_2 = t_1 + q. \text{ Имеем } Re(t+i)^2 = t_1^2 - (t_1 + 1 + q)^2 = -(1+q)(2t_1 + 1 + q)$$

Для второго интеграла имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_2| &\leq M_0 \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \exp \frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 + (1+q)(2\tau_1+1+q)}{2\varepsilon} d\tau_1 = \\ &= M_0 \frac{2\varepsilon}{1+q} \left[1 - \exp \frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 + (1+q)(2\tilde{t}_1+1+q)}{2\varepsilon} \right] \leq 2M_0 \frac{\varepsilon}{1+q}. \end{aligned}$$

Так как, $\sqrt{\varepsilon} \leq 1 + q \leq 2$, то

$$|\mathcal{I}_2| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon} \quad (4.1.8)$$

На основе, оценок (4.1.7), (4.1.8), получим

$$|z_{11}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}, t \in \mathcal{D}_3 \quad (4.1.9)$$

Аналогично получается оценка

$$|z_{11}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}, t \in \mathcal{D}_4 \quad (4.1.10)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6 \cup \bar{\mathcal{D}}_5$. Для этого случая имеем

$$\begin{aligned} z_{11} &= z_1^0 e^{\frac{(t+i)^2 - (t_0+i)^2}{2\varepsilon}} - \int_{\substack{\tilde{t}_0 \\ (\text{по } (K_2))}}^{(0; -1)} e^{\frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon}} d\tau + \int_{\substack{0 \\ (\text{по } (K_1))}}^{\tilde{t}} e^{\frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon}} d\tau + \\ &+ \int_{\substack{\tilde{t} \\ (\text{по } (\mathcal{P}_2))}}^t e^{\frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon}} d\tau. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

В (4.1.11) первый, второй и третий интегралы соответственно обозначим $\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_4, \mathcal{J}_5$. Учитывая вычисления, проведенные в предыдущем случае, для $\mathcal{J}_3$ имеем оценку

$$|\mathcal{J}_3| \leq M_{20}\sqrt{\varepsilon} \exp \frac{t_1^2 - (t_2+1)^2}{2\varepsilon}. \quad (4.1.12)$$

Для оценки $\mathcal{J}_4$, применим метод стационарной фазы, тогда

$$|\mathcal{J}_4| \leq M_{20}\sqrt{\varepsilon} \exp \frac{t_1^2 - (t_2+1)^2}{2\varepsilon}. \quad (4.1.13)$$

Оценку $\mathcal{J}_5$ проведем следующим образом. Из уравнения $(\mathcal{P}_2)$ определим $\tau_1 = -\tau_2 + q$ и это значение подставим в $\mathcal{J}_5$ и перейдем к модулю

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_5| &\leq \sqrt{2} \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} e^{\frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 - (\tau_2 - q)^2 + (\tau_2+1)^2}{2\varepsilon}} d\tau_2 = \\ &= \sqrt{2} \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} e^{\frac{(t_2 - q)^2 - (t_2+1)^2 - (1+q)(2\tau_2+1-q)}{2\varepsilon}} d\tau_2 = \sqrt{2} \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} e^{\frac{-2(1+q)(t_2 - \tau_2)}{2\varepsilon}} d\tau_2 \leq \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{1+q}, \\ |\mathcal{J}_5| &\leq \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{1+q}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6$, тогда $e^{\frac{t_1^2 - (t_2+1)^2}{2\varepsilon}} \leq 1$ для $t \in \mathcal{D}_5$ ($-1 + \sqrt{\varepsilon} \leq q \leq q_0$ – не зависит от ε и $q_0 < 1$) $t \in \mathcal{D}_6$ ($q_0 \leq q \leq 1$). Согласно, сделанных замечаний из (4.1.12)-(4.1.14), получим $|\mathcal{J}_3| \leq M_{20}\sqrt{\varepsilon}$, $|\mathcal{J}_4| \leq M_{20}\sqrt{\varepsilon}$, $|\mathcal{J}_5| \leq M_{20}\sqrt{\varepsilon}$.

Итого

$$|z_{11}| \leq M_2\sqrt{\varepsilon}, t \in \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6 \quad (4.1.15)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_2 \cup \bar{\mathcal{D}}_5$. В рассматриваемом случае

$$t_1^2 - (t_2 + 1)^2 = (t_1 - t_2 - 1)(t_1 + t_2 + 1) = -\sqrt{\varepsilon}(t_1 + t_2 + 1)$$

и $t_1 + t_2 + 1 \gg 0$, $1 + q \geq 1 + \tilde{q}$ – не зависит от ε .

Следовательно $|\mathcal{J}_3| = o(\varepsilon^n)$, $|\mathcal{J}_4| = o(\varepsilon^n)$, $n \in N$, $|\mathcal{J}_5| \leq M_{20}\varepsilon$. Имеем

$$|z_{11}| \leq M_2\varepsilon, t \in \mathcal{D}_2 \cup \bar{\mathcal{D}}_5. \quad (4.1.16)$$

Подведя итог, согласно (4.1.6), (4.1.9), (4.1.10), (4.1.15), (4.1.16), можем записать оценку

$$|z_{11}| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4 \cup \mathcal{D}_2 \cup \bar{\mathcal{D}}_5, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6. \end{cases} \quad (4.1.17)$$

Приведя аналогичные оценки для z_{21} получим оценку

$$|z_{21}| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_5, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_5 \cup \mathcal{D}_6. \end{cases} \quad (4.1.18)$$

Перейдем к оценке z_{31}, z_{41} . Сначала оценим z_{31} . Имеем

$$z_{31} = z_3^0 \exp \frac{(t+2i)^2 - (t_0+2i)^2}{2\varepsilon} - \int_{t_0}^t \exp \frac{(t+2i)^2 - (\tau+2i)^2}{2\varepsilon} d\tau.$$

Поскольку функция $(t \pm 2i)^2$ не имеют особенностей в области $\mathcal{D}_0$, то для оценки z_{31} , достаточно проинтегрировать по частям интеграл

$$J_6 = \int_{t_0}^t \exp \frac{(t+2i)^2 - (\tau+2i)^2}{2\varepsilon} d\tau.$$

Затем, переходя к модулю, получим

$$|z_{31}| \leq M_2 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_0. \quad (4.1.19)$$

Согласно, выбранных путей интегрирования, имеем оценку

$$|z_{41}| \leq M_2 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_0. \quad (4.1.20)$$

Оценка последующих приближений и доказательство сходимости последовательных приближений.

Оценку проводим методом индукции.

В выражении последующих приближений (4.1.4) присутствуют функции

$$F_j(t, t_0, \varepsilon) = \exp \frac{(t+ik_j)^2 - (t_0+ik_j)^2}{2\varepsilon}, \quad F_j(t, \tau, \varepsilon) = \exp \frac{(t+ik_j)^2 - (\tau+ik_j)^2}{2\varepsilon},$$

$$V_{m-1}^2 \cdot z_{j\ m-1} = (z_{1\ m-1} z_{2\ m-1} + z_{3\ m-1} z_{4\ m-1})^2 z_{j\ m-1}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Согласно выбранных путей интегрирования, функции $Re(t + ik_j)^2$ не возрастают, тогда функции $|F_j(t, t_0, \varepsilon)|, |F_j(t, \tau, \varepsilon)|$ ограничены.

При оценке $V_{m-1}^2 \cdot z_{j\ m-1}$ (по индукции) можно взять

$$|z_{1\ m-1}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}, |z_{2\ m-1}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}, |z_{3\ m-1}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}, |z_{4\ m-1}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}$$

для любого $t \in \mathcal{D}_0$. Итого получается оценка

$$|z_{j\ m}| \leq M_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6 \cup \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_5, \end{cases} \quad j = 1, 2 \quad (4.1.21)$$

$$|z_{j\ m}| \leq M_1 \varepsilon, \quad t \in \mathcal{D}_0, \quad j = 3, 4; \quad m = 1, 2, \dots$$

Для доказательства равномерной сходимости (4.1.4) к ряду $\sum_{m=1}^{\infty} (z_m - z_{m-1})$ применим признак Вейерштрасса.

$$z_m - z_{m-1} = \int_{t_0}^t (V_{m-1}^2 \cdot z_{m-1} - V_{m-2}^2 \cdot z_{m-2}) E(t, \tau, \varepsilon) d\tau, \quad m = 2, \dots \quad (4.1.22)$$

$$\text{где } E(t, \tau, \varepsilon) = \text{diag} \left(e^{\frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon}}, e^{\frac{(t-i)^2 - (\tau-i)^2}{2\varepsilon}}, e^{\frac{(t+2i)^2 - (\tau+2i)^2}{2\varepsilon}}, e^{\frac{(t-2i)^2 - (\tau-2i)^2}{2\varepsilon}} \right).$$

Проведем следующие преобразования

$$\begin{aligned} V_{m-1}^2 \cdot z_{m-1} - V_{m-2}^2 \cdot z_{m-2} &= V_{m-1}^2 \cdot z_{m-1} - V_{m-1}^2 \cdot z_{m-2} + V_{m-1}^2 \cdot z_{m-2} - \\ &- V_{m-2}^2 \cdot z_{m-2} = V_{m-1}^2 (z_{m-1} - z_{m-2}) + (V_{m-1} - V_{m-2})(V_{m-1} + V_{m-2}) z_{m-2} = \\ &= V_{m-1}^2 (z_{m-1} - z_{m-2}) + ((z_{1\ m-1} - z_{1\ m-2}) z_{2\ m-1} + (z_{2\ m-1} - z_{2\ m-2}) \times \\ &\times z_{1\ m-2} + (z_{3\ m-1} - z_{3\ m-2}) \times z_{4\ m-1} + (z_{4\ m-1} - z_{4\ m-2}) z_{3\ m-2}) \times \\ &\times (z_{1\ m-1} z_{2\ m-1} + z_{3\ m-1} z_{4\ m-1} + z_{1\ m-2} z_{2\ m-2} + z_{3\ m-2} z_{4\ m-2}) z_{m-2}. \end{aligned}$$

Учитывая проведенные преобразования получим

$$\|z_m - z_{m-1}\| \leq (M_1 \sqrt{\varepsilon})^{m-1}, \quad m = 2, 3, \dots$$

Таким образом (4.1.4) сходится равномерно к некоторой функции $z(t, \varepsilon)$, которая является решением (4.1.3). Для этого решения, согласно (4.1.21), справедлива оценка

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq M_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \bigcup_{j=3}^5 (\mathcal{D}_j \cup \bar{\mathcal{D}}_j) \cup \mathcal{D}_6 \end{cases} \quad (4.1.23)$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 4.1.1. Пусть рассматривается задача (4.1.1)-(4.1.2). Тогда существует область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и решение задачи (4.1.1)-(4.1.2) $z(t, \varepsilon)$, определенное в $\mathcal{D}_0$ и для этого решения справедлива оценка (4.1.23).

Согласно проведенных преобразований из (4.1.23) вытекает оценка

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq M_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \bigcup_{j=3}^5 (\mathcal{D}_j \cup \bar{\mathcal{D}}_j) \cup \mathcal{D}_6, \end{cases} \quad (4.1.24)$$

Если (4.1.24) рассмотреть на действительной оси, то получим

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq M_1 \begin{cases} \varepsilon, & t_0 \leq t \leq 1 - \sqrt{\varepsilon}; \\ \sqrt{\varepsilon}, & 1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (4.1.25)$$

Следствие 4.1.1. Из (4.1.25) вытекает, что решение задачи (2.1.1)-(2.1.2)-(2.1.3) задерживается около возникшего неустойчивого положения равновесия на отрезке $[0; 1]$.

§4.2. Задержка решения для случая С2

В (2.1.1), используя координатную запись векторов, имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon u'_{2j-1} &= t u_{2j-1} - \alpha_j u_{2j} + V(u_1, \dots, u_{2n}) u_{2j-1} - \varepsilon, \\ \varepsilon u'_{2j} &= \alpha_j u_{2j-1} + t u_{2j} + V(u_1, \dots, u_{2n}) u_{2j}, j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Отсюда получим систему

$$\varepsilon z'_{2j-1} = (t + \alpha_j i) z_{2j-1} + V_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) z_{2j-1} - \varepsilon, \quad (4.2.1)$$

$$\varepsilon z'_{2j} = (t - \alpha_j i) z_{2j} + V_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) z_{2j} - \varepsilon,$$

с начальным условием

$$z_{2j-1}(t_0, \varepsilon) = z_{2j-1}^0, z_{2j}(t_0, \varepsilon) = z_{2j}^0, j = 1, \dots, n, \quad (4.2.2)$$

где $V_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) = z_1 \cdot z_2 + \dots + z_{2n-1} \cdot z_{2n}$.

