Ахмедова С.З., Толубаев Ж.О., Ибрагим кызы Айганыш

ОБОБЩЕННЫЕ ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ

Ахмедова С.З., Толубаев Ж.О., Ибрагим кызы Айганыш

КЕҢЕЙТИЛГЕН ЛОПИТАЛДЫН ЭРЕЖЕЛЕРИ

Akhmedova S., Tolubaev J., Ibrahim kyzy Aiganysh

GENERALIZED LOPITAL RULES

УДК: 370/247-91

Бул макалада азыркы учурда жогорку, атайын орто жана орто окуу жайларда математика курсунда окутулуп жаткан кадимки бир аргументтүү функциянын туундусунун колдонулуштары болгон Лопиталдын эрежелеринин кеңейтилип, функциядан өсүүчү функция боюнча алынган туундунун жардамында аныкталган кеңейтилген Лопиталдын эрежелерине токтолуп кеттик.

Негизинен функциядан өсүүчү функция боюнча алынган туундунун жардамында аныкталган кеңейтилген Лопиталдын эрежелери азыркы учурда жогорку, атайын орто жана орто окуу жайларда математика курсунда окутулуп жаткан кадимки бир аргументтүү функциянын өсүү, кемүү аралыктары, максимум, минимум жана локалдык экстремумдарынын кеңейтилген түшүнүктөрү аныкталып алардын байланыштары, колдонулуштары изилденди.

Аныкталган жаңы кеңейтилген Лопиталдын эрежелери түшүнүктөрү азыркы учурда жогорку математиканын атайын курстарында жана негизинен интегралдык, интегро-дифференциалдык Вольтеррдин, Вольтерр-Стилтьестин ар кандай типтеги теңдемелерин изилдөөдө кеңири, даана колдонулуп келе жатат.

***Ачкыч сөздөр**: аныксыздыктар, Лопиталдын эрежелери, кеңейтилген Лопиталдын эрежелери, локалдык максимум, локалдык минимум.*

Мы сосредоточимся на этой статье на правилах Лопиталя, которые являются обобщениями правил Лопиталя, которые представляют собой приложения производной от обыкновенной функции с одним аргументом, которые в настоящее время преподаются в высших, средних специальных и средних учебных заведениях в курсе математики, и на расширенных правилах Лопиталя, которые определяются с помощью производной, полученной из функции по возрастающей функции.

Обобщенные правила Лопиталя, определяемые в основном с помощью производной, полученной по возрастающей функции от функции, определяют обобщенные понятия возрастания, убывания интервалов, максимума, минимума и локальных экстремумов обыкновенной функции с одним аргументом, которые в настоящее время преподаются в высших, средних специальных и средних учебных заведениях в курсе математики.

Определенные новые обобщенные понятия правил Лопиталя в настоящее время широко используются в специальных курсах высшей математики и в основном при изучении различных типов интегрального, интегро-дифференциального уравнений Вольтерра, Вольтерра-Стилтьеса.

***Ключевые слова:** неопределенности, правила Лопиталя, обобщенные правила Лопиталя, локальный максимум, локальный минимум.*

We will focus on this article on Lopital's rules, which are generalizations of Lopital's rules, which are applications of the derivative of an ordinary function with one argument, which are currently taught in higher, secondary specialized and secondary educational institutions in the course of mathematics, and on extended Lopital's rules, which are defined using the derivative obtained from the function by increasing function.

The generalized Lopital rules, defined mainly using the derivative obtained by an increasing function of a function, define the generalized concepts of increasing, decreasing intervals, maximum, minimum and local extremes of an ordinary function with one argument, which are currently taught in higher, secondary specialized and secondary educational institutions in the course of mathematics.

Certain new generalized concepts of Lopital's rules are currently widely used in special courses of higher mathematics and mainly in the study of various types of integral, integro-differential Volterra, Volterra-Stieltjes equations.

***Key words:** uncertainties, Lopital rules, generalized Lopital rules, local maximum, local minimum, local extremum.*

В настоящее время в высших, средних специальных и средних учебных заведениях полностью преподаются правила Лопиталя, которые в основном относятся к использованию производной функции с одним аргументом [2], [3], [4], [5],[6].

В этой статье мы вместе с моим научным руководителем рассмотрели исследование обобщенных правил Лопиталя, которые в основном определяются с помощью производной, полученной из функции по возрастающей функции.

В то время как математика, представленная в учебной программе бакалавриата, которая в настоящее время готовится, преподается на курсах высшей математики в основном в соответствии с государственным стандартом, производная функции с одним аргументом и ее приложения полностью изучаются, в этой статье мы исследовали обобщенные правила Лопиталя, определенные с использованием производной, полученной по возрастающей функции от функции, не предусмотренной учебной программой государственного стандарта [1].

