

Министерство образования, науки и молодежной
политики Кыргызской Республики

Ошский технологический университет

Кафедра: «Автомобильные дороги и аэродромы»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по геодезии

Ош-2006.

Раздел 1

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ГЕОДЕЗИИ

Лекция 1. Основные понятия §

1. Предмет геодезии

Геодезия - наука о методах определения фигуры и размеров Земли и изображении ее поверхности на картах и планах, а также о способах проведения специальных измерений, необходимых для решения разнообразных задач при изысканиях, проектировании, строительстве и эксплуатации инженерных сооружений. Геодезия - греческое слово, в переводе на русский язык означает землеразделение. Обилие и разнообразие задач, решаемых геодезией, вызвало деление ее на ряд относительно самостоятельных научных и научно-технических дисциплин. Так, разработка методов определения фигуры и размеров Земли, изучение горизонтальных и вертикальных движений земной коры, создание государственной геодезической сети страны - предмет *высшей* геодезии. Изучением методов изображения сравнительно небольших участков поверхности Земли на плоскости занимается *топография*. Разработка теории и способов изображения на плоскости значительных частей земной поверхности составляет предмет *картографии*.

Фототопография и *аэрофототопография* занимаются разработкой методов создания планов и карт по фотоснимкам и аэроснимкам местности. *Инженерная* (прикладная) геодезия занимается изучением методов геодезических работ, выполняемых при изысканиях, проектировании, строительстве и эксплуатации инженерных сооружений, включая наблюдения за осадками и деформациями последних.

§ 2. Роль геодезии в народном хозяйстве и обороне страны

Рост производительных сил страны невозможен без знания ее территории в топографическом отношении. Эта задача успешно решается при помощи карт различных масштабов, создаваемых по результатам геодезических работ. Геодезия играет важную роль при решении многих весьма ответственных задач, например: при изыскании, проектировании и строительстве гидротехнических сооружений (ГЭС, судоходных, оросительных и осушительных каналов и пр.), железных и автогужевых дорог, городов и сельских населенных пунктов, аэродромов, подземных сооружений (метрополитена, шахт, кабельных линий, различных трубопроводов), воздушных сетей (линий связи и электропередач); большой объем геодезических работ выполняется при землеустройстве и лесоустройстве.

Рост технического уровня производства и научных исследований положил начало созданию уникальных сооружений, как, например, автоматических линий большой протяженности, мощных ускорителей ядерных частиц и пр. Монтаж оборудования такого рода сооружений должен быть выполнен с весьма высокой точностью (10-20 мкм в плане и по высоте); опыт показывает, что такие задачи успешно решаются методами геодезии.

Геодезические методы измерений весьма высокой точности широко применяются при наблюдениях за деформациями и осадками инженерных сооружений в периоды их строительства и эксплуатации. Велико значение геодезии в обороне страны. Вся армия в целом нуждается в картах различных масштабов; по ним изучают местность, разрабатывают боевые операции войск. Пуск ракет различной дальности действия осуществляется с использованием геодезической информации. Некоторые рода войск имеют в своем составе геодезические подразделения.

§ 3. Связь геодезии с другими научными дисциплинами

Современная геодезия широко использует при решении стоящих перед нею задач достижения в области математики, астрономии, физики, электроники, географии, геоморфологии и других научных дисциплин. Математика вооружает геодезию средствами математического анализа и методами обработки результатов геодезических измерений. Астрономия обеспечивает геодезию исходными данными. Достижения в области физики, механики и электроники помогают создавать новые оптические приборы. Знания в области географии и геоморфологии способствуют правильному пониманию и изображению на топографических планах и картах ландшафта местности. В свою очередь, планы и карты служат основой для изображения и анализа научных и практических результатов в географии, геологии и других науках о Земле. Картографические материалы необходимы для изучения природных ресурсов, планомерного размещения производительных сил страны.

Раздел 2

СВЕДЕНИЯ О ФИГУРЕ ЗЕМЛИ И СИСТЕМАХ КООРДИНАТ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ГЕОДЕЗИИ

Лекция 2. Форма и размеры Земли

§ 4. Отвесная линия и уроне́нная поверхность

Геодезические измерения, выполняемые в любой точке физической поверхности Земли, связаны с направлением отвесной линии в этой точке. Например, при измерении горизонтального угла теодолитом ось вращения его совмещают с отвесной линией, проходящей через вершину угла. Геометрическое нивелирование выполняют горизонтальным лучом визирования, т.е. перпендикулярным отвесной линии в точке установки нивелира. Измеренное расстояние между точками местности проектируют на горизонтальную плоскость при помощи отвесных линий в этих точках. Простейший прибор - *отвес* показывает направление действия силы тяжести Земли; подвешенный на нити груз под действием силы тяжести натягивает нить, которая и указывает направление отвесной линии в данной точке. Из курса физики известно, что сила тяжести S есть равнодействующая двух сил: силы притяжения Земли Γ и центробежной силы P (рис. 1).

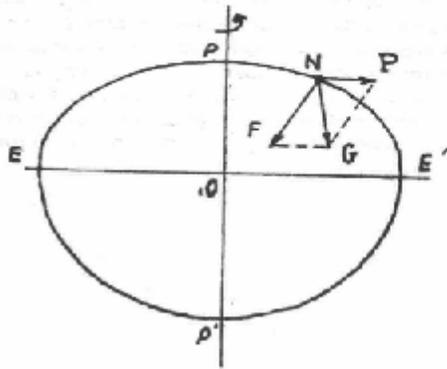


Рис. 1. К понятию о силе тяжести Земли



Рис. 2. Направления силы тяжести Земли

Вектор силы P направлен приблизительно к центру Земли. Наибольшее значение сила K имеет на полюсах и наименьшее - на экваторе. Сила P имеет максимальное значение на экваторе, где она составляет приблизительно 1:288 от величины P . На полюсах сила P равна нулю. Следовательно, сила S на земной поверхности непрерывно увеличивается от экватора к полюсам и на полюсах имеет максимальное значение. В свою очередь, сила земного притяжения Γ есть равнодействующая притяжений всех масс, заключенных в теле Земли. Значит, величина и *направление* силы обусловлены распределением этих масс (рис. 2). Отсюда следует, что и направление отвесной линии тоже зависит от распределения масс в теле Земли.

Из курса физики известно, что в гравитационном поле Земли работа силы тяжести не зависит от формы пути $NO4$ (рис. 3), а зависит только от положения начальной и конечной точек этого пути. Поле, обладающее таким свойством, называется потенциальным. Во всяком потенциальном поле можно провести так называемые *уровенные* поверхности, т.е. такие поверхности, при движении материальной точки по которым сила поля работы не совершает. Нетрудно доказать, что в гравитационном поле Земли расстояние между *уровенными* поверхностями убывает к полюсам.