Задачу (4.2.1)-(4.2.2) заменим следующим:

$$\begin{aligned}z_{2j-1} &= z_{2j-1}^0 \exp \frac{1}{2\varepsilon} (ReF_{1j}(t) - ReF_{1j}(t_0)) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t [V_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) z_{2j-1} - \varepsilon] \times \exp \frac{1}{2\varepsilon} (ReF_{1j}(t) - ReF_{1j}(\tau)) d\tau, \quad (4.2.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_{2j} &= z_{2j}^0 \exp \frac{1}{2\varepsilon} (ReF_{2j}(t) - ReF_{2j}(t_0)) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t [V_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) z_{2j} - \varepsilon] \times \exp \frac{1}{2\varepsilon} (ReF_{2j}(t) - ReF_{2j}(\tau)) d\tau,\end{aligned}$$

где $F_{1j}(t) = (t + i\alpha_j)^2$, $F_{2j}(t) = (t - i\alpha_j)^2$, $j = 1, \dots, n$.

Теперь исследуем асимптотическое поведение решения уравнения (4.2.3).

Далее будем считать

$$|z_k^0| \leq M\varepsilon, \quad k = 1, \dots, 2n. \quad (4.2.4)$$

Последовательные приближения (4.2.3) будем рассматривать в области $\mathcal{D}_0$, определенной в §3.2, П 3.2.2.

Асимптотическое поведение решения (4.2.3) зависит от t_0 . Из доказанной леммы 3.2.1 (§3.2, П 3.2.2) следует, если $t_0 \rightarrow -\sqrt{\alpha_1(2\alpha_n - \alpha_1)}$, то кривая (K_n)

соединяет точки $(-\sqrt{\alpha_1(2\alpha_n - \alpha_1)}, 0)$, $(0; -\alpha_1)$, а кривая (K_1) вырождается в прямолинейный отрезок, соединяющий точки $(0; -\alpha_1)$, $(\alpha_1; 0)$.

Следовательно, возможны следующие случаи:

1. $-\sqrt{\alpha_1(2\alpha_n - \alpha_1)} < t_0$.
2. $t_0 = -\sqrt{\alpha_1(2\alpha_n - \alpha_1)}$.
3. $t_0 < -\sqrt{\alpha_1(2\alpha_n - \alpha_1)}$.

Поскольку каждый из этих случаев требует отдельного исследования, ограничимся рассмотрением случая 1.

К (4.2.3) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом

$$\begin{aligned} z_{2j-1m} = & z_{2j-1}^0 \exp \frac{1}{2\varepsilon} \left(\operatorname{Re} F_{1j}(t) - \operatorname{Re} F_{1j}(t_0) \right) + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \left[V_0(z_{1m-1}, \dots, z_{2nm-1}) z_{2j-1m-1} - \varepsilon \right] \times \exp \frac{1}{2\varepsilon} \left(\operatorname{Re} F_{1j}(t) - \operatorname{Re} F_{1j}(\tau) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$$\begin{aligned} z_{2jm} = & z_{2j}^0 \exp \frac{1}{2\varepsilon} \left(\operatorname{Re} F_{2j}(t) - \operatorname{Re} F_{2j}(t_0) \right) + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \left[V_0(z_{1m-1}, \dots, z_{2nm-1}) z_{2j-1m-1} - \varepsilon \right] \times \exp \frac{1}{2\varepsilon} \left(\operatorname{Re} F_{2j}(t) - \operatorname{Re} F_{2j}(\tau) \right) d\tau, \\ z_{2j-10} \equiv & 0, z_{2j0} \equiv 0, m = 1, 2, \dots, t \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Оценим и докажем равномерную сходимость последовательных приближений (4.2.5).

Выберем пути интегрирования.

Пути интегрирования выбираются так: для z_{2j-1m} выберем путь, определенный для $\operatorname{Re} F_{1j}(t)$ ($j = 1, \dots, n$) (§3.2, П 3.2.2), а для z_{2jm} ($j = 1, \dots, n$) симметричным к выбранному пути (построение множества Ω).

При оценке последовательных приближений z_{2j-1m} определяющими являются функции $\operatorname{Re} F_{1j}(t)$. По выбранным путям $\operatorname{Re} F_{1j}(t)$ не возрастают и это обеспечивает ограниченность $\{z_{2j-1m}\}$.

При оценке первых приближений, по выбранным путям интегралы

$$J_{1j}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t \exp \frac{1}{2\varepsilon} \left(\operatorname{Re} F_{1j}(t) - \operatorname{Re} F_{1j}(\tau) \right) d\tau, j = 1, \dots, n$$

имеют порядок ε . Для доказательства этого утверждения, достаточно к этим интегралам применить интегрирование по частям.

Аналогичное утверждение верно для интегралов

$$J_{2j}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t \exp \frac{1}{2\varepsilon} \left(\operatorname{Re} F_{2j}(t) - \operatorname{Re} F_{2j}(\tau) \right) d\tau, j = 1, \dots, n.$$

Для $z_{11}(t, \varepsilon)$ получим оценку

$$|z_{11}| \leq M_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_5, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6. \end{cases}$$

При оценке $z_{11}(t, \varepsilon)$ на (K_n) применяется метод Лапласа, а на (K_1) метод стационарной фазы.

Для $z_{2j-1}(t, \varepsilon)$ ($j = 2, \dots, n$) имеем оценки

$$|z_{2j-1}| \leq M_1 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_0.$$

В рассматриваемом случае $\forall t \in \mathcal{D}_0$ ($F'_{2j-1}(t) \neq 0$), тогда интегралы

$$\int_{t_0}^t \exp \frac{1}{2\varepsilon} \left(F_{1j}(t) - F_{1j}(\tau) \right) d\tau$$

имеют порядок ε . Для этого к этим интегралам, достаточно применить интегрирование по частям и учесть лемму 3.2.1.

$z_{21}(t, \varepsilon)$, $z_{2j-1}(t, \varepsilon)$ имеют оценки

$$|z_{21}| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_5, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_5 \cup \mathcal{D}_6. \end{cases}$$

Итого

$$\|z_1(t, \varepsilon)\| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \left(\bigcup_{k=3}^5 (\mathcal{D}_k \cup \bar{\mathcal{D}}_k) \right) \cup \mathcal{D}_6. \end{cases}$$

Для последующих приближений получается аналогичная оценка

$$\|z_m(t, \varepsilon)\| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \left(\bigcup_{k=3}^5 (\mathcal{D}_k \cup \bar{\mathcal{D}}_k) \right) \cup \mathcal{D}_6. \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Для доказательства равномерной сходимости $\{z_m(t, \varepsilon)\}$ применяется признак Вейерштрасса, т.е. проводится оценка

$$\|z_m - z_{m-1}\| \leq (M_2 \sqrt{\varepsilon})^m, m = 1, 2, \dots$$

Из доказанной оценки вытекает равномерная сходимость $\{z_m(t, \varepsilon)\}$ к некоторой функции $z(t, \varepsilon)$, которая является решением (4.2.3).

Для этого решения справедлива оценка, согласно (4.2.5)

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in (\cup_{k=3}^5 (\mathcal{D}_k \cup \bar{\mathcal{D}}_k)). \end{cases} \quad (4.2.7)$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 4.2.1. Пусть рассматривается задача (4.2.1)-(4.2.2). Тогда существует область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и решение задачи (4.2.1)-(4.2.2) $z(t, \varepsilon)$, определенное в $\mathcal{D}_0$ и для этого решения справедлива оценка (4.2.7).

Согласно проведенных преобразований из (4.2.7) вытекает оценка:

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in (\cup_{k=3}^5 (\mathcal{D}_k \cup \bar{\mathcal{D}}_k)). \end{cases} \quad (4.2.8)$$

Рассматривая (4.2.8) на действительной оси получим оценку

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t_0 \leq t_1 < \alpha_1 - \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon}, & \alpha_1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t_1 \leq \alpha_1. \end{cases} \quad (4.2.9)$$

Следствие 4.2.1. Из (4.2.9) вытекает, что решение задачи (2.1.1)-(2.1.2)-(2.1.3) задерживается около возникшего неустойчивого положения равновесия на отрезке $[0; \alpha_1]$.

§4.3. Задержка решения для случая СЗ

В (2.1.1) введем новые неизвестные функции (далее для удобства, аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$x_1 - y = u_1, \quad x_2 = u_2, \quad x_3 - y = u_3$$

и получим систему

$$\begin{aligned} \varepsilon u_1' &= t u_1 - \alpha_1 u_2 + V^2(u_1, u_2, u_3) u_1 + \varepsilon, \\ \varepsilon u_2' &= \alpha_1 u_1 + t u_2 + V^2(u_1, u_2, u_3) u_2, \\ \varepsilon u_3' &= (t - \alpha_2) u_3 + V^2(u_1, u_2, u_3) u_3 + \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

В (4.3.1), второе уравнение умножим на $(\pm i)$, затем, сложив первое уравнение со вторым, получим

$$\begin{aligned}\varepsilon z_1' &= (t + i\alpha_1)z_1 + V^2(z_1, z_2, z_3) z_1 + \varepsilon, \\ \varepsilon z_2' &= (t - i\alpha_1)z_2 + V^2(z_1, z_2, z_3) z_2 + \varepsilon,\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon z_3' &= (t - \alpha_2)z_3 + V^2(z_1, z_2, z_3) z_3 + \varepsilon, \\ z_1(t_0, \varepsilon) &= z_1^0, z_2(t_0, \varepsilon) = z_2^0, z_3(t_0, \varepsilon) = z_3^0,\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

где $z_1 = u_1 + iu_2$, $z_2 = u_1 - iu_2$, $z_3 = u_3$, $V(z_1, z_2, z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_3^2$.

Задачи (4.3.2)-(4.3.3) заменим следующим

$$\begin{aligned}z_1 &= z_1^0 \exp \frac{F_1(t) - F_1(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (\varepsilon + V^2 z_1) \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau, \\ z_2 &= z_2^0 \exp \frac{F_2(t) - F_2(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (\varepsilon + V^2 z_2) \exp \frac{F_2(t) - F_2(\tau)}{2\varepsilon} d\tau, \\ z_3 &= z_3^0 \exp \frac{F_3(t) - F_3(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (\varepsilon + V^2 z_3) \exp \frac{F_3(t) - F_3(\tau)}{2\varepsilon} d\tau,\end{aligned}\tag{4.3.4}$$

где $F_1(t) = (t + i\alpha_1)^2$, $F_2(t) = (t - i\alpha_1)^2$, $F_3(t) = (t - \alpha_2)^2$.

Далее будем считать

$$|z_j^0| \leq M\varepsilon, j = 1, 2, 3.$$

Асимптотическое поведение решения уравнения (4.3.4)

Систему уравнений (4.3.4) будем рассматривать в $\mathcal{D}_0$ (§3.2, П 3.2.3). К (4.3.4) применим метод последовательных приближений. Последовательные приближения определим следующим образом

$$z_{jm} = z_j^0 \exp \frac{F_j(t) - F_j(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (\varepsilon + V_{m-1}^2 z_{jm-1}) \exp \frac{F_j(t) - F_j(\tau)}{2\varepsilon} d\tau,\tag{4.3.5}$$

$$z_{j0} \equiv 0, j = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, \dots$$

где $V_{m-1} = z_{1m-1} \cdot z_{2m-1} + z_{3m-1}^2$.

Путь интегрирования для z_{1m} , z_{3m} тот же, что для $ReF_1(t)$, $ReF_3(t)$ определенный в §3.2, П 3.2.3.

Пути интегрирования для z_{2m} выбираются симметричными, к путям определенными для z_{1m} .

Теперь приступим к оценке последовательных приближений (4.3.5).

Так как, функции $ReF_1(t)$ и $ReF_2(t)$ в симметричных точках принимают равные значения, то z_{1m} и z_{2m} в симметричных областях имеют одинаковые оценки. Следовательно, достаточно оценить z_{1m} .

Оценим первые приближения.

Сначала рассмотрим случай $t \in \mathcal{D}_{01} \cup \mathcal{D}_{03} \cup \mathcal{D}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03} \cup \bar{\mathcal{D}}_{04}$.

Имеем

$$z_{11} = z_1^0 \exp \frac{F_1(t) - F_1(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau \quad (4.3.6)$$

По выбранным путям функция $ReF_1(t)$ убывает. Действительно уравнение первой части пути (K_2) можно представить в виде $\beta t_1 + t_2 + \alpha_1 = 0$. Отсюда получим $t_2 + \alpha_1 = -\beta t_1$.

$$ReF_1(t) = t_1^2 - (t_2 + \alpha_1)^2 = t_1^2(1 - \beta^2).$$

Отсюда $(ReF_1(t))'_{t_1} = 2t_1(1 - \beta^2)$.