В математике в теории предел определяется как отношение двух функций, т. е. $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, когда мы находим предел при $x \to a$ в функции, эти две функции могут быть либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими одновременно. В этом случае мы будете иметь неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Лопиталь был первым, кто предложил способ решения возникающих неопределенностей, заменив соотношение функций соотношением их производных и предложив собственное правило, которое решало бы неопределенности.

ТЕОРЕМА -1(*Раскрытие неопределенностей при стремления $x \to a$ в форме $\frac{0}{0}$*).

Если:

1. пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некотором определенном интервале $(a-\delta_1, a)$, $\delta_1 > 0$ и дифференцируемы по возрастающей функции $\varphi(x)$;
2. иметь предел $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} g(x) = 0$;
3. пусть для всех $x \in (a-\delta_2, a)$ и некоторых $\delta_2 > 0$ имеет:

$$\frac{df(x)}{d\varphi(x)} \neq 0,\ \frac{dg(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$$

4. ограниченный или неограниченный предел нижнего соотношения при стремлении $x \to a-$, т.е. $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ если имеет место $\lim\limits_{x\to a-}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$, то преде $\frac{f(x)}{g(x)}$ соотношения существует и имеет место следующее равенство:

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi[x]}\right] \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть предел отношения при $x \to a-$ $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ ограничен и равен l, а если нет, то мы можем рассмотреть соотношение $\frac{f(x)}{g(x)}$. Для этого мы добавим $f(a) = g(a) = 0$, что и функции $f(x)$ и $g(x)$ находятся в точке $x = a$.

Тогда и функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны слева от точки a.

Из этого следует $\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)} / \dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] \to l$, что при стремлении $x \to a-$ к наименьшее положительное число $\varepsilon > 0$ для числа $\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon(\varepsilon) > 0$ существует $x \in (a - \delta_\varepsilon, a)$ для чисел имеет место:

$$\left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] \to l\right| < \varepsilon$$

Если принять $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, для каждого $x \in (a - \delta, a)$ мы применяя обобщенную теорему Коши, имеем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(0)} - l\right| = \left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] - l\right| < \varepsilon$$

Здесь $x \in (x, a) \subset (a - \delta, a)$.

Таким образом, предел $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ существует по определению $[1]$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА-2. Пусть нам:

и пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некотором определенном интервале $(a; a + \delta_1)$, $\delta_1 > 0$ и дифференцируемы по возрастающей функции $\varphi(x)$;

и иметь предел $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$;

пусть для всех $x \in (a; a + \delta_2)$ и некоторых $\delta_2 > 0$ имеет место

$$\frac{df(x)}{d\varphi(x)} \neq 0, \ \frac{dg(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$$

ограниченный или неограниченный предел нижнего соотношения при стремлении $x \to a-$, т.е. $\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)} / \dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ если имеет место $\lim\limits_{x \to a-}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)} / \dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$, то предел $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ соотношения существует и имеет место следующее равенство:

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi[x]}\right] \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть предел отношения при $x \to a-$ $\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)} / \dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ ограничен и равен l, а если нет, то мы можем рассмотреть соотношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Для этого мы добавим $f(a) = g(a) = 0$, что и функции $f(x)$ и $g(x)$ находятся в точке $x = a$.

Тогда и функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны слева от точки a.

Из этого следует $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] \to l$, что при стремлении $x \to a-$ к наименьшее положительное число $\varepsilon > 0$ для числа $\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon(\varepsilon) > 0$ существует $x \in (a - \delta_\varepsilon, a)$ для чисел имеет место:

$$\left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] \to l\right| < \varepsilon$$

Если принять $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, для каждого $x \in (a - \delta, a)$ мы применяя обобщенную теорему Коши, имеем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(0)} - l\right| = \left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] - l\right| < \varepsilon$$

Здесь $x \in (a, x) \subset (a, a + \delta)$.

Таким образом, предел $\lim\limits_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ существует по определению $[1]$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА-3. Пусть нам:

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некотором определенном интервале $(a - \delta_1; a + \delta_1)$, $\delta_1 > 0$, дифференцируемы во всех точках, кроме точки $x = a$ на возрастающей функции $\varphi(x)$;

и иметь место пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$;

пусть для всех $x \in (a - \delta_2; a) \cup (a, a + \delta_2)$ и некоторых $\delta_2 > 0$ имеет место

$$\frac{df(x)}{d\varphi(x)} \neq 0, \ \frac{dg(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$$

ограниченный или неограниченный предел нижнего соотношения при стремлении $x \to a$, т.е. $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ если имеет место $\lim\limits_{x \to a}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$, то предел $\frac{f(x)}{g(x)}$ соотношения существует и имеет место следующее равенство:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi[x]}\right] \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть предел отношения при $x \to a-$ $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ ограничен и равен l, а если нет, то мы можем рассмотреть соотношение $\frac{f(x)}{g(x)}$. Для этого мы добавим $f(a) = g(a) = 0$, что и функции $f(x)$ и $g(x)$ находятся в точке $x = a$.