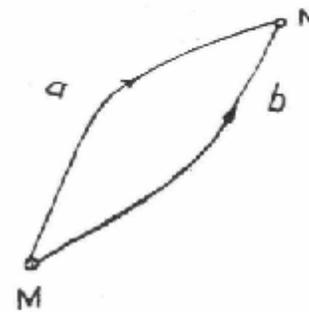


Рис. 3. К понятию о работе силы тяжести

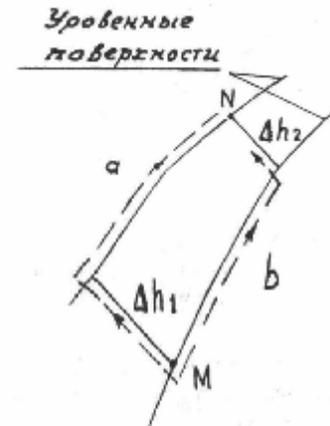


Рис. 4. Непараллельность *уровенных* поверхностей

«si? Возьмём две точки М и N в плоскости земного меридиана, лежащие на разных, но близких одна к другой, уровневых поверхностях (рис. 4). Согласно сказанному выше о работе силы тяжести, можем написать выражения для работы по пути MaN и по пути MbN и приравнять их:

$$g_1 \Delta h_1 = g_2 \Delta h_2,$$

где Δh и bhi - расстояния между уровневыми поверхностями, g_i и gz - величины ускорений силы тяжести в точках М и N.

Сила тяжести G возрастает к полюсам, следовательно, $gz > g_i$. Поэтому из равенства легко увидеть, что $Ah_2 < Ah_1$. Вывод: уровневые поверхности гравитационного поля Земли между собой непараллельны и

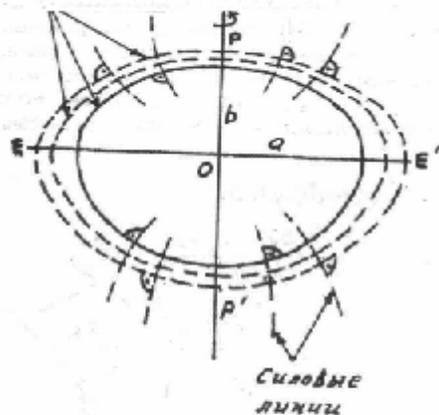


Рис. 5. Уровневые поверхности и силовые линии гравитационного поля Земли



Рис. 6. Направление отвесной линии

расстояние между ними уменьшается к полюсам.

Уровневые поверхности.

Линии, нормальные к уровневым поверхностям, называются силовыми линиями (рис. 5). Касательная к силовой линии в данной точке есть отвесная линия в этой точке. Следовательно, отвесная линия является нормалью к уровневой поверхности (рис. 6). Поверхность воды в спокойном состоянии является одной из уровневых поверхностей. Можно провести бесчисленное множество уровневых поверхностей; каждая из них вблизи земной поверхности будет поверхностью неразрывной, замкнутой, без складок и рёбер. Вид уровневой поверхности зависит от распределения масс в теле Земли.

При равномерном распределении масс (рис. 7) эта поверхность будет занимать положение, показанное пунктиром. При наличии массы М с преувеличенной плотностью уровневая поверхность будет иметь некоторый выгиб кверху.

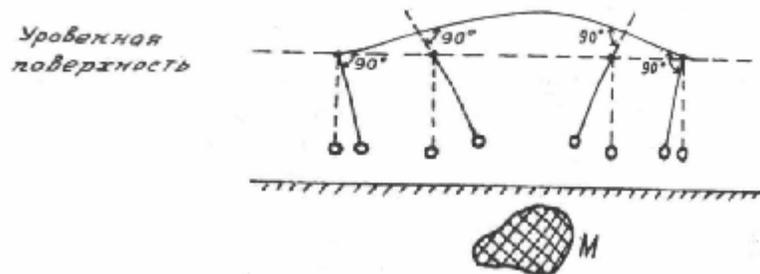


Рис. 7. Вид уровневой поверхности § 5.

Основная уровневая поверхность. Геоид. Эллипсоид

Как отмечалось выше, геодезические измерения связаны с направлением отвесной линии в тех точках, в которых они выполнялись. Значит, в каждой такой точке результаты измерений могут быть отнесены именно к той уровневой поверхности, которая проходит через данную точку. Но в таком случае результаты измерений на пунктах какой-либо геодезической сети окажутся отнесенными к различным уровневым поверхностям, и замкнутых фигур в сети не образуется. В связи с этим возникает необходимость приведения результатов всех геодезических измерений прежде всего к некоторой данной или принятой в качестве общей исходной уровневой поверхности.

В качестве основной уровневой поверхности Земли принята поверхность вод морей и океанов в их невозмущенном (спокойном) состоянии, мысленно продолженная под материками таким образом, что в любой ее точке она нормальна (перпендикулярна) отвесной линии в этой точке. Тело, ограниченное основной уровневой поверхностью, называют *геоидом*,

Вследствие неравномерного распределения масс внутри Земли поверхность геоида является весьма сложной и не выражается ни одной из рассматриваемых в математике поверхностей. Поэтому возникла необходимость замены поверхности геоида вспомогательной, возможно ближе подходящей к ней поверхности. В первом приближении уровневую поверхность Земли можно заменить сферой определенного радиуса. Но наиболее близкой к геоиду является фигура, образованная вращением эллипса PE PE (рис. 8) вокруг малой оси PP, называемой *полярной* осью.

- В связи с этим возникает необходимость в определении размеров земного эллипсоида, т.е. в определении его параметров, большой полуоси a , малой полуоси b , сжатия $a = (a - b)/a$ и данных, определяющих положение эллипсоида относительно геоида. Эллипсоид, наиболее близко подходящий к фигуре геоида в целом, называется *общим земным эллипсоидом*.

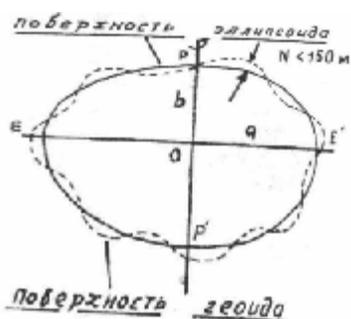


Рис. 8. Общий земной эллипсоид

Эллипсоид с определенными параметрами, ориентированный в теле Земли и принятый для производства всех карто-графо-геодезических работ в данной стране, называется *референц-эллипсоидом*. В России и странах СНГ для производства картографических и геодезических работ принят эллипсоид, определение размеров которого и ориентирование в теле Земли выполнены под руководством Ф.Н. Красовского.

- Эллипсоид Красовского имеет

следующие размеры:

- $a = 1/(298,3 \pm 1,0);$ $a = 6378245 \pm 60 \text{ м.}$

В настоящее время за фигуру Земли принимается тело, ограниченное физической поверхностью Земли, т.е.: на суше - поверхностью ее твердой оболочки, а на территории океанов и морей - их невозмущенной поверхностью.

Изучение фигуры физической поверхности Земли производится путем определения положения точек местности в избранной системе координат на поверхности фигуры относимоеTM, т.е. на поверхности референц-эллипсоида Красовского.

Отметим, что при решении многих задач геодезии за фигуру Земли достаточной для практических целей точно принимается шар, равновеликий по объёму эллипсоиду Красовского, с радиусом $R = 6371,11 \text{ км}$. Для сравнительно небольших участков земной поверхности в качестве поверхности относимости можно принять горизонтальную плоскость.

Горизонтальной называют плоскость, которая нормальна (перпендикулярна) отвесной линии в данной точке поверхности Земли.

