УДК 517.956.6

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЛИНИЕЙ СОПРЯЖЕНИЯ y = 0

Сопуев А., д.ф.-м.н., профессор, sopuev@mail.ru
Нуранов Б. Ш., ст. преп., nuranov2014@mail.ru
ОшГУ, Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Доказаны теоремы существования и единственности решений краевых задач для уравнения третьего порядка, когда смешанный параболо-гиперболический оператор с линией сопряжения y=0 применяется к дифференциальному оператору первого порядка. Методом понижения порядка уравнения рассматриваемая задача сводится к краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения, разрешимость которого сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, имеющего единственное решение.*

Ключевые слова: *краевые задачи, линия сопряжения, условия склеивания, смешанный параболо-гиперболический оператор, методы Римана и интегральных уравнений.*

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ТИБИНИН ӨЗГӨРҮҮ СЫЗЫГЫ y = 0 БОЛГОН АРАЛАШ ПАРАБОЛА–ГИПЕРБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР

Сопуев Адахимжан, профессор, ф.-м.и.д., sopuev@mail.ru
Нуранов Бактыбек Шермаматович, улук окутуучу,
nuranov2014@mail.ru, ОшМУ, Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Жалгашуу сызыгы y=0 болгон аралаш парабола-гиперболалык оператор биринчи тартиптеги дифференциалдык операторго колдонулган учурдагы үчүнчү тартиптеги теңдеме үчүн чек аралык маселелердин чечимдеринин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теоремалар далилденген. Теңдеменин тартибин төмөндөтүү методу менен каралып жаткан маселе аралаш парабола-гиперболалык теңдеме үчүн чек аралык маселеге келтирилет, анын чечилиши жалгыз чечимге ээ болгон экинчи түрдөгү Фредгольмдун интегралдык теңдемесин чыгарууга алып келинет.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселелер, жалгаштыруу шарттары, аралаш парабола-гиперболалык операторлор, Риман жана интегралдык теңдемелер методдору.*

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A MIXED THIRD ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH A LINE y = 0 OF CHANGE IN TYPE

Sopuev Adakhimzhan, Dr Sc, professor, sopuev@mail.ru
Nuranov Baktybek Shermamatovich, senior teacher,
nuranov2014@mail.ru, OshSU, Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *Existence and uniqueness theorems are proved for solutions to boundary value problems for a third order equation when a mixed parabolic-hyperbolic operator with a conjugation line y=0 is applied to a first order differential operator. Using the method of lowering the order of the equation, the problem under consideration is reduced to a boundary value problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation, the solvability of which is reduced to solving the Fredholm integral equation of the second kind, which has a unique solution.*

Key words: *boundary value problems, interface line, connection conditions, mixed parabola - hyperbolic operator, methods of Riemannian and integral equations.*

1. Постановка задачи. В области D, ограниченной отрезками линий $AC: x+y=0,\ CB: x-y=\ell,\ BB_0: x=\ell,\ B_0A_0: y=\ell,\ B_0A: x=0\ (\ell>0)$, рассмотрим уравнение

$$L_1 L_2 u = 0 \qquad (1)$$

где

$$L_1 = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y} + c_1, y > 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + c_2, y < 0, \end{cases} \qquad L_2 \equiv \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y},$$ c_1, c_2 – *постоянные числа,*

$D = D_1 \cup AB \cup D_2, D_1 = D \cap (y > 0), D_2 = D \cap (y < 0), AB = \{(x, y): 0 < x < \ell, y = 0\}$.

Задача 1. Требуется определить функцию $u(x, y)$, которая обладает следующими свойствами:

1) $u(x, y)$ является решением уравнения (1) в области $D \setminus (y = 0)$;

2) $u(x, y), u_y(x, y), u_{yy}(x, y) \in C(\overline{D})$;

5) $u(x, y)$ удовлетворяет следующие краевые условия:

$$u|_{AA_0} = \varphi_1(y),\ u|_{BB_0} = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, , \tag{2}$$

$$u_x|_{AA_0} = \varphi_3(y),\ u_x|_{BB_0} = \varphi_4(y),\ 0 \le y \le h, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi(x), \frac{\ell}{2} \le x \le \ell, \tag{4}$$