По условию $0 < \beta < 1$, тогда $ReF_1(t)$ убывает при $t_0 \leq t_1 \leq 0$, причем $(ReF_1(t))'_{t_1}(t_1 = 0) = 0$. Уравнение второй части имеет вид

$$t_1 - t_2 + \tilde{q} = 0 \quad (-\alpha_1 + \sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{q} \leq \alpha_1).$$

Отсюда определим t_2 . Имеем $t_2 = t_1 + \tilde{q}$.

Тогда

$$ReF_1(t) = t_1^2 - (t_1 + \tilde{q} + \alpha_1)^2.$$

Таким образом

$$(ReF_1(t))'_{t_1} = -2(\tilde{q} + \alpha_1).$$

По определению $\sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{q} + \alpha_1 \leq 2\alpha_1$, тогда $ReF_1(t)$ убывает по выбранному пути. Так как при движении t по выбранным путям меняется асимптотический характер функции z_{11} , рассмотрим следующие случаи:

$$1.1. t \in \mathcal{D}_{01} \cup \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03}; \quad 1.2. t \in \mathcal{D}_{04}; \quad 1.3. t \in \mathcal{D}_{03}.$$

Пусть 1.1. $t \in \mathcal{D}_{01} \cup \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03}$. В этом случае из (9) имеем

$$\begin{aligned}
z_{11} = & z_1^0 \exp \frac{F_1(t) - F_1(t_0)}{2\varepsilon} + \int_{t_0}^{\tilde{t}} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau + \\
& + \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau. \tag{4.3.7}
\end{aligned}$$

(по K_2)

(по $(\mathcal{P}_1)$)

Подставляя уравнения путей интегрирования в (4.3.7), затем переходя к модулю, получим

$$\begin{aligned}
|z_{11}| \leq & |z_1^0| \exp \frac{\operatorname{Re} F_1(t) - \operatorname{Re} F_1(t_0)}{2\varepsilon} + M_1 \int_{t_0}^{\tilde{t}} \exp \frac{\operatorname{Re} F_1(t) - (1-\beta^2)\tau_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1 + \\
& + M_1 \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \exp \frac{t_1^2 - (t_1 + \tilde{q} + \alpha_1)^2 - \tau_1^2 - (\tau_1 + \tilde{q} + \alpha_1)^2}{2\varepsilon} d\tau_1.
\end{aligned}$$

В полученном соотношении, первый интеграл, проинтегрировав по частям, а второй вычислив, получим

$$|z_{11}| \leq M_1 \varepsilon, \quad t \in \mathcal{D}_{01} \cup \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03} \tag{4.3.8}$$

При получении этой оценки надо учесть, что по выбранным путям интегрирования $\operatorname{Re} F_1(t)$ убывает. Следовательно $\operatorname{Re} F_1(t) - \operatorname{Re} F_1(t_0) \leq 0$, $|z_1^0| = O(\varepsilon)$.

3.2. $t \in \mathcal{D}_{04}$. Рассмотрим (4.3.8). К первому интегралу J_{11} применим метод Лапласа, тогда

$$J_{11} \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}.$$

Вычислим второй интеграл J_{12}

$$\begin{aligned}
J_{12} = & \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \exp \frac{t_1^2 - (t_1 + \tilde{q} + \alpha_1)^2 + (\tilde{q} + \alpha_1)(2\tau_1 + \tilde{q} + \alpha_1)}{2\varepsilon} d\tau_1 = \\
= & \frac{2\varepsilon}{\tilde{q} + \alpha_1} \left[1 - e^{\frac{-(\tilde{q} + \alpha_1)(t_1 - \tilde{t}_1)}{\varepsilon}} \right].
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая $\sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{q} \leq 2\alpha_1$, получим

$$J_{12} \leq 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Итого

$$|z_{11}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}, \quad t \in \mathcal{D}_{04} \tag{4.3.9}$$

3.3. $t \in \mathcal{D}_{03}$. Тогда

$$|z_{11}| \leq O(\varepsilon) + M_1 \int_{t_0}^{-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\beta}} \exp \frac{ReF_1(t) - (1-\beta^2)\tau_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1 + \\ + M_1 \int_{-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\beta}}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{ReF_1(t) - (1-\beta^2)\tau_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1 + M_1 \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \exp \frac{ReF_1(t) - ReF_1(\tau_1)}{2\varepsilon} d\tau_1.$$

Применяя метод Лапласа к

$$J_{21} = \int_{t_0}^{-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\beta}} \exp \frac{ReF_1(t) - (1-\beta^2)\tau_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1$$

убеждаемся, что

$$J_{21} \leq O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Действительно, функция

$$\varphi(\tau_1) = -(1-\beta^2)\tau_1^2$$

убывает на отрезке $\left[-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\beta}; \tilde{t}_1\right]$ и наибольшее значение достигается при $\tau_1 = \tilde{t}_1$ и $\varphi'(\tau_1) = -2(1-\beta^2)\tau_1 > 0$. Тогда

$$J_{21} \sim \frac{\varepsilon e^{\frac{-(1-\beta^2)\tilde{t}_1^2}{2\varepsilon}}}{-(1-\beta^2)\tilde{t}_1^2}.$$

Поскольку $\tilde{t}_1 \leq -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\beta}$, то

$$J_{21} \leq O(\sqrt{\varepsilon}).$$

$$J_{22} = \int_{-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\beta}}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{ReF_1(t) - (1-\beta^2)\tau_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1 \leq \tilde{t}_1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\beta} \left\{ -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\beta} \leq \tilde{t}_1 \leq 0 \right\} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\beta}.$$

Учитывая полученные оценки, имеем

$$|z_{11}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}, t \in \mathcal{D}_{03} \quad (4.3.10)$$

Теперь рассмотрим следующие случаи:

2.1. $t \in \mathcal{D}_{05} \cup \mathcal{D}_{06}$; 2.2. $t \in \mathcal{D}_{02} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05}$.

Пусть 2.1. $t \in \mathcal{D}_{05} \cup \mathcal{D}_{06}$. Используя методику, изложенную в [49], функцию z_{11} преобразуем следующим образом

$$z_{11} = z_1^0 \exp \frac{F_1(t) - F_1(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^0 \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau +$$

по K_2

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\tilde{t}_1} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau + \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau = \\
& = \exp \frac{F_1(t) - F_1(-i\alpha_1)}{2\varepsilon} \left[z_1^0 \frac{F_1(-i\alpha_1) - F_1(t_0)}{2\varepsilon} + \int_{t_0}^0 \exp \frac{F_1(-i\alpha_1) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau \right] + \\
& + \int_0^{\tilde{t}_1} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau + \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau
\end{aligned}$$

В полученном выражении для z_{11} , выражение, содержащееся в скобке: [...], дает значение $z_{11}(t, \varepsilon)$ при $t = -i\alpha_1$ (замена начального условия). Учитывая сказанное, получим

$$\begin{aligned}
z_{11} &= z_{11}(-i\alpha_1, \varepsilon) \exp \frac{F_1(t) - F_1(-i\alpha_1)}{2\varepsilon} + \\
&+ \int_0^{\tilde{t}_1} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau + \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

В (4.3.11), согласно выбранных путей интегрирования,

$$Re(F_1(t) - F_1(-i\alpha_1)) \leq 0,$$

а во втором интеграле -

$$ReF_1(\tau) = 0 \text{ и } F_1(\tau) = iImF_1(\tau),$$

а в третьем интеграле -

$$Re(F_1(t) - F_1(\tau)) \leq 0.$$

Для асимптотического представления z_{11} к первому интегралу, в (4.3.11), применим метод стационарной фазы, а второй интеграл вычисляется непосредственно, т.е.

$$\begin{aligned}
J_{31} &= \int_0^{\tilde{t}_1} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau \left(\begin{array}{c} \text{уравнение пути } \tau_1 - \tau_2 - 1 = 0 \\ \text{и } F_1(t) = 0 \end{array} \right) = \\
&= \int_0^{\tilde{t}_1} \exp \frac{F_1(t) - 2i\tau_1^2}{2\varepsilon} (1 + i) d\tau_1 = \exp \frac{F_1(t)}{2\varepsilon} \left[\left(\frac{\pi}{4} \varepsilon \right)^2 \exp \frac{-i\pi/4}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \right].
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$|J_{31}| \leq O(\sqrt{\varepsilon}) \exp \frac{F_1(t)}{2\varepsilon}. \tag{4.3.12}$$

В рассматриваемом случае $ReF_1(\tau) \leq 0$. Тогда

$$|J_{31}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}.$$

$$\begin{aligned}
|J_{32}| &\leq \left| \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau \right| \left(\begin{array}{c} \text{уравнение пути } \tau_1 + \tau_2 - \tilde{q} = 0 \\ -\alpha_1 + \sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{q} \leq \alpha_1 \end{array} \right) \leq \\
&\leq O(1) \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \exp \frac{ReF_1(t) - ReF_1(\tau_1)}{2\varepsilon} d\tau_1 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \exp \frac{ReF_1(t) - (\alpha_1 + \tilde{q})(2\tau_1 - 2\alpha_1 - \tilde{q})}{2\varepsilon} d\tau_1 = \\
&= O\left(\frac{\varepsilon}{\alpha_1 + \tilde{q}}\right) \left[1 - e^{\frac{2(\alpha_1 + \tilde{q})(t_1 - \tilde{t}_1)}{\varepsilon}}\right] \leq O\left(\frac{\varepsilon}{\alpha_1 + \tilde{q}}\right)
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Теперь, учтем $\sqrt{\varepsilon} \leq \alpha_1 + \tilde{q} \leq 2\alpha_1$. Тогда, для рассматриваемого случая получим

$$|\mathcal{I}_{32}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}.$$

С учетом проведенных вычислений имеем

$$|z_{11}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}, t \in \mathcal{D}_{05} \cup \mathcal{D}_{06} \tag{4.3.14}$$

2.2. Пусть $t \in \mathcal{D}_{02} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05}$. Для этого случая справедлива (4.3.12). При этом

$$|\mathcal{I}_{31}| \leq M_1 \exp \frac{ReF_1(t)}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} = M_1 \exp \frac{t_1^2 - (t_2 + \alpha_1)^2}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon}.$$

Здесь, надо учесть в точке B_6

$$t_1^2 - (t_2 + \alpha_1)^2 = -\sqrt{\varepsilon}(\alpha_1 - \alpha_3).$$

Следовательно на границе $B_6 \bar{B}_7$

$$|\mathcal{I}_{31}| \leq \varepsilon^n, n \in N.$$

Из (4.3.13) имеем $(\alpha_1 + \tilde{q} \geq \alpha_1 - \alpha_3 > 0)$

$$|\mathcal{I}_{32}| \leq M_1 \varepsilon.$$

Итого

$$|z_{11}| \leq M_1 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_{02} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05}. \tag{4.3.15}$$

Подводя итог, можем написать оценку

$$|z_{11}| \leq M_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_{01} \cup \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03} \cup \mathcal{D}_{02} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05}, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \mathcal{D}_{04} \cup \mathcal{D}_{03} \cup \mathcal{D}_{05} \cup \mathcal{D}_{06} \end{cases} \tag{4.3.16}$$

Согласно, выбранного пути интегрирования имеем

$$|z_{21}| \leq M_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_{01} \cup \mathcal{D}_{04} \cup \mathcal{D}_{03} \cup \mathcal{D}_{02} \cup \mathcal{D}_{05} \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05} \cup \mathcal{D}_{06} \end{cases} \tag{4.3.17}$$

Теперь проведем оценку z_{31} . Сначала рассмотрим $t \in \mathcal{D}_0^1$.

$$z_{31} = z_3^0 \exp \frac{F_3(t) - F_3(t_0)}{2\varepsilon} + \int_{t_0}^t \exp \frac{F_3(t) - F_3(\tau)}{2\varepsilon} d\tau \tag{4.3.18}$$

Применяя интегрирование по частям получим

$$z_{31} = z_3^0 \exp \frac{F_3(t) - F_3(t_0)}{2\varepsilon} - \varepsilon \int_{t_0}^t \frac{1}{F_3'(\tau)} d \exp \frac{F_3(t) - F_3(\tau)}{2\varepsilon}.$$

По выбранным путям интегрирования $ReF_3(t)$ строго убывает, а функция $F_3(t)$ не имеет особенностей в $\mathcal{D}_0$ ($\forall t \in \mathcal{D}_0 (F_3'(t) \neq 0)$).