§ 6. Расчёт размеров участка сферической (уровенной) поверхности Земли для обобщения её до горизонтальной плоскости

Пусть ABD (рис. 9) - часть уровенной поверхности Земли, принимаемой за сферу с центром C и радиусом R . Обозначим длину дуги ABD через s . Проведем в средней точке B дуги ABD касательную к ней и продолжим радиусы CA и CD до пересечения с касательной в точках A' и D' . Рассчитаем, какая погрешность произойдет от замены дуги ABD отрезком

$$\Delta s = d - s, \quad (2.1)$$

Обозначим центральный угол ACD через ε . Тогда

$$d = 2A'B = 2BD' = 2R \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \text{ и}$$

$$\Delta s = 2R \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} - s. \quad (2.2)$$

Раскладывая $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}$ в ряд и ограничиваясь при этом двумя членами разложения, получим

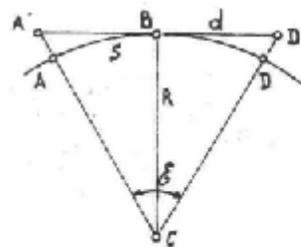
$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^3 + \dots, \quad (2.3)$$

где ε - выражено в радианной мере. В свою очередь, как центральный угол

$$\varepsilon = \frac{s}{R}, \quad (2.4)$$

поэтому формула (2.3) примет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{s}{2R} + \frac{1}{3} \left(\frac{s}{2R} \right)^3. \quad (2.5)$$



Подставив (2.5) в (2.2), получим

$$\Delta s = 1/12(s^3/R^2). \quad (2.6)$$

Найдём отношение погрешности Δs к s , которое в геодезии принято называть *относительной погрешностью*. Будем иметь

$$\Delta s / s = 1/12(s/R)^2. \quad (2.7)$$

Максимальная точность линейных измерений на поверхности Земли составляет $\Delta s / s \leq 1:1000000$.

Рис. 9. Влияние кривизны Земли на горизонтальные расстояния

касательной $A'D' = d$. Для этого определим разность

с учетом равенства (2.7) вычислим $s = \sqrt{12} \cdot R / 1000 \ll 22 \text{ Л км}$ при 1,11 км. Следовательно, участок сферической поверхности Земли радиусом 22,1 км, площадью 383,6 км² можно с практически неощутимой погрешностью принять за плоский, а кривизной поверхности Земли в масштабе указанного участка можно пренебречь.

3. Определение положения точек земной поверхности и применяемые для этого в геодезии системы координат

В геодезии различают три вида проекций в геодезии. Величины, подлежащие измерению

Физическая поверхность Земли - сочетание различного рода неровностей: холмов, котловин, хребтов, ложин, балок, оврагов и т.д. Изучение такой сложной поверхности в геодезии применяют метод проекций.

Как фигуру Земли в первом приближении принимают за шар, применяют способ проектирования земной поверхности на сферу. Доказано, что поверхности геоида и эллипсоида на некотором участке совпадают, образуя одну уровенную поверхность MN (рис. 10,а). Пространственный многоугольник ABCDEF физической поверхности Земли проецируют на поверхность MN отвесными линиями. Точки a, b, c, d, e, f, в отвесные линии пересекают уровенную поверхность MN, называясь горизонтальными проекциями соответствующих точек местности, а огибающая abcdef - горизонтальной проекцией многоугольника ABCDEF.

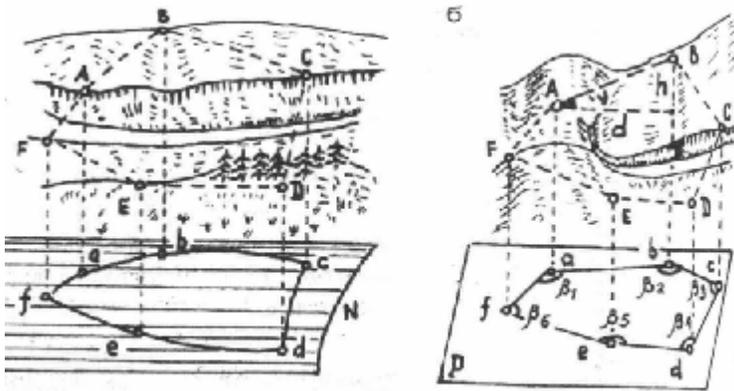


Рис. 10. Схемы к методу проекций

Чтобы по горизонтальной проекции можно было измерить пространственный многоугольник, очевидно, необходимо

показать, что расстояния точек местности Aa, Bb, Cc, ..., Ff, т.е. расстояния точек местности от

уровенной поверхности Земли, называемые *высотами* местности, было показано, что небольшой участок сферической

поверхности Земли можно заменить горизонтальной касательной к поверхности в центре этого участка.

Местность, заключенная в многоугольнике АВ, если ее размеры, то при проектировании у

заменяют горизонтальной плоскостью Р. Линии проекции и т.д. перпендикулярны плоскости Р*, стороны а

ними являются горизонтальными проекциями соответствующих углов местности, а плоский многоугольник

проекцией многоугольника ABCDEF, расположенный на поверхности Земли. Непосредственными измерениями получают: расстояния АВ, ВС, ..., FA, *горизонтальными*

расстояниями, *превышения h* и *углы наклона v* линии местности, например

длины ее проекции на горизонтальную плоскость $cos v$. Длина ортогональной проекции

горизонтальную плоскость называется *горизонтальными* проекциями этой линии. *Углом наклона (вертикальным углом)*

называется *линейный угол* в отвесной плоскости между проекцией на горизонтальную плоскость. По измерениям вычисляют высоты точек местности. Например, по

данным о точке А и превышению *И* получают

§ 8. Понятия о плане, карте, профиле линии местности

Карта, план - чертежи поверхности Земли, ее изображения в иной проекции. *Планом* местности называется уменьшенное изображение на плоскости (на бумаге, лавсане и т.д.) проекции небольшого участка земной поверхности.

Уменьшенное и искаженное вследствие впадин изображение на плоскости горизонтальной проекции или всей земной поверхности, построенное по геодезическим законам, называется *картой* местности.

* В пределах небольшого участка местности отвесные линии параллельными.

Карты и планы называются *контурными*, если на них изображены лишь контуры и предметы местности. Если кроме перечисленного изображен и *рельеф* местности, т.е. совокупность неровностей земной поверхности, то карты и планы называют *топографическими*. Сечение поверхности Земли отвесной плоскостью, проходящей через концы отрезка линии АВ (рис. 12), называется *профилем* линии АВ местности. Его уменьшенное изображение на бумаге также называется *профилем*. *Отвесной* называют плоскость, содержащую отвесную линию.

§ 9. Астрономические и геодезические координаты. Высоты точек поверхности Земли

Для определения формы и размеров Земли, изображения поверхности ее на планах и картах необходимо:

1) определить параметры и выполнить ориентирование в теле Земли достаточно простой в геометрическом отношении фигуры относительно *референт-эллипсоида*,

2) из результатов геодезических, астрономических и гравиметрических измерений на поверхности Земли получить величины (координаты), однозначно определяющие положение множества точек поверхности Земли относительно поверхности эллипсоида;

3) по результатам математической обработки материалов геодезических измерений определить вид физической поверхности Земли и фигуру Земли в целом.