Тогда и функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны слева от точки a.

Из этого следует $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] \to l$, что при стремлении $x \to a-$ к наименьшее положительное число $\varepsilon > 0$ для числа $\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon(\varepsilon) > 0$ существует $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2)$ для чисел имеет место:

$$\left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] \to l\right| < \varepsilon$$

Если принять $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, для каждого $x \in (a, a+\delta_1)$ мы применяя обобщенную теорему Коши, имеем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l\right| = \left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] - l\right| < \varepsilon$$

Здесь $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2)$.

Таким образом, предел $\lim\limits_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ существует по определению $[1]$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА-4. ***(Раскрытие неопределенностей в форме $\frac{\infty}{\infty}$ при стремления $x \to a$).*** Пусть выполняются следующие условия:

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некотором определенном интервале $(a-h, a)$, $h > 0$, дифференцируемы по возрастающей функции $\varphi(x)$;

иметь предел $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} g(x) = \infty$;

пусть будет для всех $x \in (a-h, a)$, $\frac{df(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$, $\frac{dg(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$;

если существует ограниченное или неограниченное предел $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$, т.е. существует $\lim\limits_{x \to a-}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$, то существует предел $\frac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место следующее равенство:

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a-}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi[x]}\right] \tag{4}$$

Доказательство. По определению можно сказать, что ограниченный предел

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a-}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] = l \in R$$

существует.

Если это действительно так $\lim\limits_{x \to a-}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] = 0$, то это так $\lim\limits_{x \to a-}\left[\frac{dg(x)}{d\varphi(x)} / \frac{df(x)}{d\varphi(x)}\right] = 0$.

Поэтому достаточно показать нам, что предел $\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, это показывает что предел $\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$. Это приводит к тому, что он одновременно $\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Предположим, что при стремлении $x\to a$ $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to\infty$, поскольку, точка a находится в половине интервала $(a-h_1,a)$ и выполняется слкдующие неравенства $f(x)\neq 0$ и $g(x)\neq 0$.

Ну положительное число ε_1, сколько угодно $0<\varepsilon_1<\dfrac{1}{2}$. Для точки x, полученной из всех интервалов $(a-h_1,a)$, мы можем выбрать так, чтобы равенство $\left|\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]-l\right|<\varepsilon,\ \delta_1=\min(h_1,h_2)$ имело место, потому что это было условием теоремы $\lim\limits_{x\to a-}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]=l\in R$.

Таким образом, предел $\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$ существует по определению $[1]$.

Теорема доказана.

Например. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{|x|}\right)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^2}}$.

Решение. Возьмем функцию $\varphi(x)=\sqrt[3]{x}$ на множестве действительных чисел R.

Тогда $\sqrt{|x|}=|\varphi(x)|^{3/2}$ и $\sqrt[5]{x^2}=|\varphi(x)|^{6/5}$ будет.

Тогда по первому обобщенному правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{|x|}\right)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\varphi(x)+|\varphi(x)|^{3/2}\right)}{\varphi(x)+(\varphi(x))^{6/5}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\sin\left(\varphi(x)+|\varphi(x)|^{3/2}\right)\right]'_{\varphi(x)}}{\left[\varphi(x)+(\varphi(x))^{6/5}\right]'_{\varphi(x)}}=1$$

Понятия обобщенных правил Лопиталя, определенные с помощью производной, полученной по возрастающей функции от вновь определенной функции, в настоящее время широко используются в специальных курсах высшей математики и в основном при изучении различных типов интегральных, интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра, Вольтерра-Стилтьеса.

Литература:

1. А.Асанов «Производная функции по возрастающей функции» Табигый илимдер журналы. Манас-Турк университети - Бишкек. 1998
2. Илин В.А, Садовничий В.А, СендовБ.Х. Математический анализ. Т I,II,III. Издателство М.Г.У. – М: 1985.
3. Рудин У. Основы математического анализа. – М.:Мир,1976.
4. Архипов Г.И., Садовничий В.А, Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – М.: Высшая школа,1999.
5. Усубакунов Р. Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр - Фрунзе. 1969
6. А.Борубаев, К.Бараталиев Б.Шабыкеев, Т.Аманкулов, Т.Камытов. Математикалык анализ. 1-2 бөлүм – Бишкек. 2009