Джураева А.Х., Ахмедова З.С.

ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ БИР ТЕКТҮҮ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ ЖОЛДОРУ

Джураева А.Х., Ахмедова З.С.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Juraeva A., Akhmedova Z.

METHODS FOR SOLVING HOMOGENEOUS LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER WITH CONSTANT COEFFICIENTS

УДК: 517.9

Жаратылыштын кубулуштарын окуп үйрөнүүдө жана аны турмушта колдонууда, жаратылыштын закондоруна таянабыз. Ал закондорду математиканын тили менен жазууга да болоору белгилүү. Маселен, физиканын, техниканын, химиянын, биологиянын, экономиканын жана башка көп тармактардын маселелерин чыгаруу талап кылынсын. Ал үчүн адегенде ал тармактардын закондорунун негизинде берилген маселени математиканын тилине которуп, ал маселенин моделин алабыз. Көпчүлүк учурда, ал математикалык модель белгисиз сандарды кармаган теңдеме же белгисиз функцияны, анын туундуларын жана аргументтерин кармаган теңдеме болот. Көптөгөн математикалык маселелер дифференциалдык теңдемелерге келээри анык. Анткени математика боюнча илимий иштердин негизин дифференциалдык теңдемелер түзөт. Дифференциалдык теңдемелер теориясын өздөштүрүү менен андан ары көптөгөн илимий багыттагы жумуштарды жазууга жол ачылаары анык. Бул туруктуу коэфициенттүү дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу жолдору деген темадагы макаланы жазуудагы максат дифференциалдык теңдемелер теориясы менен кеңири таанышуу жана ага тийиштүү мисалдарды чыгаруунун жолдорун өздөштүрүү болуп саналат. Дифференциалдык теңдемелердин негизги түшүнүктөрүнөн тартып, жогорку тартиптеги дифференциалдык теңдемелерге көңүл буруу менен мисалдарды чыгаруу усулдарын өздөштүрүп, аларга тийиштүү бир топ мисалдарды карап чыктык .

Ачкыч сөздөр: *Дифференциалдык теңдеме, сызыктуу, чыгарылыштардын фундаменталдык системасы, эселүү тамыр, мүнөздөгүч теңдеме, бир тектүү.*

Мы опираемся на законы природы, когда изучаем явления природы и применяем их в жизни. Известно, что эти законы можно записать на языке математики. Например, требуется решать задачи физики, техники, химии, биологии, экономики и многих других областей. Для этого сначала на основе законов этих сетей переводим данную задачу на язык математики и получаем модель этой задачи. В большинстве случаев эта математическая модель представляет собой уравнение, содержащее неизвестные числа, или уравнение, содержащее неизвестную функцию, ее производные и аргументы. Понятно, что многие математические задачи сводятся к дифференциальным уравнениям. Потому что дифференциальные уравнения составляют основу научных работ по математике. Понятно, что освоение теории дифференциальных уравнений откроет путь к написанию многих научных работ. Цель написания данной статьи на тему методы решения однородных линейных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами-

ознакомиться с теорией дифференциальных уравнений и освоить способы вывода соответствующих примеров. Начав с основных понятий о дифференциальных уравнениях, мы освоили методы вывода примеров, обращая внимание на дифференциальные уравнения более высокого порядка, и рассмотрели ряд соответствующих примеров.

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение, линейное, фундаментальная система решений, кратный корень, характеристическое уравнение, однородное*

We rely on the laws of nature when we study natural phenomena and apply them in life. It is known that these laws can be written in the language of mathematics. For example, it is required to solve problems in physics, technology, chemistry, biology, economics and many other fields. To do this, first, based on the laws of these networks, we translate this problem into the language of mathematics and obtain a model of this problem. In most cases, this mathematical model is an equation containing unknown numbers, or an equation

containing an unknown function, its derivatives and arguments. It is clear that many mathematical problems are reduced to differential equations. Because differential equations form the basis of scientific work in mathematics. It is clear that mastering the theory of differential equations will open the way to writing many scientific papers. The purpose of writing this article on the topic of methods for solving homogeneous linear differential equations of higher order with constant coefficients is become familiar with the theory of differential equations and master methods for deriving relevant examples. Starting with basic concepts about differential equations, we learned how to derive examples, focusing on higher order differential equations, and looked at a number of relevant examples.