где $\varphi_i(y)$ $(i = \overline{1,4}$, $\psi_j(j = \overline{1,2})$ – заданные гладкие функции, n – внутренная нормаль, причѐм

$$\varphi_i(y) \in C[0,h]\ (i = 1,2),\ \varphi_j(y) \in C^1[0,h]\ (j = 3,4),$$
$$\psi(x) \in C^2\left[\frac{\ell}{2}, \ell\right]. \tag{5}$$

$$\varphi_4(0) - \varphi_2'(0) = -\sqrt{2}\psi(\ell). \tag{6}$$

Отметим, что обзор краевых задач для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа третьего и четвертого порядков указаны в работах [1 - 2], а для уравнений смешанного эллиптико-гиперболический и эллиптико-параболического типов приведены в работах [3 – 13]. Классификация и приведения к каноническому виду уравнений с частными производными третьего и четвертого порядков рассмотрены в работах [14 – 15].

Если $y > 0$, то уравнение (1) представим в виде:

$$L_2 u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \upsilon_1(x, y), (x, y) \in D_1, \tag{7}$$

$$L_1 \upsilon_1 \equiv \frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \upsilon_1}{\partial y} + c_1 \upsilon_1 = 0, (x, y) \in D_1; \tag{8}$$

а когда $y < 0$, то уравнение запишем в виде

$$L_2 u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \upsilon_2(x, y), (x, y) \in D_2, \tag{9}$$

$$L_1 \upsilon_2 \equiv \frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial y^2} + c_2 \upsilon_2 = 0, (x, y) \in D_2. \tag{10}$$

Из постановки задачи 1 вытекает, что на линии $y = 0$ выполняются следующие условия склеивания:

$$\upsilon_1(x,+0)=\upsilon_2(x,-0),\ \upsilon_{1y}(x,+0)=\upsilon_{2y}(x,-0),\ 0\le x\le \ell. \qquad (11)$$

Пусть

$$\upsilon_1(x,+0)=\upsilon_2(x,-0)=\nu(x),\ \ 0\le x\le \ell, \qquad (12)$$

$$\upsilon_{1y}(x,+0)=\upsilon_{2y}(x,-0)=\mu(x),\ \ 0\le x\le \ell, \qquad (13)$$

где $\nu(x)$ и $\mu(x)$ – новые неизвестные функции, подлежащие определению.

2. Связь между функциями $\nu(x)$ и $\mu(x)$, полученное из области D_2. Решение уравнения (10) в области D_2, удовлетворяющее условия (12)–(13), запишем в следующем виде [16]:

$$\upsilon_2(x,y)=\frac{\nu(x+y)+\nu(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{c_2}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\mu(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\,y\int_{x-y}^{x+y}\frac{J_1\left(\sqrt{c_2}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\nu(\xi)d\xi, \qquad (14)$$

где J_0, J_1 – соответственно функции Бесселя нулевого и первого порядка [16].

Условие (4) запишем в следующем виде:

$$\upsilon_2(x,x-\ell)=-\sqrt{2}\psi(x),\ \ell/2\le x\le \ell. \qquad (15)$$

Используя условия (15), при $y=x-\ell$ из формулы (14) получим связь между функциями $\nu(x)$ и $\mu(x)$ в следующем виде:

$$\nu(2x-\ell)=\int_{2x-\ell}^{\ell}\frac{\sqrt{c_2}(x-\ell)}{\sqrt{(2x-\ell-\xi)(\ell-\xi)}}J_1\left(\sqrt{c_2}\sqrt{(2x-\ell-\xi)(\ell-\xi)}\right)\nu(\xi)d\xi-$$
$$-\int_{2x-\ell}^{\ell}J_0\left(\sqrt{c_2}\sqrt{(2x-\ell-\xi)(\ell-\xi)}\right)\mu(\xi)d\xi+\sqrt{2}\psi(\ell)-2\sqrt{2}\psi(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le \ell. \qquad (16)$$

Если в равенстве (16) введем замену $2x-\ell=z$ и в полученном равенстве z заменим на x, то связь между функциями $\nu(x)$ и $\mu(x)$ можно записать в виде:

$$\nu(x)=\int_x^{\ell}K_1(x,\xi)\nu(\xi)d\xi+\int_x^{\ell}K_2(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+f(x), \qquad (17)$$