Положение точки на поверхности Земли определяется ее географическими координатами: *широтой* и *долготой*.

По способу определения *географические координаты* могут быть: *астрономическими* и *геодезическими*.

Астрономические координаты определяют по данным наблюдений небесных светил, и зависят они от направления отвесной линии в данной точке земной поверхности. Примем в качестве уровневой поверхности сферу с центром c (рис. 11, а). PP' - ось вращения Земли. Исходными в указанной системе координат являются плоскость экватора $QBDQ'$ и плоскость начального меридиана $PEDP$. Согласно международному соглашению, в России за начальный меридиан принят *Гринвичский*.

* Меридиан, проходящий через центр главного зала Гринвичской обсерватории; *Гринвич* - городской округ г. Лондона.

Астрономической широтой y точки K называется угол KCB , образованный отвесной линией KC в точке K с плоскостью $QBDQ'$ небесного экватора (т.е. с плоскостью, перпендикулярной оси вращения Земли). Этот угол измеряется дугой

KB меридиана точки K от $0'$ (на экваторе) до $90'$ (на полюсе). Широта бывает северная и южная, в зависимости от того, в каком полушарии расположена точка (в северном или южном).

Астрономической

долготой λ точки K называется двугранный угол, образованный плоскостями астрономических меридианов данной точки и начального.

Плоскостью астрономического меридиана данной точки называется плоскость, проходящая через отвесную линию в этой точке и параллельная оси вращения Земли. Счет долгот ведется от гринвичского меридиана на восток и запад; их величина может изменяться от 0 до 180° ; так, точка K имеет восточную долготу, а точка M - западную. Геодезические координаты относятся к принятому земному эллипсоиду и определяются в данной точке положением

нормали к поверхности эллипсоида относительно плоскостей: экватора и начального меридиана (рис. 11,б).

Геодезической широтой B точки K называется угол KOB , который образует нормаль KC^1 с плоскостью экватора.

Геодезической долготой L точки K называется двугранный угол, образованный плоскостями геодезических меридианов данной точки и начального.

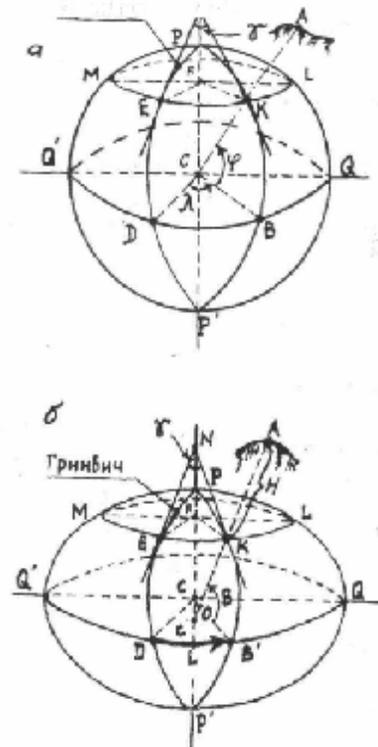


Рис. 11. Географические координаты

Плоскостью геодезического меридиана данной точки называется плоскость, содержащая нормаль к поверхности эллипсоида в этой точке и полярную ось PP . Сечение поверхности эллипсоида этой плоскостью называется геодезическим меридианом. Геодезические меридианы - эллипсы. Сечения поверхности эллипсоида плоскостями, перпендикулярными (нормальными) полярной оси, - геодезические параллели. Геодезические параллели - окружности. Счет и название геодезических широт аналогичен астрономическим. Счет геодезических долгот ведется от гринвичского меридиана на восток от 0° до 360° .

Положение точки на поверхности земного эллипсоида вполне определяется геодезическими координатами: геодезической широтой B и геодезической долготой L . Для определения положения точки A , находящейся на физической поверхности Земли (см. рис. 11,а), необходимо знать третью величину - *высоту* (см. рис. 11,а и рис. 12).

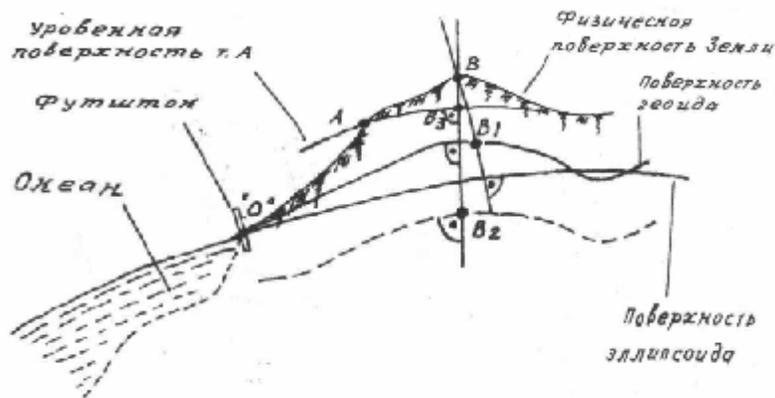


Рис. 12. Высоты точек

Высоты бывают: *абсолютные* $H = BB_1$, *условные* $H' = BB_2$ и *относительные* (или *превышения*) $H'' = BB_3$. *Абсолютной* высотой точки земной поверхности называется расстояние ее до основной уровневой поверхности Земли, измеренное по нормали к поверхности эллипсоида. В России и странах СНГ в качестве основной уровневой поверхности принята поверхность, совпадающая со средним уровнем воды Финского залива Балтийского моря.

Счет абсолютных высот ведется от ноля Кронштадского футштока*.

Условной высотой точки земной поверхности называется расстояние этой точки до уровневой поверхности, не совпадающей с основной, измеренное по отвесной линии в данной точке. *Превышением* h (относительной высотой) точки B над точкой A называется расстояние точки B до уровневой поверхности точки A , измеренное по нормали к этой поверхности. Геодезические измерения по определению высот точек земной поверхности называются *нивелированием*. *Численное выражение высоты точки называется высотной отметкой* или просто *отметкой*.

§10. Влияние кривизны Земли на определение высот точек

При замене небольшого участка BD (рис. 13) уровневой поверхности Земли касательной BD^1 (см. §6 и рис. 9) точка D перемещается в D^1 , в связи с чем меняется ее высота на величину p . Величина p выражает влияние кривизны Земли на высоты точек и называется поэтому поправкой за кривизну Земли. Определим ее величину.

Из прямоугольного треугольника $CB D^1$ имеем

$$R^2 + d^2 = (R + p)^2. \quad (2.8) \text{ Далее}$$

получим

$$d^2 = 2Rp + p^2, \quad (2.9)$$

откуда

$$p = d^2 / (2R + p). \quad (2.10)$$

Так как p весьма мало по сравнению с R , то в знаменателе правой части равенства его можно отбросить. Тогда окончательно получим

$$p = d^2 / 2R. \quad (2.11)$$

Легко подсчитать, что при $d = 1$ км $R = 6371$ км $p = 78,5$ мм.

13. *Поправка за кривизну Земли* - 1 км и $R = 6371$ км $p = 78,5$ мм, а при $d = 100$ м $p = 0,8$ мм. Следует иметь в виду, что высоты точек местности часто необходимо знать с точностью до 1,0 мм. Поэтому даже при коротких расстояниях (50 -г- 100 м) влияние кривизны Земли на высоты точек необходимо учитывать.