Key words: *Differential equation, linear, fundamental system of solutions, multiple root, characteristic equation.*

Көптөгөн математикалык маселелер дифференциалдык теңдемелерге келээри анык. Анткени математика боюнча илимий иштердин негизин дифференциалдык теңдемелер түзөт. Дифференциалдык теңдемелер теориясын өздөштүрүү менен андан ары көптөгөн илимий багыттагы жумуштарды жазууга жол ачылаары анык. Бул турактуу коэфициенттүү дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу жолдору деген темадагы макаланы жазуудагы максатым дифференциалдык теңдемелер теориясы менен кеңири таанышуу жана ага тийиштүү мисалдарды чыгаруунун жолдорун өздөштүрүү болуп саналат. Дифференциалдык теңдемелердин негизги түшүнүктөрүнөн тартып, жогорку тартиптеги дифференциалдык теңдемелерге көңүл бурдук.

Бул макаланы жазууда [1],[3],[4],[10],[11] адабияттардан кеңири пайдаландык.

Ал эми макалада негизинен жогорку тартиптеги турактуу коэффициенттүү бир тектүү сызыктуу теңдемелердин теориясын кеңири кароо менен мисалдарды чыгаруу усулдарын өздөштүрүп, аларга тийиштүү бир топ мисалдарды карап чыгабыз .

Жаратылыштын кубулуштарын окуп үйрөнүүдө жана аны турмушта колдонууда, жаратылыштын закондоруна таянабыз. Ал закондорду математиканын тили менен жазууга да болоору белгилүү. Маселен, физиканын, техниканын, химиянын, биологиянын, экономиканын жана башка көп тармактардын маселелерин чыгаруу талап кылынсын. Ал үчүн адегенде ал тармактардын закондорунун негизинде берилген маселени математиканын тилине которуп, ал маселенин моделин алабыз. Көпчүлүк учурда, ал математикалык модель белгисиз сандарды кармаган теңдеме же белгисиз функцияны, анын туундуларын жана аргументтерин кармаган теңдеме болот.

Бир же бирден көп өзгөрүлмө ***x*** чоңдуктарды, ал өзгөрүлмө чоңдуктардан көз каранды болгон белгисиз ***y*** функцияны жана анын , туундуларын кармаган теңдеме ***дифференциалдык теңдеме*** деп аталат.

1. Комплекстүү коэффициенттүү теңдемелер.

Төмөнкү n –тартиптеги

$$L(z) \equiv a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} z' + a_n z = 0. \qquad (1)$$

сызыктуу бир тектүү дифференциалдык теңдемени карайлы. Мында $a_0, a_1, \ldots a_n$ -белгилүү комплекстүү сандар. $a_0 \neq 0$.

АНЫКТАМА 1. *Берилген (1) бир тектүү теңдемени* $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)$ *чыгарылыштары (1) теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасы деп аталат, эгерде ал чыгарылыштар сызыктуу көз каранды эмес болсо, б.а. ар кандай* $t \in R$ *жана* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *турактуу сандары үчүн* $\sum_{i=1}^{n} C_i z_i(t) = 0$ *болот качан гана* $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$ *болсо.*

ТЕОРЕМА 1. *Эгерде* $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)$ *функциялары (1) бир тектүү теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасы болсо, анда (1) теңдеменин жалпы чыгарылышы*

$$z(t) = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) + \ldots + C_n z_n(t) \qquad (2)$$

болот. Мында $C_1, C_2, \ldots, C_n$*- каалаган турактуу сандар.*

ЭСКЕРТҮҮ. Эгерде (1) теңдеменин коэффициенттери $a_0, a_1, \ldots, a_n$ функциялар жана $a_0(t) \neq 0,\ t \in R$ болсо, анда (1) теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасы жогорудагы аныктама менен аныкталат жана жогорудагы теореманын ырастоосу туура болот.

2. Чыгарылыштардын фундаменталдык системасын тургузуу.

Төмөнкү теңдеме

$$L(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \qquad (3)$$

берилген (1) бир тектүү теңдеменин мүнөздөгүч теңдемеси деп аталат. (1) теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасы $L(\lambda)$ көп мүчөнүн б.а. (3) теңдеменин тамырларынын жардамы менен тургузулат.