Таким образом

$$|z_{31}| \leq |z_3^0| +$$

$$+O(\varepsilon) \left| \frac{1}{F_3'(t)} - \frac{1}{F_3(t_0)} \exp \frac{F_3(t) - F_3(t_0)}{2\varepsilon} + \int_{t_0}^t \frac{1}{(F_3'(\tau))^2} \exp \frac{F_3(t) - F_3(\tau)}{2\varepsilon} d\tau \right| \leq M_1 \varepsilon,$$

$$|z_{31}| \leq M_1 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_0^1.$$

Аналогичная оценка имеет место для $t \in \mathcal{D}_0^2$. Таким образом

$$|z_{31}| \leq M_1 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0^1 \cup \mathcal{D}_0^2.$$

Оценка последующих приближений.

Сначала проведем оценку $z_{1m}(t, \varepsilon) (m = 2, \dots)$

Имеем

$$z_{1m} = z_{11} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t V_{m-1}^2 z_{1m-1} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau, m = 2, 3, \dots \quad (4.3.19)$$

Оценка z_{1m} проводится также как и для z_{11} .

Сначала оценим z_{12} .

Пологая $m = 2$ в (4.3.19), имеем

$$z_{12} = z_{11} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t V_1^2 z_{11} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau \quad (4.3.20)$$

где

$$V_1 = z_{11} \cdot z_{21} + z_1^2.$$

Как и в случае z_{11} , рассмотрим случаи:

$$1.1. t \in \mathcal{D}_{01} \cup \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03};$$

$$1.2. t \in \mathcal{D}_{04};$$

$$1.3. t \in \mathcal{D}_{03};$$

$$2.1. t \in \mathcal{D}_{05} \cup \mathcal{D}_{06};$$

$$2.2. t \in \mathcal{D}_{02} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05}.$$

Если рассматривается случай 1.1, то в (4.3.20) (учитывая выбранные пути интегрирования), переходя к модулю, получим

$$|z_{12}| \leq |z_{11}| + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{t_0}^{\tilde{t}} V_1^2 z_{11} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{\tilde{t}}^t V_1^2 z_{11} \exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{2\varepsilon} d\tau \right| \leq \\
& \leq |z_{11}| + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\tilde{t}} |V_1^2| |z_{11}| \exp \frac{\operatorname{Re}(F_1(t) - F_1(\tau))}{2\varepsilon} |d\tau| + \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tilde{t}}^t |V_1^2| |z_{11}| \exp \frac{\operatorname{Re}(F_1(t) - F_1(\tau))}{2\varepsilon} |d\tau|.
\end{aligned}$$

Теперь учтем

$$|V_1^2| |z_{11}| = O(\varepsilon^3)$$

в обоих интегралах, а $|z_{11}| = O(\varepsilon)$, $\operatorname{Re}(F_1(t) - F_1(\tau)) \leq 0$.

Тогда

$$|z_{12}| \leq M_1 \varepsilon + M_2 \varepsilon^2 = \varepsilon(M_1 + M_2 \varepsilon) \leq M_2 \varepsilon.$$

при условии $M_1 + M_2 \varepsilon \leq M_2 \vee \varepsilon \leq \frac{M_2 - M_1}{M_2}$ ($M_2 > M_1$).

$$|z_{12}| \leq M_2 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_{01} \cup \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03}. \quad (4.3.21)$$

1.1. $t \in \mathcal{D}_{04}$. Тогда

$$\begin{aligned}
|z_{12}| & \leq |z_{11}| + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{t_0}^{\tilde{t}} |V_1^2| |z_{11}| \exp \frac{\operatorname{Re}(F_1(t) - F_1(\tau))}{2\varepsilon} |d\tau| \right| + \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{\tilde{t}}^t |V_1^2| |z_{11}| \exp \frac{\operatorname{Re}(F_1(t) - F_1(\tau))}{2\varepsilon} |d\tau| \right|
\end{aligned}$$

Для этого случая

$$|V_1^2| \leq |z_{11}| |z_{21}| + |z_{31}|^2 \leq M_1^2 (\varepsilon \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon)^2,$$

$$|z_{11}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon}, \operatorname{Re}(F_1(t) - F_1(\tau)) \leq 0.$$

Следовательно

$$|z_{12}| \leq M_1 \sqrt{\varepsilon} + M_3 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \leq M_2 \sqrt{\varepsilon} \left(\sqrt{\varepsilon} \leq \frac{M_3 - M_1}{M_2} (M_3 > M_1) \right),$$

$$|z_{12}| \leq M_2 \sqrt{\varepsilon}, t \in \mathcal{D}_{04}. \quad (4.3.22)$$

1.2. $t \in \mathcal{D}_{03}$. Аналогично случаю 1.2. получим оценку

$$|z_{12}| \leq M_2 \sqrt{\varepsilon}, t \in \mathcal{D}_{03}. \quad (4.3.23)$$

2.1. $t \in \mathcal{D}_{05} \cup \mathcal{D}_{06}$. Справедлива оценка как и в 1.2.

$$|z_{12}| \leq M_2 \sqrt{\varepsilon} \quad (4.3.24)$$

2.2. $t \in \mathcal{D}_{02} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05}$. Имеем

$$|z_{12}| \leq M_2 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_{02} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05}. \quad (4.3.25)$$

Итого получена оценка

$$|z_{12}| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_{01} \cup \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05} \cup \mathcal{D}_{02} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03} \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \mathcal{D}_{04} \cup \mathcal{D}_{03} \cup \mathcal{D}_{05} \cup \mathcal{D}_{06} \end{cases}$$

Аналогично

$$|z_{21}| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_{01} \cup \mathcal{D}_{04} \cup \mathcal{D}_{03} \cup \mathcal{D}_{02} \cup \mathcal{D}_{05} \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05} \cup \mathcal{D}_{06} \end{cases} \quad (4.3.26)$$

Для z_{31} имеем

$$|z_{31}| \leq M_2 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_0. \quad (4.3.27)$$

Продолжая, по индукции, получим

$$\begin{aligned} |z_{1m}| &\leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_{01} \cup \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05} \cup \mathcal{D}_{02} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03} \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \mathcal{D}_{04} \cup \mathcal{D}_{03} \cup \mathcal{D}_{05} \cup \mathcal{D}_{06} \end{cases} \\ |z_{2m}| &\leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_{01} \cup \mathcal{D}_{04} \cup \mathcal{D}_{05} \cup \mathcal{D}_{02} \cup \mathcal{D}_{03}, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05} \cup \mathcal{D}_{06} \end{cases}, \\ |z_{3m}| &\leq M_2 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_0. \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Теперь докажем сходимость последовательных приближений. Для этого оценим разность

$$\|z_m - z_{m-1}\|.$$

Оценку проведем покомпонентно. Пути интегрирования остаются прежние.

На оценку, основное влияние оказывает выражение

$$V_{m-1}^2 z_{jm-1} - V_{m-2}^2 z_{jm-2}.$$

Это выражение преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned} &V_{m-1}^2 z_{jm-1} - V_{m-2}^2 z_{jm-2} = \\ &(z_{1m-1} \cdot z_{2m-1} + z_{3m-1}^2)^2 z_{jm-1} - (z_{1m-1} \cdot z_{2m-1} + z_{3m-1}^2)^2 z_{jm-2} + \\ &+ (z_{1m-1} \cdot z_{2m-1} + z_{3m-1}^2)^2 z_{jm-2} - (z_{1m-2} \cdot z_{2m-2} + z_{3m-2}^2)^2 z_{jm-2} = \\ &= (z_{1m-1} \cdot z_{2m-1} + z_{3m-1}^2)^2 (z_{jm-1} - z_{jm-2}) + \\ &+ ((z_{1m-1} \cdot z_{2m-1} + z_{3m-1}^2)^2 - (z_{1m-2} \cdot z_{2m-2} + z_{3m-2}^2)^2) z_{jm-2} = \\ &= (z_{1m-1} \cdot z_{2m-1} + z_{3m-1}^2)^2 (z_{jm-1} - z_{jm-2}) + \\ &+ (z_{1m-1} z_{2m-1} + z_{3m-1}^2 - z_{1m-2} z_{2m-2} - z_{3m-2}^2) \times \\ &\times (z_{1m-1} z_{2m-1} + z_{3m-1}^2 + z_{1m-2} z_{2m-2} + z_{3m-2}^2) z_{jm-2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (z_{1\,m-1} \cdot z_{2\,m-1} + z_{3\,m-1}^2)(z_{j\,m-1} - z_{j\,m-2}) + \\
&+ (z_{1\,m-1}z_{2\,m-1} - z_{1\,m-2}z_{2\,m-1} + z_{1\,m-2}z_{2\,m-1} - z_{1\,m-2}z_{2\,m-2} + z_{3\,m-1}^2 - z_{3\,m-2}^2) \times \\
&\times (z_{1\,m-1}z_{2\,m-1} + z_{3\,m-1}^2 + z_{1\,m-2}z_{2\,m-2} + z_{3\,m-2}^2)z_{j\,m-2} = \\
&= (z_{1\,m-1}z_{2\,m-1} + z_{3\,m-1}^2)(z_{j\,m-1} - z_{j\,m-2}) + \\
&+ [(z_{1\,m-1} - z_{1\,m-2})z_{2\,m-1} + (z_{2\,m-1} - z_{2\,m-2})z_{1\,m-2} + (z_{3\,m-1}^2 - z_{3\,m-2}^2)] \times \\
&\times (z_{1\,m-1}z_{2\,m-1} + z_{3\,m-1}^2 + z_{1\,m-2}z_{2\,m-2} + z_{3\,m-2}^2)z_{j\,m-2}.
\end{aligned}$$

Таким образом для $|z_{j\,m-1} - z_{j\,m-2}|$ получим

$$\begin{aligned}
|z_{j\,m} - z_{j\,m-1}| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{t_0}^t |V_{m-1}^2 z_{j\,m-1} - V_{m-2}^2 z_{j\,m-1}| \exp \frac{\operatorname{Re}(F_j(t) - F_j(\tau))}{2\varepsilon} |d\tau| \right| \leq \\
&\leq \int_{t_0}^t [(|z_{1\,m-1}| |z_{2\,m-1}| + |z_{3\,m-1}^2|)^2 |z_{j\,m-1} - z_{j\,m-2}| + \\
&+ (|z_{1\,m-1} - z_{1\,m-2}| |z_{2\,m-1}| + |z_{2\,m-1} - z_{2\,m-2}| |z_{1\,m-2}| + |z_{3\,m-1}^2 - z_{3\,m-2}^2|) \times \\
&\times (|z_{1\,m-1}z_{2\,m-1}| + |z_{3\,m-1}^2| + |z_{1\,m-2}z_{2\,m-2}| + |z_{3\,m-2}^2|) \times \\
&\times |z_{j\,m-2}|] \times \exp \frac{\operatorname{Re}(F_1(t) - F_1(\tau))}{2\varepsilon} |d\tau|.
\end{aligned}$$

Пусть $j = 1$ и $m = 2$, тогда $\forall t \in \mathcal{D}_0$ возьмем

$$|z_{12}| \leq M_2 \sqrt{\varepsilon}, |z_{21}| \leq M_2 \sqrt{\varepsilon}, |z_{31}| \leq M_2 \varepsilon.$$

Получим

$$|z_{12} - z_{11}| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{t_0}^t [M_2^2 \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} + 9M_2^2 \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon}] |d\tau| \right| \leq 10M_2^2 \varepsilon^2 \leq M_2 M_3 \varepsilon \sqrt{\varepsilon};$$

Аналогично

$$|z_{22} - z_{21}| \leq M_2 M_3 \varepsilon \sqrt{\varepsilon};$$

$$|z_{32} - z_{31}| \leq M_2 M_3 \varepsilon \sqrt{\varepsilon}.$$

Продолжая оценки, получим

$$\|z_m - z_{m-1}\| \leq M_2 \sqrt{\varepsilon} (M_3 \varepsilon)^{m-1}. \quad (4.3.29)$$

Из (4.3.29) следует равномерная сходимость $\{z_m\}$, $\forall t \in \mathcal{D}_0$, к некоторой функции $z(t, \varepsilon)$, которая является решением (4.3.4). Если учесть (4.3.28), для этого решения справедлива оценка

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, t \in \mathcal{D}_{01} \cup \mathcal{D}_{02}, \\ \sqrt{\varepsilon}, t \in \mathcal{D}_{03} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03} \cup \mathcal{D}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \mathcal{D}_{05} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05} \cup \mathcal{D}_{06}. \end{cases} \quad (4.3.30)$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 4.3.1. Пусть рассматривается задача (4.3.2)-(4.3.3) ($0 < \alpha_1 < \alpha_2$). Тогда существует область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и решение задачи $z(t, \varepsilon)$ (4.3.2)-(4.3.3), определенное в $\mathcal{D}_0$ и для этого решения справедлива оценка (4.3.30).