где $K_1(x,\xi)=\dfrac{\sqrt{c_2}(x-\ell)}{2\sqrt{(x-\xi)(\ell-\xi)}}J_1\left(\sqrt{c_2}\sqrt{(x-\xi)(\ell-\xi)}\right)$,

$$K_2(x,\xi)=J_0\left(\sqrt{c_2}\sqrt{(x-\xi)(\ell-\xi)}\right),\ f(x)=\sqrt{2}\psi(\ell)-2\sqrt{2}\psi\left(\frac{x+\ell}{2}\right),\ 0\le x\le \ell.$$

3. Связь между функциями $\nu(x)$ и $\mu(x)$, полученная из области D_1. С с учетом условий склеивания (12), (13) и переходом к пределу при y стремящемся к нулю, из уравнения (9), получим следующее соотношение:

$$\nu''(x)=\mu(x)-c_1\nu(x),\ 0\le x\le \ell. \qquad (18)$$

Из краевых условий (2) и (3) получим

$$\nu(0)=\varphi_3(0)-\varphi_1'(0),\ \nu(\ell)=\varphi_4(0)-\varphi_2'(0). \qquad (19)$$

Для получения однородных краевых условий, вводим новую функцию $\tilde{\nu}(x)$, опреде[л]
равенством

$$\nu(x)=\varphi(x)+\tilde{\nu}(x) \tag{20}$$

где

$$\varphi(x)=\varphi_3(0)-\varphi_1'(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_4(0)-\varphi_2'(0)-\varphi_3(0)+\varphi_1'(0)\right].$$

Тогда для функции $\tilde{\mu}(x)$ получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases}\tilde{\nu}''(x)=\mu(x)-c_1\nu(x),\ 0\le x\le\ell,\\ \tilde{\nu}(0)=0,\ \tilde{\nu}(\ell)=0.\end{cases} \tag{21}$$

Решение задачи (21) можно записать в следующем виде:

$$\tilde{\nu}(x)=\int\limits_0^\ell G(x,\xi)\left[\mu(\xi)-c_1\nu(\xi)\right]d\xi, \tag{22}$$

где $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\xi(x-\ell)}{\ell},\ 0\le\xi\le x,\\ \dfrac{x(\xi-\ell)}{\ell},\ x\le\xi\le\ell\end{cases}$ функция Грина.

Отметим, что $G(0,\xi)=0,\ G(\ell,\xi)=0$, $G_x(x,x+0)-G_x(x,x-0)=-1$.

Если учесть равенство (20), то из (22) получим следующее соотношение:

$$\nu(x)=-c_1\int\limits_0^\ell G(x,\xi)\nu(\xi)d\xi+\int\limits_0^\ell G(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+\varphi(x),\ 0\le x\le\ell. \tag{23}$$

Обращая уравнение (23) относительно $\nu(x)$, получим следующее соотношение:

$$\nu(x)=\Phi_1(x)+\int\limits_0^\ell K_3(x,\xi)\mu(\xi)d\xi,\ 0\le x\le\ell, \tag{24}$$

где $K_3(x,\xi)=G(x,\xi)+\int\limits_0^\ell R_1(x,s)G(s,\xi)ds,\ \Phi(x)=\varphi(x)+\int\limits_0^\ell R_1(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$

а $R_1(x,\xi)$ резольвента ядра $-c_1G(x,\xi)$.

4. Приведение задачи к интегральному уравнению. Исключив $\nu(x)$ из уравнений (17) и (24) получим:

$$\int\limits_x^\ell K_2(x,\xi)\mu(\xi)d\xi=\int\limits_0^\ell K_4(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+\Phi_2(x), \tag{25}$$

где $\quad K_4(x,\xi)=K_3(x,\xi)-\int\limits_x^\ell K_1(x,s)K_3(s,\xi)ds,$

$$\Phi_2(x)=\Phi_1(x)-f(x)-\int\limits_x^\ell K_1(x,\xi)\Phi_1(\xi)d\xi.$$

Дифференцируя уравнение (25) , придем к следующему уравнению:

$$-K_2(x,x)\mu(x)+\int\limits_x^\ell K_{2x}(x,\xi)\mu(\xi)d\xi=\int\limits_0^\ell K_{4x}(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+\Phi_2'(x). \tag{26}$$