Эми $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – сандары (3) теңдеменин ар түрдүү тамырлары болсун дейли. Ал эми λ_j саны (3) теңдеменин k_j эселүү тамыры болсун дейли $\left(j = 1, 2, \ldots, m, \ \sum_{j=1}^{m} k_j = n\right)$. Анда ар бир λ_j $(= 1, 2, \ldots, m)$ тамырына (1) теңдеменин k_j сызыктуу көз каранды эмес

$$e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \ \ldots, \quad t^{k_j-1}e^{\lambda_j t}$$

чыгарылыштары туура келет. Бардык $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ тамырларына туура келген (2.2.1) теңдеменин төмөнкү

$$\begin{array}{ll} e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ \ldots, & t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \ \ldots, & t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, \ \ldots, & t^{k_m-1}e^{\lambda_m t} \end{array}$$

чыгарылыштарынын жыйындысы (1) теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасын түзөт. Анда (2) формуланын негизинде (1) теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$z(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2\, te^{\lambda_1 t} + \ldots + C_{k_1}\, t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t} +$$
$$+ C_{k_1+1}e^{\lambda_2 t} + C_{k_1+1}te^{\lambda_2 t} + \ldots + C_{k_1+k_2}\, t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t} + \ldots +$$
$$+ C_{k_1+k_2+\ldots+k_{m-1}}\, e^{\lambda_m t} + \ldots + C_n\, t^{k_m-1}e^{\lambda_m t} \qquad (4)$$

түрүндө жазылат. Мында $C_1, C_2, \ldots, C_n$- каалаган турактуу комплекстүү сандар.

МИСАЛ 1:

$$z^{(VI)} + 2z^{(IV)} + z'' = 0$$

теңдемени чыгаргыла.

Чыгаруу: Бул теңдеменин мүнөздөгүч теңдемеси

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 + \lambda^2 = 0$$

болот. Мындан

$\lambda^2(\lambda^2 + 1)^2 = 0.$

Бул теңдеме $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$ тамырларына ээ болот жана ар бир тамыры эки эселүү тамыр болушат. Анда (4) формуланын негизинде берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$z(t) = C_1 + C_2\, t + C_3e^{-it} + C_4te^{-it} + C_5e^{it} + C_6te^{it}$$

түрүндө жазылат. Мында $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$- каалаган турактуу комплекстүү сандар.

3. Чыныгы коэффициенттүү теңдемелер.

Төмөнкү

$$L(x) \equiv a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x^1 + a_nx \qquad (5)$$

бир тектүү теңдемени карайлы. Мында $a_0, a_1, \ldots, a_n$ коэффициенттери турактуу чыныгы сандар. Берилген (5) теңдеме (1) теңдеменин айрым бир учуру болгондуктан, жогоруда көрсөтүлгөн методду колдонсок болот. Бирок, бул учурда (5) теңдеменин чыныгы чыгарылыштарынан турган фундаменталдык системаны түзсөк болот. Мында (5) теңдеменин

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (6)$$

мүнөздөгүч теңдемесинин коэффициенттери чыныгы сандар болгондуктан (6) теңдеменин ар түрдүү тамырларынын ар бири үчүн төмөнкү эки учур болушу мүмкүн:

1) чыныгы саны (6) мүнөздөгүч теңдеменин k эселүү тамыры болот. Бул учурда санына (5) теңдеменин k сызыктуу көз каранды эмес

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ \ldots, t^{k-1}\, e^{\lambda t}$$

чыгарылыштары туура келет.

2) $\lambda = \alpha + i\beta$ комплекстүү саны (6) мүнөздөгүч теңдеменин k эселүү тамыры болсо, анда ал комплекстүү сандын түйүндөшү $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ комплекстүү саны да (6) мүнөздөгүч теңдеменин k эселүү тамыры болот. Бул учурда λ жана $\bar{\lambda}$ комплекстүү сандарына (5) теңдеменин $2k$ сызыктуу көз каранды эмес

$$e^{\alpha t}cos\beta t; \ te^{\alpha t}cos\beta t; \ \ldots, t^{k-1}e^{\alpha t}cos\beta t;$$
$$e^{\alpha t}sin\beta t; \ te^{\alpha t}sin\beta t; \ \ldots, t^{k-1}e^{\alpha t}sin\beta t;$$

чыгарылыштары туура келет.