Согласно проведенных преобразований из (4.3.30) вытекает оценка

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq M_3 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_{01} \cup \mathcal{D}_{02}, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \mathcal{D}_{03} \cup \bar{\mathcal{D}}_{03} \cup \mathcal{D}_{04} \cup \bar{\mathcal{D}}_{04} \cup \mathcal{D}_{05} \cup \bar{\mathcal{D}}_{05} \cup \mathcal{D}_{06}. \end{cases} \quad (4.3.31)$$

Если (4.3.31) рассмотреть на действительной оси, то получим

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq M_3 \begin{cases} \varepsilon, & t_0 \leq t \leq \alpha_1 - \sqrt{\varepsilon}; \\ \sqrt{\varepsilon}, & \alpha_1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq \alpha_1. \end{cases} \quad (4.3.32)$$

Следствие 4.3.1. Из (4.3.32) вытекает, что решение задачи (2.1.1)-(2.1.2)-(2.1.3) задерживается около возникшего неустойчивого положения равновесия на отрезке $[0; \alpha_1]$.

Теперь рассмотрим случай 2. $0 < \alpha_2 < \alpha_1$.

Как и в первом случае, рассмотрим (4.3.4) и последовательные приближения (4.3.5).

Оценим и докажем равномерную сходимость (4.3.5), согласно выбранных путей интегрирования.

В рассматриваемом случае функции $F_{1,2}(t)$ не имеют нулей в $\mathcal{D}_0$, и это позволяет, при оценке $z_{j1}(t, \varepsilon)$ ($j = 1, 2$), применить интегрирование по частям к интегралам

$$\int_{t_0}^t \exp \frac{F_j(t) - F_j(\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$

Итого получается оценки

$$|z_{j1}| \leq M_3 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_0.$$

Некоторую особенность имеет оценка $z_{31}(t, \varepsilon)$. Учитывая пути интегрирования, можем записать

$$z_{31} = z_3^0 \exp \frac{F_3(t) - F_3(t_0)}{2\varepsilon} + \int_{t_0}^{\tilde{t}} \exp \frac{F_3(t) - F_3(\tau)}{2\varepsilon} d\tau +$$

по $((K_2) \vee (\bar{K}_2))$

$$+ \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{F_3(t) - F_3(\tau)}{2\varepsilon} d\tau.$$

по $((K_3) \vee (\bar{K}_3))$

В полученном равенстве, применяя интегрирование по частям к первому интегралу, убеждаемся, что он имеет порядок ε .

Возьмем второй интеграл и перейдем к модулю

$$|J| \leq O(1) \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \exp \frac{(t_1 - \alpha_2)^2 - (\tau_1 - \alpha_2)^2}{2\varepsilon} d\tau_1.$$

К полученному интегралу применяя метод Лапласа, при $\tilde{t}_1 \leq \tau_1 \leq \alpha_2 - \sqrt{\varepsilon}$, получим

$$|J| \leq O(1) \frac{\varepsilon}{\alpha_2 - t_1}.$$

Отсюда, если $\tilde{t}_1 \leq \tau_1 \leq q$, то

$$|J| \leq O(\varepsilon).$$

Тогда

$$|z_{31}| \leq M_3 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_0^1.$$

Если $q \leq \tau_1 \leq \alpha_2 - \sqrt{\varepsilon}$, то

$$|J| \leq O(\sqrt{\varepsilon})$$

и

$$|z_{31}| \leq M_3 \sqrt{\varepsilon}, t \in \mathcal{D}_0^2.$$

Если $t \in \mathcal{D}_0^3$, то

$$\begin{aligned} |J| &\leq O(1) \times \left(\int_{\tilde{t}_1}^q \exp \frac{(t_1 - \alpha_2)^2 - (\tau_1 - \alpha_2)^2}{2\varepsilon} d\tau_1 + \right. \\ &+ \int_q^{\alpha_2 - \sqrt{\varepsilon}} \exp \frac{(t_1 - \alpha_2)^2 - (\tau_1 - \alpha_2)^2}{2\varepsilon} d\tau_1 + \\ &+ \left. \int_{\alpha_2 - \sqrt{\varepsilon}}^{t_1} \exp \frac{(t_1 - \alpha_2)^2 - (\tau_1 - \alpha_2)^2}{2\varepsilon} d\tau_1 \right) \leq \\ &\leq O(1) (O(\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}) + (t_1 - \alpha_2 + \sqrt{\varepsilon})) \leq O(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Согласно проведенных оценок, имеем

$$|z_{31}| \leq M_3 \sqrt{\varepsilon}, t \in \mathcal{D}_0^2 \cup \mathcal{D}_0^3.$$

Для последующих приближений сохраняются аналогичные оценки, т.е.

$$|z_{jm}| \leq M_3 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_0 \quad (4.3.33)$$

$$|z_{3m}| \leq M_3 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_0^1, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \mathcal{D}_0^2 \cup \mathcal{D}_0^3, m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Равномерная сходимость (4.3.5) доказывается аналогично, к первому случаю и для этого решения, согласно (4.3.33) справедлива оценка

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq M_3 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_0^1, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \mathcal{D}_0^2 \cup \mathcal{D}_0^3. \end{cases} \quad (4.3.34)$$

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 4.3.2. Пусть рассматривается задача (4.3.2)-(4.3.3) ($0 < \alpha_2 < \alpha_1$). Тогда существует область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и решение задачи (4.3.2)-(4.3.3) $z(t, \varepsilon)$, определенное в $\mathcal{D}_0$ и для этого решения справедлива (4.3.34).

Согласно проведенных преобразований из (4.3.34) вытекает оценка

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq M_3 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_0^1, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \mathcal{D}_0^2 \cup \mathcal{D}_0^3. \end{cases} \quad (4.3.35)$$

Если (4.3.35) рассмотреть на действительной оси, то получим

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq M_3 \begin{cases} \varepsilon, & t_0 \leq t \leq \alpha_2 - \sqrt{\varepsilon}, \\ \sqrt{\varepsilon}, & \alpha_2 - \sqrt{\varepsilon} < t \leq \alpha_2 \end{cases} \quad (4.3.36)$$

Следствие 4.3.2. Из (4.3.36) вытекает, что решение задачи (2.1.1)-(2.1.2)-(2.1.3) задерживается около возникшего неустойчивого положения равновесия на отрезке $[0; \alpha_2]$.

§4.4. Задержка решения для случая С4

В (2.1.1) введем новые неизвестные функции

$$\begin{aligned} x_1(t, \varepsilon) - t &= u_1(t, \varepsilon), \quad x_2(t, \varepsilon) = u_2(t, \varepsilon), \\ x_3(t, \varepsilon) - t &= u_3(t, \varepsilon), \quad x_4(t, \varepsilon) = u_1(t, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

$u(t, \varepsilon) = colon(u_1, u_2, u_3, u_4)$, где $u_j(t, \varepsilon)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) – новые неизвестные функции.

Подставляя (4.4.1) в (2.1.1), получим (далее аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$\varepsilon u' = A(t)u + V^2 u - \varepsilon a, \quad (4.4.2)$$

$$u(t_0, \varepsilon) = u^0, \quad (4.4.3)$$

где $a = colon(1, 0, 1, 0)$.

В (4.4.2) первое и третье уравнение умножив на i , затем первое уравнение сложив со вторым, а третье с четвертым, имеем

$$\varepsilon z' = \Lambda(t)z + V^2 z - \varepsilon a_1, \quad (4.4.4)$$

$$z(t_0, \varepsilon) = z^0, \quad (4.4.5)$$

$$|z^0| \leq M_1 \varepsilon.$$

где $z = colon(z_1 = u_1 + iu_2, z_2 = u_1 - iu_2, z_3 = u_3 + iu_4, z_4 = u_3 - iu_4)$,

$\Lambda(t) = diag(t + i, t - i, -(t + i)^2, -(t - i)^2)$, $V = z_1 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_4$,

$a_1 = (1, 1, 1, 1)$.

(4.4.4)-(4.4.5) заменим следующим

$$z = z^0 E(t_0, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (V^2 z - \varepsilon a_1) E(t, \tau, \varepsilon) d\tau, \quad (4.4.6)$$

где $E(t, \tau, \varepsilon) =$

$$= diag \left(\exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon}, \exp \frac{(t-i)^2 - (\tau-i)^2}{2\varepsilon}, \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon}, \exp \frac{-(t-i)^3 + (\tau-i)^3}{3\varepsilon} \right).$$

К (4.4.6) применим метод последовательных приближений, которые определим так

$$z_m = z^0 E(t_0, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (V^2 z_{m-1} - \varepsilon a_1) E(t, \tau, \varepsilon) d\tau, \quad (4.4.7)$$

$$z_0 \equiv 0, m = 1, 2, \dots$$

Теперь, задача состоит в оценке последовательных приближений (4.4.7) и доказательстве их равномерной сходимости. Последовательные приближения рассмотрим в $\mathcal{D}_0$ определенное в в § 3.2, П 3.2.4.

Выбор путей интегрирования

Путь для z_{1m} , z_{3m} выбирается таким же как и для $ReF_1(t)$ ($-ReF_3(t)$) (§3.2, П 3.2.4).

Для z_{2m} путь симметричный к пути z_{1m} , а для z_{4m} такой же, как и для $(-ReF_4(t))$ (§ 3.2, П 3.2.4).

Оценка и доказательство равномерной сходимости последовательных приближений

Оценку последовательных приближений проведем покомпонентно. Оценим

$$z_{11} = z_1^0 \exp \frac{(t+i)^2 - (i+t_0)^2}{2\varepsilon} - \int_{B_1(\text{по } (K_1))}^{\tilde{t}} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau - \int_{\tilde{t}(\text{по } (K_2))}^t \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau. \quad (4.4.8)$$

Сначала рассмотрим случай $t \in \mathcal{D}_1$.

Учитывая уравнение (K_1) , первый интеграл в (4.4.8), представим в виде $(t_0 = t_{01} + it_{02})$

$$\mathcal{J}_1 = \int_{B_1}^{\tilde{t}} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau = \int_{t_{01}}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{(t+i)^2 - \left(1 + \frac{i}{t_0}\right)^2 \tau_1^2}{2\varepsilon} \left(1 + \frac{i}{t_0}\right) d\tau_1.$$

Отсюда переходя к модулю, получим

$$|\mathcal{J}_1| = O(1) \int_{t_{01}}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 - \left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right) \tau_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1.$$

По (K_1) функция $Re(t+i)^2$ строго убывает, следовательно $|\mathcal{J}_1|$ ограничена. Для получения более точной оценки, к интегралу в правой части, применим интегрирование по частям и получим

$$|\mathcal{J}_1| \leq M_1 \varepsilon, \tilde{t} \in (K_1).$$

Теперь рассмотрим интеграл $\mathcal{J}_2 = \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau$. Если учесть выбранный путь интегрирования, то

$$\mathcal{J}_2 = \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{-(t_2+1)^2 + 2it_1(t_2+1) + (\tau_2+1)^2 - 2i\tau_1\tau_2}{2\varepsilon} id\tau_2.$$

Отсюда переходя к модулю, получим

$$|\mathcal{J}_2| \leq \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{-(t_2+1)^2 - (\tau_2+1)^2}{2\varepsilon} d\tau_2.$$

Применяя к интегралу интегрирование по частям, получим

$$|\mathcal{J}_2| \leq M_1 \varepsilon.$$

Согласно полученных оценок, имеем

$$|z_{11}| \leq M_2 \varepsilon, \quad t \in \mathcal{D}_1. \quad (4.4.9)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_2$. Для этого случая также справедливо представление (4.4.8).

Только в этом случае для оценки интеграла $|\mathcal{J}_1|$ надо применить метод Лапласа.

Функция $\varphi(\tau_1) = -\left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right)\tau_1^2$ строго возрастает при $t_0 \leq \tau_1 \leq \tilde{t}_1$ и наибольшее значение принимает при $\tau_1 = \tilde{t}_1$. Тогда

$$|\mathcal{J}_1| = O\left(\frac{\varepsilon}{-\left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right)\tilde{t}_1} \exp \frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 - \left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right)\tilde{t}_1^2}{2\varepsilon}\right).$$

По выбранным путям функция $Re(t+i)^2$ строго убывает, следовательно

$$\exp \frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 - \left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right)\tilde{t}_1^2}{2\varepsilon} \leq 1.$$

Таким образом, $|\mathcal{J}_1| \leq O\left(\frac{\varepsilon}{\tilde{t}_1}\right)$. Если учесть, что $t_0 \leq \tilde{t}_1 \leq -\varepsilon^\lambda$, то

$$|\mathcal{J}_1| \leq M_1 \varepsilon^{1-\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Оценим $\mathcal{J}_2$. Учтем $-(t_2+1)^2 + (\tau_2+1)^2 \leq 2(\tau_2 - t_2)(\tilde{t}_2 + 1)$. Получим

$$|\mathcal{J}_2| \leq \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{(\tilde{t}_2+1)(\tau_2-t_2)}{2\varepsilon} d\tau_2 = \frac{\varepsilon}{\tilde{t}_2+1} \left(1 - e^{\frac{(\tilde{t}_2+1)(\tilde{t}_2-t_2)}{2\varepsilon}}\right).$$

Отсюда учитывая $\tilde{t}_2 + 1 \geq \frac{\varepsilon^\lambda}{\sqrt{3}}$ и $\tilde{t}_2 \leq t_2$, имеем $|\mathcal{J}_2| \leq M_1 \varepsilon^{1-\lambda}$.