Если учесть, что $\forall x \in [0,\ell]: K_2(x,x) = J_0(0) = 1$, то уравнение (26) можно записать в следующем виде:

$$\mu(x) = \int_x^{\ell} K_{2x}(x,\xi)\,\mu(\xi)d\xi - \int_0^{\ell} K_{4x}(x,\xi)\,\mu(\xi)d\xi - \Phi_2'(x). \qquad (27)$$

После нахождения обращения Вольтерровской части уравнения (27), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\mu(x) = \Phi(x) + \int_0^{\ell} K(x,\xi)\,\mu(\xi)d\xi, \qquad (28)$$

где $K(x,\xi) = -K_{4x}(x,\xi) + \int_x^{\ell} R_2(x,s)K_{4x}(s,\xi)dt,\ \Phi(x) = -\Phi_2'(x) + \int_x^{\ell} R_2(x,\xi)\Phi_2'(\xi)d\xi$,

а $R_2(x,t)$ – $K_{2x}(x,\xi)$ резольвента ядра.

Пусть $\|K\|_{C(\bar{Q})} = \max\limits_{(x,\xi)\in\bar{Q}} |K(x,\xi)|$, где $Q = \{(x,\xi): 0 \le x \le \ell, 0 \le \xi \le \ell\}$.

Если
$$\ell\|K\|_{C(\bar{Q})} < 1, \qquad (29)$$

тогда интегральное уравнение (28) имеет единственное решение [17].

Решение уравнения (28) определим в виде

$$\mu(x) = \Phi(x) + \int_0^{\ell} R(x,\xi)\,\mu(\xi)d\xi,$$

где $R(x,\xi)$ – резольвента ядра $K(x,\xi)$. Тогда из (24) находим $\nu(x)$. Следовательно, функция $\upsilon_2(x,y)$, определенная по формуле (14), полностью определена.

5. Решение задачи в области D_1. В области D_1 решение уравнения (8), удовлетворяющее граничные условия:

$$\upsilon_1(0,y) = \varphi_3(y) - \varphi_1'(y) = \tilde{\varphi}_1(y),\ \upsilon_1(\ell,y) = \varphi_4(y) - \varphi_2'(y) = \tilde{\varphi}_2(y),\ 0 \le y \le h,$$
$$\upsilon_1(x,0) = \nu(x),\ 0 \le x \le \ell.$$

определим с помощью функции Грина [18]:

$$\upsilon_1(x,y) = \int_0^{y} G_{\xi}(x,y;0,\eta)\,e^{q_1(y-\eta)}\tilde{\varphi}_1(\eta)d\eta - \int_0^{y} G_{\xi}(x,y;\ell,\eta)e^{q_1(y-\eta)}\,\tilde{\varphi}_2(\eta)d\eta +$$
$$+\int_0^{\ell} G(x,y;\xi,0)\,e^{q_1 y}\mu(\xi)d\xi, \qquad (30)$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\} -$$

функция Грина.

В области D_1 решение задачи 1 сводится к решению следующей задачи.

Задача 2. *Найти в области D_1 решение уравнения (8), удовлетворяющее условия (2).*

Для решения задачи 2 поступим следующим образом. Область D_1 разобьём на две части: $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$, где $D_{11} = \{(x,y): 0 < x < \ell,\ 0 < y < \ell - x\}$, $D_{12} = \{(x,y): 0 < x < \ell,\ \ell - x < y < \ell\}$.

В области $D_{11}=\{(\xi,\eta): 0<\xi<\ell, 0<\eta<\ell-\xi\}$, выберем произвольную точку $M_1(x,y)$. Через точку $N_1(0,\ell-y)$ проведём прямую $N_1M_1: \eta=-\xi+x+y$. Теперь рассмотрим криволинейный интеграл 2-го рода:

$$\int\limits_{N_1M_1}\left[u_\xi(\xi,\eta)-u_\eta(\xi,\eta)\right]d\xi=\int\limits_{N_1M_1}\upsilon_1(\xi,\eta)d\xi .$$

В развернутом виде это равенство имеет вид:

$$\int\limits_0^x\left[u_\xi(\xi,-\xi+x+y)-u_\eta(\xi,-\xi+x+y)\right]d\xi=\int\limits_0^x\upsilon_1(\xi,-\xi+x+y)d\xi .$$