* Он представляет собой медную пластину, замурованную в один из устоев моста обводного канала в Кронштадте; нанесенная на пластину черта является нулем футштока. Название образовалось путем соединения английского слова 'foot' (фут) с немецким 'stock' (палка, шест).

Лекция 4. Зональная и условная системы плоских прямоугольных координат

§11. Проекция Гаусса - Крюгера*

В СССР с 1928 г. для составления топографических карт используется равноугольная (конформная) поперечно-цилиндрическая проекция, предложенная К.Ф. Гауссом. Сущность проекции Гаусса состоит в следующем. Представим, что земной шар вписан в цилиндр (рис. 14), который касается его по центральному (осевому) меридиану зоны ГОТ. Ось цилиндра NN^1 расположена в плоскости экватора QOQ и проходит через центр C шара. Плоское изображение-каждой зоны получают путём проектирования ее определенным образом на боковую поверхность цилиндра, касающегося осевого меридиана зоны. После чего цилиндр разрезается по образующей KK' и его боковая поверхность развёртывается на плоскости. При проектировании зоны Гаусс поставил условие, чтобы изображение малого участка на цилиндре было *подобно* соответствующему участку на сфере; следовательно, углы между соответствующими линиями на шаре и на плоскости равны между собой.

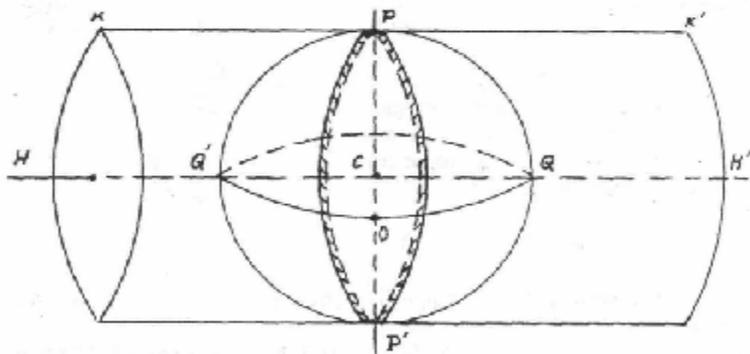


Рис. 14. К проекции Гаусса - Крюгера

* Проекция разработана Гауссом в 30-х годах XIX в.; в 1912 г. Крюгер в работе "Конформное изображение земного эллипсоида на плоскости" предложил формулы для вычисления в этой проекции.

Выполнение этого условия приводит к увеличению длин линий на плоскости. Величину искажения A_s линий проекции можно вычислить по формуле

$$A_s = \frac{y^2}{2R'} \quad (2.12)$$

где $A_s = S - s$; s - длина линии на шаре; S - длина проекции линии; Y - расстояние от осевого меридиана зоны до средней точки линии; R - радиус земного шара ($R = 6371,11$ км).

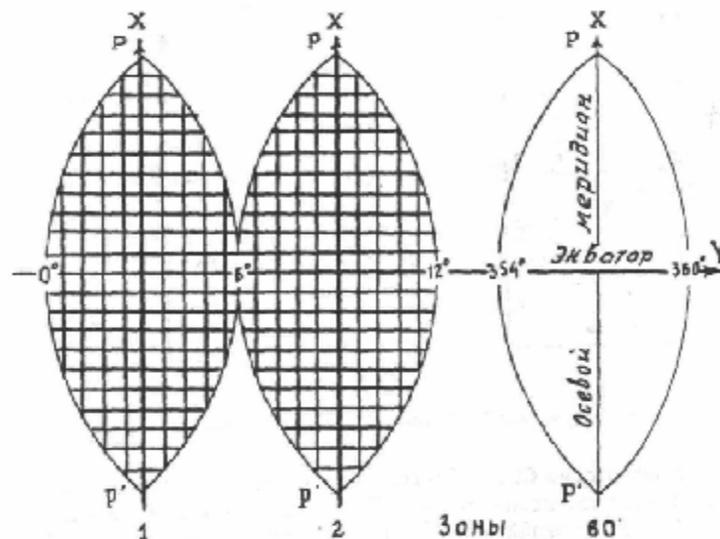


Рис. 15. Проекция зон

Для территории СНГ на широтах $36^\circ < \text{ш} < 70^\circ$ величина линейного искажения на краях зоны меняется от $1/1100$ до $1/6000$. Такие величины не превышают графических погрешностей построения карт масштаба $1:10\,000$, поэтому масштаб изображения на таких и более мелкого масштаба картах в проекции Гаусса остается постоянным. Для планов масштабов $1:5000$ и крупнее применяются трехградусные зоны. Счет зон ведется от Гринвичского меридиана на восток. Проектируя последовательно одну зону за другой, получают изображение поверхности земного шара в виде шестидесяти плоских двугольников (рис. 15).

Географическая система плоских прямоугольных координат

Эта система образуется двумя взаимно перпендикулярными осями, представляющими изображения осевого меридиана зоны и экватора плоскости. Изображение осевого меридиана принимается за ось абсцисс с положительным направлением на север. Ось ординат является изображением экватора с положительным направлением на восток.

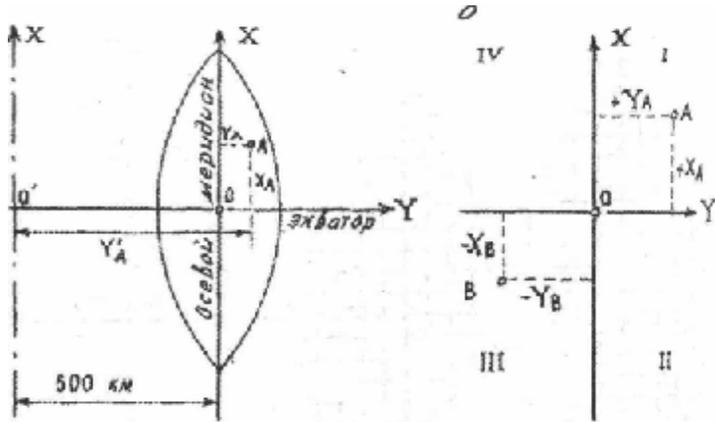


Рис. 16. Системы прямоугольных координат

Для территории СНГ, расположенной в северном полушарии, абсциссы точек положительные. Чтобы сделать положительными и ординаты точек, условились перенести начало счета ординат к западу от меридиана на 500 км (рис. 16). Эти ординаты называются *преобразованными*. Номер зоны, к которой относятся координаты, указывается сленным значением преобразованной ординаты. Например, точка с абсциссами $x = 6015,76$ и $y = 9652,66$ км находится в зоне №9 на расстоянии 152,66 км к востоку от осевого меридиана этой зоны.

Условная система плоских прямоугольных координат

Для инженерно-геодезических работ, выполняемых на небольших территориях, применяют условную систему прямоугольных координат (рис. 16, б). Абсциссы (оХ) такой системы совмещают с меридианом некоторой точки участка либо располагают по основным осям сооружений.

Положительное направление оси абсцисс (оХ) (на чертеже - вверх), оси ординат (оУ) - на восток (на чертеже - вправо). Применяемая в геодезии система прямоугольных координат называется *географической*. В ней поворот от оси оХ к оси оУ (на наименьшем расстоянии) осуществляется по движению часовой стрелки.