Согласно полученных оценок для z_{11} , справедлива оценка

$$|z_{11}| \leq M_2 \varepsilon^{1-\lambda}, \quad t \in \mathcal{D}_2 \quad (4.4.10)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_4$. Для этого случая z_{11} представим в виде

$$\begin{aligned} z_{11} = & z_1^0 \exp \frac{(t+i)^2 - (i+t_0)^2}{2\varepsilon} - \int_{B_1}^{B_4} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau - \\ & - \int_{B_4}^{\tilde{t}} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau - \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

В (4.4.11) первый интеграл обозначим $\mathcal{J}_1$, второй – $\mathcal{J}_2$, третий – $\mathcal{J}_3$. Если учесть оценки, проведенные при $t \in \mathcal{D}_2$, то $|\mathcal{J}_1| \leq M_1 \varepsilon^{1-\lambda}$.

Учитывая выбранный путь, получим

$$J_2 = \left| O(1) \int_{-\varepsilon^\lambda}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{(t+i)^2 - \left(1 + \frac{i}{t_0}\right)^2 \tau_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1 \right| \leq O(1) \int_{-\varepsilon^\lambda}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 - \left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right) \tilde{t}_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1 =$$

$$= O(\tilde{t}_1 + \varepsilon^\lambda) \leq M_1 \varepsilon^\lambda,$$

$$|J_2| \leq M_1 \varepsilon^\lambda.$$

Аналогично

$$|J_3| \leq \left| \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{-(t_2+1)^2 + (\tau_2+1)^2}{2\varepsilon} d\tau_2 \right| \leq M_1 |t_2 - \tilde{t}_2| \leq M_1 \varepsilon^\lambda.$$

$$|J_3| \leq M_1 \varepsilon^\lambda.$$

Таким образом

$$|z_{11}| = O(\varepsilon^{1-\lambda}) + O(\varepsilon^\lambda).$$

Если $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$, то

$$|z_{11}| = O(\varepsilon^\lambda);$$

Если $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$, то

$$|z_{11}| = O(\varepsilon^{1-\lambda}).$$

Сравнивая полученные оценки, можно утверждать, что $\lambda = \frac{1}{2}$ является оптимальным. Учитывая дальнейшие оценки последовательных приближений, возьмем случай $0 < \lambda < \frac{1}{2}$.

Тогда

$$|z_{11}| \leq M_2 \varepsilon^\lambda, \quad t \in \mathcal{D}_4 \quad (4.4.12)$$

Объединив оценки (4.4.11) и (4.4.12), можем написать

$$|z_{11}| \leq M_2 \varepsilon^\lambda, \quad t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_4 \quad (4.4.13)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4$. Имеем

$$z_{11} = z_1^0 \exp \frac{(t+i)^2 - (i-\sqrt{3})^2}{2\varepsilon} - \int_{B_1}^{B_2} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau - \int_{B_2}^{B_5} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau -$$

$$- \int_{B_5}^{\tilde{t}} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau - \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau \quad (4.4.14)$$

Как и в предыдущем случае, интегралы в (4.4.14), по порядку следования обозначим J_1, J_2, J_3, J_4 . Учитывая предыдущие оценки, имеем

$$|J_1| = O(\varepsilon^\lambda), |J_2| = O(\varepsilon^\lambda).$$

$$|J_3| \leq \left| \int_{-1+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{q}}^{\tilde{t}_2} \exp \frac{-(t_2+1)^2 - (\tau_2+1)^2}{2\varepsilon} d\tau_2 \right| = O\left(\frac{1}{\tilde{t}_2+1}\right) = O(\varepsilon^\lambda).$$

$$|J_4| \leq \left| \int_0^{t_1} \exp \frac{t_1^2 - \tau_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1 \right| \leq |t_1| = O(\varepsilon^\lambda).$$

Итого

$$|z_{11}| \leq M_2 \varepsilon^\lambda, \quad t \in \mathcal{D}_2 \cup \bar{\mathcal{D}}_4 \quad (4.4.15)$$

Объединив оценки (4.4.10), (4.4.13) и (4.4.15), можем написать оценку

$$|z_{11}| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^\lambda, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (4.4.16)$$

Согласно выбранных (симметричных) путей интегрирования, имеем

$$|z_{21}| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^\lambda, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4, \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.4.17)$$

Переходим к оценке z_{31} и z_{32} .

Сначала оценим z_{31} . При оценке z_{31} поступим также, как и при оценке z_{11} .

Пусть $t \in \mathcal{D}_1$. Тогда

$$\begin{aligned} z_{31} &= z_3^0 \exp \frac{-(t+i)^3 - (i+t_0)^3}{3\varepsilon} - \int_{B_1}^{\tilde{t}} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau - \\ &- \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

При оценке интегралов в (4.4.18), учтем, что по выбранным путям функция $(-Re(t+i)^3)$ не возрастает. В (4.4.18) применяя интегрирование по частям к первому и второму интегралу, получим

$$|z_{31}| \leq M_3 \varepsilon, \quad t \in \mathcal{D}_1 \quad (4.4.19)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_2$. Для этого случая, также справедливо представление (4.4.18).

Сначала проведем асимптотическую оценку первого интеграла

$$J_1 = \int_{B_1}^{\tilde{t}} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau.$$

Уравнение пути имеет вид $t_2 + 1 = \frac{1}{t_0} t_1$. Учитывая это, имеем

$$J_1 = \int_{t_0}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{-(t+i)^2 + \left(\tau_1 + i \frac{1}{t_0} \tau_1\right)^3}{3\varepsilon} \left(1 + \frac{i}{t_0}\right) d\tau_1.$$

Отсюда, переходя к модулю, получим

$$|J_1| \leq \left|1 + \frac{i}{t_0}\right| \int_{t_0}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{-(t_1^3 - 3t_1(t_2 + 1)^2) + \left(1 - \frac{3}{t_0^2}\right) \tau_1^3}{3\varepsilon} d\tau_1.$$

К полученному интегралу можно применить метод Лапласа.

Рассмотрим функцию $\varphi(\tau_1) = \left(1 - \frac{3}{t_0^2}\right) \tau_1^3$, которая строго возрастает и наибольшее значение принимает при $\tau_1 = \tilde{t}_1$, причем $\varphi'(\tau_1) > 0$. Тогда справедлива предстваление

$$|J_1| \leq M_{11} \frac{\varepsilon}{3 \left(1 - \frac{3}{t_0^2}\right) t_1^2} \exp \frac{-(t_1^3 - 3t_1(t_2 + 1)^2) + \left(1 - \frac{3}{t_0^2}\right) \tilde{t}_1^3}{3\varepsilon}.$$

Поскольку по выбранным путям функция $(-Re(t+i)^3)$ не возрастает, тогда

$$\exp \frac{-(t_1^3 - 3t_1(t_2 + 1)^2) + \left(1 - \frac{3}{t_0^2}\right) \tilde{t}_1^3}{3\varepsilon} \leq 1,$$

а также $t_0 \leq \tilde{t}_1 \leq -\varepsilon^\lambda$.

Таким образом

$$|J_1| \leq M_1 \varepsilon^{1-2\lambda}, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}.$$

Теперь оценим второй интеграл. Имеем

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{\tilde{t}_1(t_2 + 1)^2 - 3\tilde{t}_1(\tau_2 + 1)^2}{\varepsilon} d\tau_2 \leq \\ &\leq \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{2\tilde{t}_1(t_2 - \tau_2)(\tilde{t}_2 + 1)}{\varepsilon} d\tau_2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\tilde{t}_1(\tilde{t}_2 + 1)} \leq M_1 \varepsilon^{1-2\lambda},$$

$$|\mathcal{I}_2| \leq M_1 \varepsilon^{1-2\lambda}.$$

Теперь можем написать оценку для z_{31} .

$$|z_{31}| \leq M_1 \varepsilon^{1-2\lambda}, \quad t \in \mathcal{D}_2 \quad (4.4.20)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_4$. Для этого, также, воспользуемся представлением (4.4.18), но первый интеграл разделим так

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_{B_1}^{\tilde{t}} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau = \int_{B_1}^{B_4} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau + \\ &+ \int_{B_4}^{\tilde{t}} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

В (4.4.21) первый интеграл ($\mathcal{I}_{11}$), согласно проведенной оценки в предыдущем случае, имеет оценку

$$|\mathcal{I}_{11}| \leq M_{11} \varepsilon^{1-2\lambda} \quad (4.4.22)$$

Для второго интеграла в (4.4.21) справедлива оценка

$$|\mathcal{I}_{12}| \leq M_{12} \varepsilon^\lambda \quad (4.4.23)$$

В (4.4.18), для второго интеграла имеем оценку

$$|\mathcal{I}_2| \leq M_{13} \varepsilon^\lambda.$$

На основе (4.4.22), (4.4.23) получим

$$|\mathcal{I}_1| \leq M_{11} \varepsilon^{1-2\lambda} + M_{12} \varepsilon^\lambda.$$

По условию $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Если $1 - 2\lambda \leq \lambda$ ($\lambda \geq \frac{1}{3}$) должно быть

$$|\mathcal{I}_1| \leq M_1 \varepsilon^{1-2\lambda},$$

если $\lambda \leq 1 - 2\lambda$, то

$$|\mathcal{I}_1| \leq M_1 \varepsilon^\lambda.$$

Отсюда вытекает, что оптимальным вариантом является $\lambda = \frac{1}{3}$. Тогда

$$|z_{31}| \leq M_1 \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \quad t \in \mathcal{D}_4 \quad (4.4.24)$$

Оценки (4.4.16), (4.4.17), (4.4.19) видоизменяются

$$|z_{11}| \leq M_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (4.4.25)$$

$$|z_{21}| \leq M_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (4.4.26)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4$. z_{31} можем написать выражение

$$\begin{aligned} z_{31} = & z_3^0 \exp \frac{-(t+i)^3 + (t_0+i)^3}{3\varepsilon} - \int_{B_1}^{B_2} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau - \\ & - \int_{B_2}^{\tilde{t}} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau - \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

В (4.4.27) первый интеграл ($\mathcal{I}_1$) имеет оценку

$$|\mathcal{I}_1| \leq M_{11} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \quad (4.4.28)$$

Для второго интеграла ($\mathcal{I}_2$) имеем

$$\mathcal{I}_2 = \left| \int_0^{\tilde{t}_2} \exp \frac{-(t+i)^3 - i(\tau_2+1)^3}{3\varepsilon} i d\tau_2 \right|.$$

Введем обозначение

$$\mathcal{I}_{21} = \int_{-1}^{\tilde{t}_2} \exp \frac{-i(\tau_2+1)^3}{3\varepsilon} d\tau_2.$$

Для асимптотической оценки $\mathcal{I}_{21}$ мы применим метод стационарной фазы.

Введем в рассмотрение функцию $\varphi_1(\tau_2) = -(\tau_2+1)^3$. Эта функция имеет одну стационарную точку при $\tau_2 = -1$, причем $\varphi_1''(-1) = 0$, $\varphi_1'''(-1) = -6 < 0$. При таких условиях $\mathcal{I}_{21}$ имеет оценку

$$|\mathcal{I}_{21}| \leq M_{21} \varepsilon^{\frac{1}{3}}.$$

Таким образом

$$|\mathcal{I}_2| \leq M_{21} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \exp \frac{-(t_1^3 - 3t_1(t_2+1)^2)}{3\varepsilon}.$$

Нетрудно проверить

$$\forall t \in \mathcal{D}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4 \quad (-(t_1^3 - 3t_1(t_2+1)^2) \leq 0).$$

Тогда

$$|\mathcal{I}_2| \leq M_{21} \varepsilon^{\frac{1}{3}}. \quad (4.4.29)$$

В (4.4.27), третий интеграл ($\mathcal{I}_3$) имеет оценку

$$|\mathcal{I}_3| \leq M_{31} \varepsilon^{\frac{1}{3}}. \quad (4.4.30)$$

На основе оценок (4.4.28), (4.4.29), (4.4.32) получим оценку

$$|z_{31}| \leq M_1 \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \quad t \in \mathcal{D}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \quad (4.4.31)$$

Объединяя оценки (4.4.19), (4.4.20), (4.4.24), (4.4.31) имеем

$$|z_{31}| \leq M_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (4.4.32)$$

Аналогичная оценка имеет место для z_{41} , т.е.

$$|z_{41}| \leq M_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (4.4.33)$$

Как показывают исследования, проведенные в [47-55], [84], на оценку последующих приближений существенное (определяющее) влияние оказывают оценки первых приближений. Также сходимость последовательных приближений определяется оценкой первых приближений.

