

Абдукодирова М. Г., Толубаев Ж. О., Эралиев Ж. Т.

ТЕОРЕМА КОШИ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ФУНКЦИИ

Абдукодирова М. Г., Толубаев Ж. О., Эралиев Ж. Т.

ФУНКЦИЯНЫН ОРТОНКУ МААНИСИ ЖӨНҮНДӨГҮ КОШИНИН ТЕОРЕМАСЫ

Abdukodirova M., Tolubaev J., Eraliev J.

CAUCHY'S THEOREM ON THE AVERAGE VALUE OF A FUNCTION

УДК: 370/247-91

Азыркы учурда жогорку, атайын орто жана орто окуу жайларынын окуу планында көрсөтүлгөн математика, жогорку математика курстарында негизинен Кыргыз Республикасынын Билим берүүнүн мамлекеттик стандартынын негизинде функциянын ортонку маанилери жөнүндө теоремалары толук окутулат. Алардан биз илимий жетекчим менен бирге функциянын ортонку мааниси жөнүндөгү Кошинин теоремасына токтолууну максат кылып койдук.

Бул макалада бир аргументтүү функциянын туундусунун жардамында аныкталган функциянын ортонку маанилери жөнүндөгү Кошинин теоремасын, анын касиеттерин жана колдонулуштарын изилдедик.

Негизинен функциянын ортонку мааниси жөнүндөгү Кошинин теоремасынын аныкталышы, теореманын түшүндүрүүчү бөлүгү, шарты жана кортундусу изилденип каралды.

Функциянын ортонку мааниси жөнүндөгү Кошинин теоремасынын формулаларынын далилдөөлөрү толугу менен каралып чыкты.

Эң негизгиси функциянын ортонку мааниси жөнүндөгү Кошинин теоремасынын функциянын ортонку маанилерин аныктоодо жана аны толук изилдөөдө колдонулушу изилденди.

Аныкталган түшүнүктөр негизинен функциялардын ортонку маанилерин аныктоодо жана функцияны толук изилдөөдө кеңири колдонулат.

Ачкыч сөздөр: функция, функциянын туундусу, функциянын ортонку мааниси жөнүндөгү Кошинин теоремасы.

В настоящее время на курсах математики, высшей математики, указанных в учебном плане высших, средних специальных и средних учебных заведений, в основном на основе государственного образовательного стандарта Кыргызской Республики, преподаются теоремы о средних значениях функции. Из них мы поставили перед собой цель вместе с моим научным руководителем сосредоточиться на теореме Коши о среднем значении функции.

В этой статье мы рассмотрели теорему Коши о средних значениях функции, определенных с помощью производной функции с одним аргументом, а также ее свойства и применения.

В основном изучались определение теоремы Коши о среднем значении функции, объяснительная часть теоремы, условие и кортеж.

Полностью рассмотрены доказательства формул теоремы Коши о среднем значении функции.

Наиболее важным исследованием было использование теоремы Коши о среднем значении функции для определения средних значений функции и ее полного изучения.

Определенные понятие в основном широко используются для определения средних значений функций и полного изучения функций.

Ключевые слова: функция, производная функции, теорема Коши о среднем значении функции, формула Лагранжа.

Currently, theorems on the average values of a function are taught in mathematics and higher mathematics courses specified in the curriculum of higher, secondary specialized and secondary educational institutions, mainly on the basis of the state educational standard of the Kyrgyz Republic. Of these, we set a goal, together with my supervisor, to focus on Cauchy's theorem on the average value of a function.

In this article, we examined Cauchy's theorem on the average values of a function defined using a derivative of a function with one argument, as well as its properties and applications.

The definition of Cauchy's theorem on the average value of a function, the explanatory part of the theorem, the condition and the tuple were mainly studied.

The proofs of the formulas of Cauchy's theorem on the average value of a function are fully considered.

The most important research was the use of Cauchy's theorem on the average value of a function to determine the average values of a function and to study it fully.

The defined concept is mainly widely used to determine the average values of functions and to fully study functions.

Key words: function, derivative of a function, Cauchy's theorem on the average value of a function

Определение теоремы Коши о средних значениях, определяемых в основном с помощью производной функции с одним аргументом в основных курсах математики высших и средних специальных учебных заведений, полностью изучено с доказательством [1–5].

А их применение формул теорем для решения примеров и задач рассматривается на практических занятиях [6].

В этой статье мы с моим научным руководителем определили теоремы Коши, которые определяются с помощью производной функции, и изучили их применение.

ТЕОРЕМА 1. (Теорема Коши). Если $f(x)$, $g(x)$ функции являются непрерывными на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемыми на интервале (a, b) , то найдем хотя бы одну точку $g'(x) = 0$, $x \in (a, b)$ то,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (1)$$

равенство имеет место.