Раздел 3

ОРИЕНТИРОВАНИЕ ЛИНИЙ

Лекция 5. Ориентирование. Ориентирующие углы

Ориентировать линию местности - значит определить направление линии по отношению к географическому меридиану. Под направлением линии понимают горизонтальный угол между географическим меридианом и линией, положение которой известно или может быть весьма точно определено на земной поверхности, - *меридианы*: истинные или магнитные. Горизонтальные углы, определяющие направление линии, называются ориентирующими. Это: истинные и магнитные азимуты и румбы; дирекционные углы и румбы.

§ 14. Истинные азимуты и румбы линий местности

Истинным азимутом линии местности в данной точке называют горизонтальный угол A (рис. 17), отсчитываемый по часовой стрелке от северной части истинного (географического) меридиана до ориентируемой линии. Истинные азимуты при 0° до 360° . В геодезии принято различать *прямое* и *обратное* направления линий местности. Так, если KL считать прямым направлением линии, то LK будет обратным направлением той же линии. В точке M угол A является прямым азимутом линии KL в точке M . Из рис. 17 видно, что

т.е. прямой и обратный азимуты линии в данной точке равны. В различных точках Земли меридианы не параллельны, поэтому азимуты одной и той же линии в различных ее точках будут разными. Так, в точках M_1 и M_2 линии KL (см. рис. 17) истинные азимуты A_1 и A_2 не параллельны меридиану $СЮ$ точки M . Поэтому азимуты A_1 и A_2 равны соответственно A_1 и A_2 . Если провести через M_1 и M_2 параллельные меридиану $СЮ$ точки M , то азимуты A_1 и A_2 будут равны A . Поэтому

$$A' = A + \gamma,$$

$$A = A - \gamma, \quad (3.3)$$

где γ - угол сближения меридианов - угол между меридианами различных точек местности; условилось, для точек, расположенных к востоку (в точке M_1) от данной точки (M), считать положительным, а для точек, расположенных к западу от данной точки (в точке M_0), - отрицательным. Азимут линии KL (см. рис. 17) в точке M_1 согласно (3.1) будет

$A_1 = A \pm 180^\circ$. Подставив в эту формулу значение A по (3.2), получим

$$A_1 = A \pm 180^\circ + \gamma, \quad (3.4)$$

т.е. прямой и обратный азимуты линии местности в разных ее точках разнятся на $180^\circ + \gamma$.

Истинные азимуты определяются из астрономических наблюдений. (Формулы для вычисления угла сближения меридианов приведены в § 17.)

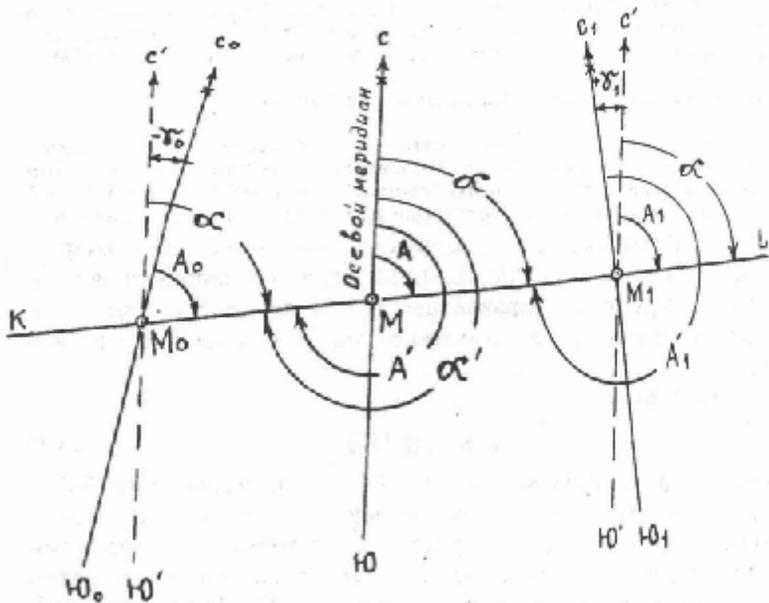


Рис. 17. Истинный азимут линии местности

Во многих случаях при ориентировании линий местности вместо азимутов пользуются румбами. Истинным *румбом* линии местности называется острый горизонтальный угол между ближайшей (северной или южной) частью истинного меридиана в данной точке и этой линией. Численное значение румба сопровождается названием четверти, в которой находится линия.

На рис. 18 показаны истинные румбы линий во всех четырех четвертях. Так, линия MG имеет румб

$$\Gamma_3 = ЮЗ:40^\circ;$$

линия MH имеет румб

$$\Gamma_4 = СЗ:30^\circ.$$

Из этого же рисунка видно, что

$$\Gamma_1 = АБ \quad (3.4)$$

$$\Gamma_2 = 180^\circ - A_2; \quad (3.5)$$

$$\Gamma_3 = A_3 - 180^\circ; \quad (3.6)$$

$$\Gamma_4 = 360^\circ - A_4. \quad (3.7)$$

Эти формулы позволяют осуществлять переход от азимутов к румбам и обратно.

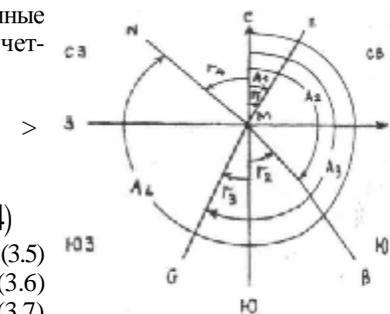


Рис. 18. Связь азимутов и румбов

§ 15. Магнитные азимуты и румбы линий местности

Известно, что под влиянием земного магнетизма свободно подвешенная магнитная стрелка устанавливается в плоскости магнитного меридиана* данной точки. Это свойство магнитной стрелки позволяет ориентировать относительно нее линии местности.

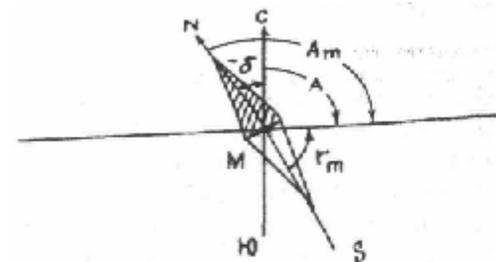


Рис. 19. Магнитные азимуты и румбы

Магнитным меридианом называется линия, соединяющая магнитные полюсы свободно подвешенной в горизонтальном положении магнитной стрелки.