В итоге решение (4.4.6) существует $\forall t \in \mathcal{D}_0$ и для этого решения справедлива оценка

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq M_4 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (4.4.34)$$

Доказана следующая:

Теорема 4.4.1. Пусть рассматривается задача (4.4.4)-(4.4.5.) Тогда существует область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и решение задачи (4.4.4)-(4.4.5) $z(t, \varepsilon)$, определенное в $\mathcal{D}_0$ и для этого решения справедлива оценка (4.4.34).

Согласно проведенных преобразований из (4.4.34) вытекает оценка

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq M_4 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (4.4.35)$$

Если (4.4.35) рассмотреть на действительной оси, то получим

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq M_4 \begin{cases} \varepsilon, & t_0 \leq t \leq -q; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & -q \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (4.4.36)$$

Следствие 4.4.1. Из (4.4.36) вытекает, что решение задачи (2.1.1)-(2.1.2)-(2.1.3) задерживается около возникшего неустойчивого положения равновесия на отрезке $[-1; 0]$.

§ 4.5. Задержка решения для случая С5

В (2.1.1) введем новые неизвестные функции следующим образом

$$x_{2j-1} - y = u_{2j-1}, x_{2j} = u_{2j}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Получим

$$\varepsilon u'_{2j-1} = (t - \alpha_j)u_{2j-1} - u_{2j} + V^2(u_1, u_2, \dots, u_{2n})u_{2j-1} - \varepsilon, \quad (4.5.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon u'_{2j} &= u_{2j-1} + (t - \alpha_j)u_{2j} + V^2(u_1, u_2, \dots, u_{2n})u_{2j}, \\ u_{2j-1}(t_0, \varepsilon) &= x_{2j-1}^0 - t_0, u_{2j}(t_0, \varepsilon) = x_{2j}^0 \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

В (4.5.1) умножив второе уравнение на $(\pm i)$, затем складывая первое со вторым, получим

$$\varepsilon z'_{2j-1} = (t - \alpha_j + i)z_{2j-1} + V^2(z_1, \dots, z_{2n})z_{2j-1} - \varepsilon, \quad (4.5.3)$$

$$\varepsilon z'_{2j} = (t - \alpha_j - i)z_{2j} + V^2(z_1, \dots, z_{2n})z_{2j} - \varepsilon$$

с условием

$$z_{2j-1}(t_0, \varepsilon) = z_{2j-1}^0, z_{2j}(t_0, \varepsilon) = z_{2j}^0 \quad (4.5.4)$$

где $V(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) = z_1 \cdot z_2 + \dots + z_{2n-1} \cdot z_{2n}$.

$$|z_{2j-1}^0| \leq M_1 \varepsilon, |z_{2j}^0| \leq M_2 \varepsilon.$$

Задачу (4.5.3)-(4.5.4) заменим следующим

$$z_{2j-1} = z_{2j-1}^0 \exp \frac{F_{2j-1}(t) - F_{2j-1}(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (V^2 - \varepsilon) \exp \frac{F_{2j-1}(t) - F_{2j-1}(\tau)}{2\varepsilon} d\tau, \quad (4.5.5)$$

$$z_{2j} = z_{2j}^0 \exp \frac{F_{2j}(t) - F_{2j}(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (V^2 - \varepsilon) \exp \frac{F_{2j}(t) - F_{2j}(\tau)}{2\varepsilon} d\tau,$$

где обозначены

$$F_{2j-1}(t) = (t - \alpha_j + i)^2, F_{2j}(t) = (t - \alpha_j - i)^2.$$

(4.5.5) рассмотрим в области $\mathcal{D}_0$, определенной в §3.2, П 3.2.5.

Выбор путей интегрирования для (4.5.5). Путь интегрирования выбирается согласно §3.2, П 3.2.5. Для z_{2j-1} путь такой же, как и для $Re F_{2j-1}(t)$, а для z_{2j} выбирается симметричным к пути z_{2j-1} .

К (4.5.5) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом

$$z_{2j-1 m} = z_{2j-1}^0 \exp \frac{F_{2j-1}(t) - F_{2j-1}(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (V_{m-1}^2 - \varepsilon) \exp \frac{F_{2j-1}(t) - F_{2j-1}(\tau)}{2\varepsilon} d\tau, \quad (4.5.6)$$

$$z_{2j m} = z_{2j}^0 \exp \frac{F_{2j}(t) - F_{2j}(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (V_{m-1}^2 - \varepsilon) \exp \frac{F_{2j}(t) - F_{2j}(\tau)}{2\varepsilon} d\tau.$$

$$z_{2j-1 0} \equiv 0, z_{2j 0} \equiv 0, m = 1, 2, \dots,$$

где $V_{m-1}^2 = z_{1 m-1} \cdot z_{2 m-1} + \dots + z_{2n-1 1} \cdot z_{2n 1}$.

Далее, как и в предыдущих случаях, проводится оценка и доказательство равномерной сходимости (4.5.6) в области $\mathcal{D}_0$.

Последовательные приближения в $\mathcal{D}_0$ равномерно сходятся к некоторой функции $z(t, \varepsilon)$, которая является решением (4.5.5), и для этого решения справедлива оценка

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq M_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6 \cup \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_5, \end{cases} \quad (4.5.7)$$

$$t \in (\cup_{j=3}^5 (\mathcal{D}_j \cup \bar{\mathcal{D}}_j)) \cup \mathcal{D}_6.$$

Теорема 4.5.1. Пусть рассматривается задача (4.5.3)-(4.5.4). Тогда существует область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и решение задачи (4.5.3)-(4.5.4) $z(t, \varepsilon)$, определенное в $\mathcal{D}_0$ и для этого решения справедлива оценка (4.5.7).

Согласно проведенных преобразований из (4.5.7) вытекает оценка

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq M_5 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \\ \sqrt{\varepsilon}, & t \in \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6 \cup \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_5, \end{cases} \quad (4.5.8)$$

Если (4.5.8) рассмотреть на действительной оси, то получим

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq M_5 \begin{cases} \varepsilon, & t_0 \leq t \leq 1 - \sqrt{\varepsilon}, \\ \sqrt{\varepsilon}, & 1 - \sqrt{\varepsilon} < t \leq 1 \end{cases} \quad (4.5.9)$$

Следствие 4.5.1. Из (4.5.9) вытекает, что решение задачи (2.1.1)-(2.1.2)-(2.1.3) задерживается около возникшего неустойчивого положения равновесия на отрезке $[0; 1]$.

Заключение по главе 4

В данной главе решения задач (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) исследованы на задержку решений. Рассмотрены случаи $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$. Исследования проведены согласно, геометрических построений, проведенных в Главе 3, §3.2, а также использованы методы последовательных приближений, Лапласа, стационарной фазы, интегрирование по частям и другие асимптотические оценки. Особенность всех рассматриваемых случаев заключается в том, что на устойчивость и потери устойчивости влияют все собственные значения матрицы-функции первого приближения. Выяснены, какие собственные значения или их совокупность являются определяющими при задержке решений. Доказано, что во всех рассматриваемых случаях происходит задержка решения. Результаты сформулированы в виде теорем и указаны промежутки задержек решений на действительной оси.

ВЫВОДЫ

В данной работе матрицы-функции первого приближения рассматриваемых автономных сингулярно возмущенных систем имеют несколько пар комплексно-сопряженных собственных значений и все они влияют на устойчивость положения равновесия. Ранее не были исследованы такие классы автономных систем сингулярно возмущенных уравнений.

Была поставлена цель: Исследование асимптотического поведения решений автономных систем сингулярно возмущенных уравнений, имеющих положения равновесия, когда устойчивость положения равновесия определяется всеми собственными значениями матрицы-функции первого приближения.

Для реализации этой цели решены следующие задачи:

Для рассматриваемых случаев решена задача задержки решения. Решение задачи проведено аналитическим продолжением сингулярно возмущенных уравнений в некоторую область комплексной плоскости, содержащую отрезок действительной оси, где положение равновесия меняет устойчивость. Используя свойства поверхностей всех гармонических функций, порождаемых заданными аналитическими функциями (собственных значений), построены области. Сформулированы и доказаны критерии оптимального выбора путей интегрирования. Применены методы последовательных приближений, Лапласа, стационарной фазы, замена заданных начальных условий на переменные начальные условия на некоторых линиях, сравнение функциональных рядов, теорема Коши о независимости путей интегрирования. В каждом случае выявлены группа собственных значений, определяющие промежутки задержек решений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Азимбаев, М. А. Устойчивость решений начальной задачи линейных сингулярно возмущенных уравнений [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / М. А. Азимбаев. – Бишкек, 2010. – 116 с.
2. Алыбаев, К. С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости [Текст] : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.02 / К. С. Алыбаев. – Жалалабат, 2001. – 203 с.
3. Алыбаев, К. С. Методы линий уровня в теории сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / К. С. Алыбаев, Н. К. Мусакулова // Вестник ОшГУ. – 2022. – № 4. – С. 206-217.
4. Алыбаев, К. С. Построение размеченных множеств с применением нулей аналитических функций [Текст] / К. С. Алыбаев, М. Р. Нарбаев // Вестник ОшГУ. Серия физ.-мат. наук. – 2003. – №6. – С. 106-109.
5. Алыбаев, К. С. Развитие асимптотических методов для сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости [Текст] / К. С. Алыбаев, М. Р. Нарбаев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 35. – С. 105-109.
6. Алыбаев, К. С. Структурный анализ решений систем из двух сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости [Текст] / К. С. Алыбаев, М. Р. Нарбаев // Математический журнал. – Алматы, 2008. – Т. 8. – №4 (30). – С. 20-25.
7. Алыбаев, К. С. Явление простирающегося симметричного пограничного слоя для сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости [Текст] / К. С. Алыбаев, М. Р. Нарбаев // Вестник ЖАГУ. – Жалал-Абад, 2008. – № 1. – С. 122-126.
8. Алыбаев, К. С. Области притяжения решений сингулярно возмущенных систем уравнений [Текст] / К. С. Алыбаев, Т. К. Нарымбетов // Вестник ЖАГУ. – Жалал-Абад, 2021. – №1 (46). – С. 5-8.

9. Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями. [Текст] : монография / К. С. Алыбаев, П. С. Панков, К. Б. Тампагаров, М. Р. Нарбаев. – Жалал-Абад, 2023. – 218 с.
10. Алымкулов, К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач [Текст] / К. Алымкулов. – Бишкек : Илим, 1992. – 108 с.
11. Алымкулов, К. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно-возмущенного уравнения второго порядка [Текст] / К. Алымкулов // Вестник ОшГУ. – 2012. – № 3. – С. 43-45.
12. Алымкулов, К. Обобщение метода погранфункций для построения асимптотического разложения сингулярно возмущенных уравнений с точкой поворота [Текст] / К. Алымкулов, Т. Д. Асылбеков // Вестник КГНУ. – Спец. Вып. – 2011. – С. 35-40.
13. Анарбаева, Г. М. Асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости положения равновесия [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Г. М. Анарбаева. – Бишкек, 1993. – 120 с.
14. Андронов, В. И. Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В. И. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – Москва : Физматгиз, 1959. – 926 с.
15. Арнольд, В. И. Теория бифуркаций [Текст] / В. И. Арнольд и др. // Современные проблемы математики : Фундаментальные направления. – Москва : ВИНТИ, 1985. – Т.5. – С. 5-218.
16. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – Москва : Мир, 1974. – 501 с.
17. Вазов, В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В. Вазов. – Москва : Мир, 1968. – 462 с.
18. Васильева, А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших

- производных [Текст] / А. Б. Васильева // Успехи математических наук. – 1963. – Т. 18, вып. 3(111). – С. 15-86.
19. Васильева, А. Б. О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры [Текст] / А. Б. Васильева // Матем. сборник. – 1972. – Т. 31(73), – № 3. – С. 587-644.
20. Васильева, А. Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – Москва : Наука, 1973. – 272 с.
21. Васильева, А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. [Текст] / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – Москва : Высшая школа, 1990. – 208 с.
22. Вишик, М. И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром [Текст] / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // Успехи математических наук, – 1957. – Т. 12. – № 4. – С. 3-122.
23. Голодова, Е. С. Моделирование безопасных процессов горения с максимальной температурой [Текст] / Е. С. Голодова, Е. А. Щепкина // Математическое моделирование. – 2008. – Т. 20. – № 5. – С. 55-58.
24. Голодова, Е. С. Оценка затягивания потери устойчивости в дифференциальных системах с траекториями-утками [Текст] / Е. С. Голодова, Е. А. Щепкина // Вестник СамГУ. Естественная серия. – 2013. – № 3 (104). – С. 12-24.
25. Иманалиев, М. И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем [Текст] / М. И. Иманалиев. – Фрунзе : Илим, 1972. – 356 с.
26. Иманалиев, М. И. Явление вращающегося пограничного слоя в теории сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / М. И. Иманалиев, П. С. Панков // Доклады АН СССР. – 1986. – Т. 289. – № 3. – С. 356-361.
27. Иманалиев, М. И. Явление удаляющегося пограничного слоя в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / М. И. Иманалиев, П. С. Панков // Доклады РАН. – 1993. – Т. 333. – № 5. – С. 575-577.