Ал эми (6) мүнөздөгүч теңдеменин бардык чыныгы жана комплекстүү тамырларына туура келген (5) теңдеменин чыгарылыштарынын жыйындысы (5) теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасын түзөт.

МИСАЛ 2: $x''' - 8x = 0$

теңдемени чыгаргыла.

Чыгаруу: Бул теңдеменин $\lambda^3 - 8 = 0$ мүнөздөгүч теңдемесинин тамырлары $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1 - \sqrt{3}i$, $\lambda_3 = -1 + \sqrt{3}i$ болушат. Анда берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-t}cos\sqrt{3}\,t + C_3e^{-t}sin\sqrt{3}\,t$$

болот.

МИСАЛ 3:

$$x^{(VI)} + 2x^{(IV)} + x'' = 0$$

теңдеменин жалпы чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу: Бул теңдеменин $\lambda^6 + 2\lambda^4 + \lambda^2 = 0$ мүнөздөгүч теңдемесинин тамырлары $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$ болушат жана ар бир тамыры эки эселүү тамыр болот. Анда берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$x(t) = C_1 + C_2t + C_3cos\,t + C_4tcost + C_5sin\,t + C_6tsin\,t$$

болот.

МИСАЛ 4:

$$x''' + 4x'' + 13x' = 0, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 2$$

Коши маселесин чыгаргыла.

Чыгаруу: Бул теңдеменин $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$ мүнөздөгүч теңдемесинин тамырлары $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2 - 3i$, $\lambda_3 = -2 + 3i$ болот. Анда берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$x(t) = C_1 + C_2e^{-2t}cos3t + C_3e^{-2t}sin3t \qquad (7)$$

болот. Мындан

$$x'(t) = (-2C_2+3C_3)\,e^{-2t}cos3t + (-2C_3 - 3C_2)e^{-2t}sin3t \qquad (8)$$

$$x''(t) = (-5C_2-12C_3)\,e^{-2t}cos3t + (12C_2 - 5C_3)e^{-2t}sin3t \qquad (9)$$

Бул (7), (8), (9) формулаларын жана баштапкы шартты эске алсак, анда C_1, C_2, C_3 белгисиздерин аныкташ үчүн төмөнкү

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -2C_2 + 3C_3 = 1 \\ -5C_2 - 12C_3 = 2 \end{cases}$$

системасын алабыз. Бул системаны Крамердин же Гаусстун методу менен чыгарсак, анда

$$C_1 = \frac{6}{13}, \qquad C_2 = -\frac{6}{13}, \quad C_3 = \frac{1}{39}$$

болот.

Анда (7) формуладан берилген Кошинин маселесинин чыгарылышы

$$x(t) = \frac{1}{13}(6 - 6e^{-2t}cos3t + \frac{1}{3}e^{-2t}sin3t\,)$$

болоруна ынанабыз.

Адабияттар:

1. Азбелев Н.В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. – М.:Наука,1991. – 280 с.
2. збелев Н.В. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными [Текст] / Н.В. Азбелев, П.М. Симонов. – Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001. – 230 с.
3. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции [Текст] / А. Асанов // Табигый илимдер журналы. – Бишкек: Кыргызско-Турецкий университет «Манас», 2001. – С. 18-64.
4. Асанов А. Ограниченность решений интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А. Асанов, А.М. Байгесеков // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2014. –№7. – С.43-46.
5. Асанов А. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка Вольтерра-Стилтьеса на полуоси [Текст] / А. Асанов, Ж.О. Толубаев // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2013.– №4. – С.75-81.

6. Байгесеков А.М. Линейное интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А.М. Байгесеков // Проблемы современной науки и образования.– Иваново, 2016. –№3 (45). – С.35-44. (РИНЦ, РФ).
7. Рафатов. Р. Асанов А. Комплекс сандар, функциялар жана дифференциалдык теңдемелер. – Бишкек, 2017.
8. Понтрягин Л.С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4-е изд., М.: Наука, 1974., 331стр.
9. Ющенко А.А., // Дифференциальные уравнения т.4 №11, 1968г.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: – 5-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 576с.
11. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: – 4-е изд.– М.: Наука, Главная редакция физико математической литературы, 1974. – 332с.