Магнитным азимутом линии местности называется горизонтальный угол, отсчитываемый от северной части магнитного меридиана по ходу часовой стрелки до данной линии. Этот угол принимает значения от 0° до 360° . *Магнитным румбом* линии местности называется острый горизонтальный угол, отсчитываемый от ближайшей части (северной или южной) магнитного меридиана до данной линии. На рис. 19: NS - магнитный меридиан, A_T - магнитный азимут линии KL в точке M, r_m - магнитный румб этой линии, СЮ- истинный меридиан точки M, A - истинный азимут линии KL в точке M. В каждой данной точке магнитный и истинный меридианы образуют между собой угол δ (см. рис. 19), называемый *склонением* магнитной стрелки. Северный конец магнитной стрелки может отклоняться от истинного меридиана к востоку или западу. В зависимости от этого различают *восточное* и *западное* склонение. Восточное склонение принято считать положительным, западное - отрицательным. Из рис. 19 видно, что

$$A = A_{\text{ш}} + \delta. \quad (3.8)$$

В различных точках Земли склонение магнитной стрелки имеет разную величину. Так, в пределах территории СНГ величина его колеблется от 0° до $\pm 15^\circ$. Но и в одной и той же точке она постепенно меняется. Различают суточные, годовые и вековые изменения склонений. Вследствие этого ориентирование линий с помощью магнитной стрелки допускается при топографо-геодезических работах, не требующих высокой точности. Форма записи магнитного румба соответствует форме записи истинного румба, включая формулы связи с азимутами.

§ 16. Дирекционные углы и румбы линий местности

То обстоятельство, что азимуты линии в разных ее точках неодинаковы, ограничивает их использование для ориентирования геодезических построений, поэтому в большинстве случаев практики для этой цели используют дирекционные углы.

Дирекционным углом линии местности называется горизонтальный угол a , отсчитываемый по ходу часовой стрелки от северной части осевого меридиана зоны или линий, ему параллельных, до данной линии. Пусть СЮ (см. рис. 17) - осевой меридиан зоны, а СТО' - линии, ему параллельные; дирекционный угол линии KL в любой ее точке (M_0 , M, Mj и др.) равен a . Следовательно, в отличие от азимута дирекционный угол линии в любой ее точке сохраняет свою величину. Из рис.17 видно, что прямой и обратный дирекционные углы линии разнятся между собой на 180° , т.е.

$$a' = a + 180^\circ. \quad (3.9)$$

Понятие дирекционного румба $r_{\text{ш}}$, форма записи, связь с дирекционным углом - полностью соответствуют истинному и магнитному румбам. Для перехода от дирекционного угла a к дирекционному румбу r и обратно применяют формулы связи истинных азимутов A и румбов. В связи с тем, что дирекционный румб используется широко и часто, слово «дирекционный» в его названии обычно опускают. Зависимость дирекционных углов с истинными и магнитными азимутами видна на рис. 17, 19 и выражается формулами:

$$a = A - r, \quad (3.10)$$

$$a = A_{\text{ш}} + \delta - r. \quad (3.11)$$

Средние величины δ и δ' для территории, изображенной на листе топографической карты, приводятся за южной рамкой в виде текста и специальной диаграммы, показывающей взаимное расположение истинного, магнитного и осевого меридианов.

§ 17. Прямая и обратная геодезические задачи на плоскости

Прямая геодезическая задача.

По известным координатам X_A, Y_A одного из концов отрезка линии местности АВ, длине горизонтального проложения d и дирекционному

$$X_B = X_A + \Delta X; \quad Y_B = Y_A + \Delta Y, \quad (3.12)$$

где $\Delta X = d \cos \alpha; \quad \Delta Y = d \sin \alpha$ - (3.13)
приращения координат по осям абсцисс и ординат соответственно.

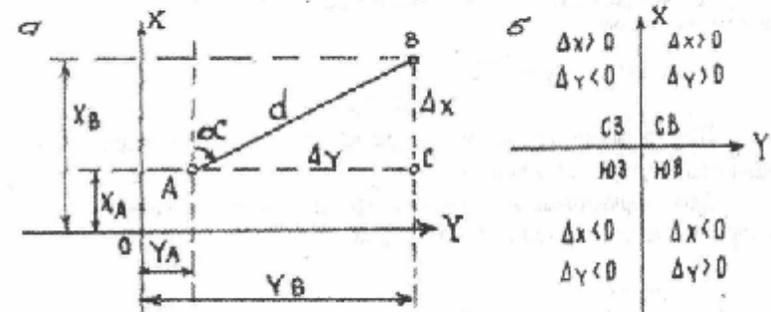


Рис. 20. Схемы к решению геодезических задач

углу a , азимуту A или румбу r этой линии определить координаты X_B, Y_B другого конца отрезка (рис.20).

Обратная геодезическая задача.

По известным координатам X_A, Y_A, X_B, Y_B концов отрезка линии местности АВ (см. рис.20) определить длину горизонтального проложения d и направление этой линии. Вычисляют приращения координат Δ_X и Δ_Y по формулам:

$$\Delta_X = X_B - X_A; \quad (3.14)$$

$$\Delta_Y = Y_B - Y_A. \quad (3.15)$$

Находят численное значение румба r_{AB} отрезка АВ линии местности

$$r_{AB} = \arctg \left(\frac{\Delta_Y}{\Delta_X} \right). \quad (3.16)$$

По знакам приращений координат (табл. 1) определяют название четверти, в которой расположен отрезок линии. От румба переходят к значению дирекционного угла a .

Таблица 1

Связь румбов и дирекционных углов

Номер четверти	Название четверти	Знаки приращений координат		Значения дирекционных углов
		Δ_X	Δ_Y	
I	СВ	+	+	$a = r$
II	ЮВ	-	+	$a = 180^\circ - r$
III	ЮЗ	-	-	$a = 180^\circ + r$
IV	СЗ	+	-	$a = 360^\circ - r$

Для контроля правильности вычисленного румба можно воспользоваться формулой

$$r + 45^\circ = \arctg \left(\frac{\cos r + \sin r}{\cos r - \sin r} \right) = \arctg \left(\frac{\Delta_X + \Delta_Y}{\Delta_X - \Delta_Y} \right). \quad (3.17)$$

Полученный по этой формуле румб должен отличаться от вычисленного по формуле (3.16) ровно на 45° .

Длину горизонтального проложения d линии АВ можно получить из прямоугольного треугольника АВС (см. рис. 20).

$$d = \sqrt{\Delta_X^2 + \Delta_Y^2} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}. \quad (3.18)$$

Для контроля d вычисляют по формуле

$$d = \Delta_X / \cos \alpha = \Delta_Y / \sin \alpha. \quad (3.19)$$

Раздел 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Лекция 6. Измерения в геодезии

§ 18. Общие сведения об измерениях

Объектом изучения науки Геодезия является планета Земля - ее форма, размеры, внешнее гравитационное поле. Эти характеристики получают из различных измерений, выполняемых на поверхности Земли.

Под *измерением* физической величины X понимают процесс сравнения этой величины с другой, однородной с ней величиной q , принятой в качестве *меры* - единицы измерения. Например, длину отрезка линии местности сравнивают с единицей линейных измерений - *метром*; горизонтальный угол, образованный отрезками линий на местности, сравнивают с градусом, градусом, радианом.

Измерения различают:

- прямые;
- косвенные;
- равноточные;
- неравноточные.

Под *прямыми* измерениями понимают такие, при которых определяемую величину получают путём непосредственного сравнения (сопоставления) её с единицей измерения или её производной. Например, длина отрезка линии измеряется стальной лентой или горизонтальный угол на местности измеряется теодолитом, а на бумаге транспортиром и т.д.

Косвенными называют измерения, определяемая величина в которых является функцией других непосредственно измеренных величин. Так, для определения длины окружности или площади круга необходимо непосредственно измерить радиус окружности.