28. Иманалиев, М. И. Алгоритм для гарантированных границ решений сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений и автономных систем второго порядка и явление сингулярного цикла [Текст] / М. И. Иманалиев, П. С. Панков, Г. М. Кененбаева // Доклады АН. – 1997. – Т. 354. – № 6. – С. 733-735.
29. Иманалиев, М. И. Явление углубляющегося пограничного слоя в теории сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / М. И. Иманалиев, П. С. Панков, Г. М. Кененбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек : Илим, 2006. – Вып. 34. – С. 15-19.
30. Какишов, К. Асимптотическая теория сингулярно-возмущенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, когда вырожденное уравнение имеет разрывные решения [Текст] : дис ... д-ра физ.-мат. наук : 01.02.02 / К. Какишов. – Бишкек, 1993. – 228 с.
31. Каримов, С. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости “быстрых переменных” [Текст] : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.02 / С. Каримов. – Ош, 1983. – 260 с.
32. Каримов, С. К. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости [Текст] / С. Каримов, А. А. Абдулазизова // Естественные и технические науки. – 2007. – №4 (30). – С.13-16.
33. Кененбаева, Г. М. Теория и методика новых эффектов и явлений в теории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений [Текст] / Г. М. Кененбаева. – Бишкек : Илим, 2012. – 204 с.
34. Колесов, А. Ю. Решение сингулярно возмущенных краевых задач методом “охоты на уток” [Текст] / А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов // Труды МИАН. – 1999. – Т. 224. – С.187-207.
35. Копсон, Э. Асимптотические разложения [Текст] / Э. Копсон. – Москва : Мир, 1966. – 156 с.

36. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М. А. Лаврентьев, Б. А. Шабат. – Москва : Наука, 1973. – 739 с.
37. Ломов, С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. [Текст] / С. А. Ломов. – Москва : Наука, 1981. – 440 с.
38. Матанов, Ш. М. Геометрическая теория сингулярно возмущенных уравнений с точками перевала [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Ш. М. Матанов. – Жалал-Абад, 2023. – 120 с.
39. Мищенко, Е. Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания [Текст] / Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. – Москва : Наука, 1975. – 247 с.
40. Мищенко, Е. Ф. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах [Текст] / Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. – Москва : Наука, 1995. – 336 с.
41. Мурзабаева А. Исследование сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с разделением множеств в вырождении [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / А. Мурзабаева. – Ош, 2019. – 120 с.
42. Нарбаев, М. Р. Простирающиеся пограничные слои в теории сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / М. Р. Нарбаев. – Бишкек, 2010. – 116 с.
43. Нарымбетов, Т. К. Существования и связи областей притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Т. К. Нарымбетов. – Ош, 2022. – 209 с.
44. Нарымбетов, Т. К. Существование общих областей притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / Т. К. Нарымбетов // Вестник ЖАГУ. – 2021. – №1 (46). – С. 9-13.
45. Нейштадт, А. И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось [Текст] / А. И. Нейштадт // Успехи матем. наук. – 1985. – Вып. 5. – С. 190-191.

46. Нейштадт, А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях II [Текст] / А. И. Нейштадт // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 2. – С. 226-233;
47. Нурматова, М. Н. Асимптотика решений автономных сингулярно возмущенных уравнений при смене устойчивости положения равновесия в нескольких точках [Текст] / М. Н. Нурматова // Бюллетень науки и практики. – 2024. – Т. 10. – №5. – С. 40-45.
48. Нурматова, М. Н. Влияние точек поворота на задержку решения вблизи неустойчивого положения равновесия [Текст] / М. Н. Нурматова // Alatau Academic Studies. – 2024. – № 2, – С. 398-411.
49. Нурматова, М. Н. Методы исследования асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях [Текст] / К. С. Алыбаев, М. Н. Нурматова, Н. К. Мусакулова // Бюллетень науки и практики. – 2024. – Т. 10. – №3. – С. 14-27.
50. Нурматова, М. Н. Задержка решений автономных сингулярно возмущенных уравнений при смене устойчивости положения равновесия [Текст] / К. С. Алыбаев, М. Н. Нурматова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2024. – №5. – С. 13-18.
51. Нурматова, М. Н. Рекуррентное представление решений сингулярно возмущенных уравнений с точками поворота в комплексной области [Текст] / К. С. Алыбаев, М. Н. Нурматова // Вестник ЖАГУ. – 2021. – №1 (46). – С. 14-19.
52. Нурматова, М. Н. Сингулярно возмущенные уравнения с точками поворота [Текст] / К. С. Алыбаев, М. Н. Нурматова // Евразийское научное объединение. 2021. – № 7-1 (77). – С. 8-11.
53. Нурматова, М. Н. Слияние точек поворота и задержка решений [Текст] / К. С. Алыбаев, М. Н. Нурматова // Проблемы автоматики и управления. – 2024. – №2. – С. 5-15.
54. Нурматова, М. Н. Явление затягивание потери устойчивости в теории сингулярных возмущений [Текст] / К. С. Алыбаев, М. Н. Нурматова // Бюллетень науки и практики. – 2023. – Т. 9. – №12. – С. 12-19.

55. Нурматова, М. Н. Асимптотика решений сингулярно возмущенных уравнений с попарно комплексно-сопряженными точками поворота [Текст] / К. С. Алыбаев, М. Н. Нурматова // Вестник ОшГУ. Математика. Физика. Техника. – 2024. – №2(5). – С. 6-15.
56. Панков, П. С. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями [Текст] / П. С. Панков, К. С. Алыбаев, М. Р. Нарбаев, К. Б. Тампагаров // Вестник ОшГУ. – 2013. – №1 (специальный выпуск). – С.227-231.
57. Понтрягин, Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных [Текст] / Л. С. Понтрягин // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1957. – Т. 21. – №5. – С. 605-626.
58. Понтрягин, Л. С. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с малым параметром [Текст] / Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко // Труды МИАН. – 1985. – Т. 169. – С. 99-188.
59. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Текст] / И. И. Привалов. – 13-е изд. – Москва : Наука, 1984. – 432 с.
60. Соболев, В. А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике [Текст] / В. А. Соболев, Е. А. Щепаккина. – Москва : Физматлит, 2010. – 320 с.
61. Соболев, В. А. Траектории-утки в одной задаче теории горения [Текст] / В. А. Соболев, Е. А. Щепаккина // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 9. – С. 1175–1184.
62. Тампагаров, К. Б. Классификация погранслойных линий для систем двух сингулярно возмущенных линейных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями [Текст] / К. Б. Тампагаров // Инновации в науке. – Новосибирск: СибАК, 2016. – №7 (56). – С.48-53.
63. Тампагаров, К. Б. Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями

- [Текст] : дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / К. Б. Тампагаров. – Бишкек, 2017. – 218 с.
64. Тихонов, А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра [Текст] / А. Н. Тихонов // Математический сборник. – 1948. – Т. 22 (64). – С. 193-204.
65. Тихонов, А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных [Текст] / А. Н. Тихонов // Математический сборник. – 1952. – Т. 31 (73). – №3. – С. 575-586.
66. Турсунов, Д. А. Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости быстрых движений [Текст] / Д. А. Турсунов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2018. – № 54. – С. 46-57.
67. Турсунов, Д. А. Асимптотика решений сингулярно возмущенных уравнений в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют n – кратный полюс [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Д. А. Турсунов. – Омск, 2005. – 110 с.
68. Турсунов, Д. А. Асимптотика решений бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений [Текст] : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.02 / Д. А. Турсунов. – Омск, 2014. – 192 с.
69. Федорюк, М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / М. В. Федорюк. – Москва : Наука, 1983. – 352 с.
70. Федорюк, М. В. Метод перевала [Текст] / М. В. Федорюк. – Москва : Наука. 1977. – 368 с.
71. Шишкова, М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных [Текст] / М. А. Шишкова // Докл. АН СССР. – 1973. – Т.209. – №3. – С. 576-579;
72. Щетинина, Е. В. Интегральные многообразия быстро-медленных систем и затягивание потери устойчивости [Текст] / Е. В. Щетинина // Вестник СамГУ. Естественная серия. – 2010. – № 6 (80). – С. 93-104.

73. Щепакина, Е. А. Критические условия самовоспламенения в пористой среде [Текст] / Е. А. Щепакина // Химическая физика. – 2001. – Т. 20. – № 7. – С. 3-9.
74. Щепакина, Е. А. Сингулярные возмущения в задаче моделирования безопасных режимов горения [Текст] / Е. А. Щепакина // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15. – № 8. – С. 113-117.
75. Alybaev, K. S. Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy [Text] / K. S. Alybaev, A. B. Murzabaeva. // International Conference on Analysis and Applied Mathematics” (ICAAM 2018), AIP Conference Proceedings, Vol. 1997, American Institute of Physics, 2018. – P. 020076-1-020076-5.
76. Benoit, E. Chasse au canard [Text] / E. Benoit [et al.] // Collect. Math. – 1981. – Vol. 32. – № 1. – P. 37-76.
77. Christopher, K. R. T. Geometric singular perturbation theory [Text] / K. R. T. Christopher // Lecture Notes Mathematics. Vol. 1609. – 1995. – P. 44-118.
78. Fenichel, N. Geometric singular perturbation theory for ordinary equations [Text] / N. Fenichel // J. Differential Equations. – 1979. – Vol. 31. – P. 53–98.
79. Golodova, E. S. Maximal combustion temperature estimation [Text] / E. S. Golodova, E. A. Shchepakina // Journal of Physics: Conference Series. – 2006. – Vol. 55. – P. 94-104.
80. Gorelov, G.N. Duck-trajectories in a thermal explosion problem [Text] / G. N. Gorelov, V. A. Sobolev // Applied Mathematics Letters. – 1992. – Vol. 5. – № 6. – P. 3-6.
81. Gorelov, G. N. Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory [Text] / G. N. Gorelov, V. A. Sobolev // Combustion and Flame. – 1991. – Vol. 87. – P. 203–210.
82. Hek, G. Geometric singular perturbation theory in biological practice [Text] / G. Hek // Journal of Mathematical Biology. – 2010. – Vol. 60. – P. 347–386.
83. Li, J. Geometric singular perturbation theory with real noise [Text] / J. Li, K. Lu, P. W. Bates // Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 259. – P. 5137-5161.
84. Nurmatova, M. N. Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position [Text] / K. S. Alybaev, A. M. Dzhuraev, M. N.

- Nurmatova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45. – № 3. – P. 912-921.
85. Shchepakina, E. Black swans and canards in self-ignition problem [Text] / E. Shchepakina // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2003. – Vol. 4. – P. 45–50.
86. Verhulst, F. Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescales Dynamics [Text] / F. Verhulst. New York: Springer, 2005. – P. 187-226.
87. Xie, F. Canard phenomena in oscillations of a surface oxidation reaction [Text] / F. Xie, M. Han, W. Zhang // Journal Nonlinear Science. – 2005. – Vol. 15. – P. 363-386.
88. Zhou, Zheyuan. Delayed phenomenon of loss of stability of solutions in a second-order quasi-linear singularly perturbed boundary value problem with a turning point [Text] / Zheyuan Zhou, Jianhe Shen // Boundary Value Problems. – 2011. – Article ID 35. <https://doi.org/10.1186/1687-2770-2011-35>.
89. Pankov, P. S. Computer and real simulation of phenomenon of strange attractor by system of differential equations [Text] / P. S. Pankov, S. B. Tagaeva // Herald of Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic. – 2018. – № 1. – P. 17-23.