Учитывая, что $u_\xi(\xi,-\xi+x+y)-u_\eta(\xi,-\xi+x+y)=\dfrac{\partial}{\partial\xi}u(\xi,-\xi+x+y)$ и первое краевое условие (2), из предыдущего равенства имеем

$$u(x,y)=\varphi_1(x+y)+\int\limits_0^x\upsilon_1(\xi,-\xi+x+y)d\xi,\ 0\le y\le\ell-x.$$

Аналогичным образом, в области $D_{12}=\{(\xi,\eta): 0<\xi<\ell, \ell-\xi<\eta<\ell\}$, выберем произвольную точку $M_2(x,y)$. Через точку $N_2(0,\ell-y)$ проведём прямую $M_2N_2: \eta=-\xi+x+y$ и рассмотрим криволинейный интеграл 2-го рода:

$$\int\limits_x^\ell\left[u_\xi(\xi,-\xi+x+y)-u_\eta(\xi,-\xi+x+y)\right]d\xi=\int\limits_x^\ell\upsilon_1(\xi,-\xi+x+y)d\xi .$$

Отсюда получим решение задачи 2, удовлетворяющее второе краевое условие (2) в следующем виде:

$$u(x,y)=\varphi_2(x+y-\ell)-\int\limits_x^\ell\upsilon_1(\xi,-\xi+x+y)d\xi,\ \ell-x\le y\le\ell.$$

Таким образом, решение задачи 2 представим в виде

$$u(x,y)=\begin{cases}\varphi_1(x+y)+\int\limits_0^x\upsilon_1(\xi,-\xi+x+y)d\xi,\ 0\le y\le\ell-x,\\ \varphi_2(x+y-\ell)-\int\limits_x^\ell\upsilon_1(\xi,-\xi+x+y)d\xi,\ \ell-x\le y\le\ell,\end{cases}\qquad(31)$$

где $\upsilon_1(x,y)$ определена по формуле (30). Отметим, что решение задачи 2 в области D_1 может иметь разрыв первого рода на линии $y=\ell-x$. Если потребуем выполнения условия согласования:

$$\varphi_2(0)=\varphi_1(\ell)+\int\limits_0^\ell\upsilon_1(\xi,\ell-\xi)d\xi,\qquad(32)$$

то $\upsilon_1(x,y)\in C(D_1)$.

6. Решение задачи в области D_2. Из формулы (31) непосредственно можно определить след функции в следующем виде:

$$\tau(x)=u(x,0)=\varphi_1(x)+\int\limits_0^x\upsilon_1(\xi,-\xi+x)d\xi,\ 0\le x\le\ell.\qquad(33)$$

Тогда решение задачи 1 в области D_2, удовлетворяющее уравнение (9) и краевое условие (33), определяется по формуле: $u(x,y)=\tau(x+y)+\int\limits_{x+y}^x\upsilon_2(\xi,-\xi+x+y)d\xi,\ (x,y)\in D_2$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (5), (6), (29) и (32). Тогда задача 1 имеет единственное решение.

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. - Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо– гиперболического типа. - Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.

3. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. - 448 с.

4. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. — Ташкент: Фан, 1974. - 156 с.

5. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. — Ташкент: ФАН, 2010. - 356 с.

6. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. -М.:Наука,2006.-287с

7. Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов. Автореферат диссертации д-ра физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1982.

8. Бобылева Л.А., Смирнов М.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно–составного типа 4-го порядка // Известия вузов. Математика. – 1972, №5. – С. 15-21.

9. Смирнов М.М. Краевая задача со смещением для уравнения смешанно–составного типа 4-го порядка // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. №9. – С. 1678-1686.

10. Жегалов В.И. Некоторые задачи для уравнения смешанного-составного типа в бесконечной области // Труды семинара по краевым задачам. 1972. Вып. 9. – С. 75-85.

11. Жегалов В.И. Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казанское математическое общество. – 2001. – 226 с.

12. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 304 с.

13. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. – М. : Наука, 2016. – 272 с.

14. Джураев Т.Д. Попёлек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1734-1745.

15. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. - Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

17. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1975. – 304 с.

18. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. - М.: Физматлит, 2001. – 576 с.