Равноточными называют измерения, выполненные приборами одного класса точности, специалистами равной квалификации, по одной и той же технологии, в идентичных внешних условиях. При несоблюдении хотя бы одного из перечисленных условий измерения считаются *неравноточными*.

Результатом измерения I является число, показывающее, во сколько раз определяемая величина больше или меньше величины, с которой её сравнивали, т.е. величины, принятой за единицу измерения.

Результаты измерений подразделяют на *необходимые* и *добавочные* (или избыточные). Так, если одна и та же величина (длина линии, угол треугольника и т.п.) измерена n раз, то один из результатов измерений является необходимым, а $(n - 1)$ - добавочными. Добавочные измерения имеют весьма важное значение: их сходимость является *средством контроля* и позволяет судить о *качестве* результатов измерений; они дают возможность получить *наиболее надежное значение* искомой величины по сравнению с любым отдельно взятым результатом измерения.

§ 19. Погрешности результатов измерений

Результаты многократных измерений одной и той же физической величины (линии, угла, превышения и т.п.), как правило, различаются между собой и не совпадают с точным (истинным) значением измеряемой величины, т.е. содержат неизбежные погрешности, вызываемые различными причинами.

Под *погрешностью* A_i - результата измерения / понимают разность между результатом измерения / физической величины и точным (истинным) значением X этой величины, т.е.

$$A_i = i_i - X, \quad (4.1)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, n$;
 n - число выполненных измерений.

По своим свойствам, характеру возникновения и влиянию на результаты измерений, их функции, погрешности подразделяют на грубые, систематические и случайные.

Грубые погрешности (промахи) возникают вследствие невнимательности наблюдателя, неисправности прибора, несоблюдении технологии работ, не учёта влияния изменяющихся внешних условий: температуры, ветра, видимости и т.п. Обнаружить грубые погрешности можно, используя геометрические свойства наблюдаемого объекта (например, сумму внутренних углов плоского многоугольника), а также выполнением повторных измерений. Так, например, при линейных измерениях пропуск целого пролета, равного длине мерного прибора, можно обнаружить измерением отрезка линии нитяным дальномером, иногда - даже шагами.

К *систематическим* относят такие погрешности результатов измерений, которые входят в эти результаты по определенному закону.

Так, если известна длина меры при температуре t_0 , а измерение длины линии местности выполнены при температуре t , то результат измерения длины линии будет содержать систематическую погрешность,

пропорциональную разности температур $(t - t_0)$ и длине линии. Влияние систематических погрешностей на результаты измерений исключают или сводят до пренебрежимо малого значения выбором методики измерений или введением поправок в результаты.

Случайные погрешности результатов измерений характеризуются тем, что при одинаковых условиях измерений они могут меняться по величине и знаку; их нельзя заранее предусмотреть, определить закон воздействия на результат. Статистический анализ, т.е. анализ результатов больших рядов измерений, позволил для случайных погрешностей выявить ряд их свойств.

Первое свойство. Для данных условий измерений случайные погрешности по абсолютной величине не могут превосходить известного предела (свойство ограниченности), т.е.

$$|A_i| < \Delta_{пред}. \quad (4.2)$$

Второе свойство. Равные по абсолютной величине положительные и отрицательные случайные погрешности равновозможны, т.е. встречаются одинаково часто (свойство симметрии).

Третье свойство. Малые по абсолютной величине случайные погрешности при измерениях встречаются чаще, чем большие (свойство плотности).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta_i]}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta_i \Delta_j]}{n} = 0, \quad (4.3)$$

Четвертое свойство. Среднее арифметическое из случайных погрешностей и их попарных произведений стремится к нулю при неограниченном возрастании числа измерений (свойство компенсации), т.е.

где $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$; $k = 2, 3, 4, \dots, n$;

n - число измерений; $[\]$ - Гауссов символ суммы.

§ 20. Задачи теории погрешностей измерений

Как было отмечено выше, в результатах измерений неизбежно содержатся погрешности. Поэтому одной из задач теории погрешностей является изучение видов и свойств погрешностей измерений, причин их возникновения.

Далее, выполнив измерения, всегда стремятся определить точность полученных результатов. Поэтому в теории погрешностей измерений устанавливаются критерии для оценки точности результатов измерений.

Так как результаты измерений вследствие влияния погрешностей разнятся между собой, то возникает задача отыскания наиболее точного по

вероятности значения определяемой величины из результатов много-
28

| кратных ее измерений.

29

Во многих случаях геодезической практики по результатам измерений вычисляют другие интересующие нас величины. Например, измерив стороны и два угла треугольника, можно по известным формулам вычислить третий угол и две другие стороны. В таких случаях результаты измерений являются функциями измеренных величин. По указанной теории перед теорией погрешностей возникает задача по оценке точности измеренных величин.

Перечисленные задачи, которые решаются теорией погрешностей, имеют большое значение для правильной организации, проведения геодезических работ и использования их результатов.

Кроме того, теория погрешностей геодезических измерений позволяет заранее выбрать необходимые для измерений приборы и инструменты, оценить ожидаемую точность измерений и окончательного результата, а также выбрать метод обработки результатов измерений.

7. Равноточные измерения

Изчисление наиболее точного по вероятности значения результата измерений одной и той же величины

Пусть некоторая величина, истинное (точное) значение которой X , измерена равно точно n раз и получены результаты этих измерений $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Составим разности

$$A_i - X \quad (4.4)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$;

истинные случайные погрешности результатов n измерений, т.е. разности результатов измерений от истинного (точного) значения измеренной величины.

Найдем сумму уравнений (4.4) и разделим ее на число измерений.

$$\frac{[A]}{n} = \frac{[L]}{n} - X \quad (4.5)$$

Введем обозначения:

$$\frac{[A]}{n} = \eta \quad (4.6)$$

$$\frac{[L]}{n} = X \quad (4.7)$$

Величину $x = [L] / n$ называют простой арифметической средним арифметическим из результатов L ; равно X . Выражение $T = [A] / n = x - X$ есть истинная случайная арифметическая середина, т.е. это отклонение от истинного (точного) значения X измеряемой величины.

По четвертому свойству случайных погрешностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ([A] / n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta = 0,$$

значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ([L] / n) = \lim_{n \rightarrow \infty} X = X.$$

Таким образом, среднее арифметическое из результатов точных измерений стремится к истинному (точному) значению измеряемой величины при неограниченном возрастании числа измерений.

Величину x называют еще *вероятнейшим значением* величины.

§ 22. Равноточные измерения. Средняя квадратическая погрешность результата отдельного измерения. Предельная погрешность

В качестве критерия при оценке точности результатов измерений принята предложенная К.Ф. Гауссом *средняя квадратическая погрешность*, вычисляемая по формуле:

$$m = \sqrt{\frac{[A^2]}{n}}$$

где A - истинная случайная погрешность результата;

n - число измерений.

По величине средней квадратической погрешности определяют *предельную погрешность* $A_{пред}$, возможную для результатов измерений. В качестве предельной погрешности в геодезии принимают среднюю квадратическую погрешность

$$A_{пред} = 2m.$$

Если в ряду случайных погрешностей результатов измерений встречаются такие, которые по абсолютной величине превышают предельную, то такие погрешности считают грубыми. Если обнаружены эти погрешности, измерения повторяют заново.