Доказательство. Мы смотрим на вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$, и она сильнее числового λ условия $\varphi(a) = \varphi(b)$ или равна

$$f(b) - f(a) = \lambda(g(b) - g(a)) = 0 \quad (2)$$

можно определить из равенства.

Теперь из условия $g'(x) = 0$, $x \in (a, b)$ следует, что $g(b) - g(a) \neq 0$. Действительно, если $g(b) - g(a) = 0$, то по теореме Ролля $g'(c) = 0$ найдена точка $c \in (a, b)$.

Последнее условие противоположно условию $g'(x) = 0$, из формулы (2)

$$-\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

мы находим, что это так.

$\varphi(x)$ функция удовлетворяет теореме Ролля на отрезке $[a, b]$. А $\xi \in [a, b]$ точка найдена $\varphi'(\xi) = 0$ или из этого следует $f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0$, и получаем [1-5]:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Теорема доказана.

Примечание 1. Когда $g(x) = x$ из формулы Коши получается формула Лагранжа, т.е. теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную на интервале (a, b) , то формула Лагранжа

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(c)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) = \\ &= f'(x_0) + f(x_0)(x - x_0) + \theta(x - x_0)(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0 \end{aligned} \quad (3)$$

мы видели выше, что мы можем делать заметки в форме.
Здесь

$$C = x_0 + \theta(x - x_0) \in (a, b), \quad 0 < \theta < 1.$$

То есть один раз дифференцируемую функцию можно представить в окрестности точки x_0 виде

$$P_1(x) = y_0 + A(x - x_0) \quad (y_0 = f(x_0), \quad A = f'(x_0)) \quad (4)$$

есть основания полагать, что он близок с линейной функцией

$$f(x) = P_1(x) + O(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0 \quad (5)$$

Это само по себе позволяет нам сформулировать задачу шире: если $y = f(x)$ функция имеет производную порядка n в точке, то ее можно представить в окрестности точки в виде

$$f(x) = P_n(x) + O(x - x_0)^n, \quad x \rightarrow x_0 \quad (6)$$

Можно ли писать в форме? Где $P_n(x) - n$ - степень многочлена,

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P'_n(x_0) = f'(x_0), \dots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \quad (7)$$

Это то же самое, что формула для многочлена (3) получим, то желательно искать в виде:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n \quad (8)$$

Что здесь $P_n(x_0) = A_0$, а

$$P_n''(x) = 2A_2 + \dots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}$$

из равенства $P'_n(x_0) = A_1$ и

$$P_n''(x) = 2A_2 + \dots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}$$

из равенства можно сделать $P_n''(x_0) = 2A_2$ и общее

$$P_n^{(k)}(x_0) = k!A_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

мы видим, что формула имеет место.

Если мы примем во внимание, что будет еще

$$P_n''(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

то

$$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

Подставляя последнее равенство в формулу (8), получаем многочлен:

$$P_n(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Давайте проверим, имеет ли место условие (6) для этого полинома. Если

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x), \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

если мы отметим, что из (6) равно

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

происхождение очевидно.

Поэтому, используя правило Лопиталя, мы получаем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n''(x)}{n!(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$$

То есть имеет место равенство

$$R_n(x) = O((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0 \quad (9)$$

Итак, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. В случае, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную порядка n в интервале (a, b) при $x \rightarrow x_0 \in [a, b]$, имеет место формула:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + O((x - x_0)^n) \quad (10)$$

Полученная формула (3) называется **формулой Тейлора** n порядка, а многочлен вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

называется *полиномом Тейлора*.

А формула (10) - *остатком формулы Тейлора в виде Пеано*.

Если в формуле (10), $x_0 = 0$ то она называется *формулой Маклорена*, остаток которой выражается в виде Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k + O((x)^n)$$

Доказанная выше теорема широко используется во многих областях анализа. Его основное значение заключается в том, что он позволяет рассматривать функцию в области рассматриваемой точки, заменяя ее алгебраическим многочленом, и это говорит о том, что текущие упущенные регистры имеют бесконечно малую величину.

Литература:

1. А.Борубаев, ж.б. «Математикалык анализ». 1-2 бөлүм - Бишкек. 2009
 2. Усубакунов Р. «Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр» - Фрунзе -1969.
 3. Илин В.А, Садовничий В.А, Сендов Б.Х. «Математический анализ» Т I,II,III – М.: Издательства М.Г.У. 1985.
 4. Рудин У. «Основы математического анализа». – М.: Мир,1976.
 5. Архипов Г.И, Садовничий В.А, Чубариков В.Н, «Лекции по математическому анализу». – М.: Высшая школа, 1999.
 6. Толубаев Ж.О, Кудаяров К.С «Математика боюнча мисалдар жана маселелер жыйнагы». Бишкек. 2005
-