УДК 517.928

ЭКИ ЖАКТУУ ТУРУКТУУ АЙМАКТАГЫ ЧЕЧИМДИН АСИМПТОТИКАСЫ

Каримов Салы, ф. м. и. д., проф., karimovsaly@mail.com
***Акматов А. А.**, улук окутуучу, abdilaziz_akmatov@mail.ru*
ОшМУ, Ош, Кыргызстан

***Аннотация:** Жумушта сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдеменин чечиминин изилдөө жараяны каралган. Жумуштагы биринчи өзгөчөлүк болуп, туруктуулук шарты алмашкан чекиттен баштапкы чекитти тандап алуу болуп саналат. Экинчи өзгөчөлүк катары пайда болгон эки жактуу туруктуу аралыктардын ар биринде дагы туруктуулук шарты алмашат. Пайда болгон эки жактуу туруктуу аралыктар баштапкы чекитке карата симметриялуу. Ошону менен бирге чектүү арлыктар болушат. Демек,ал аралыктардын биринде чечимди изилдөө жетиштүү болот. Чечимдин асимптотикалык ажыралмасы удаалаш жакындашуу усулунун негизинде тургузулат. Бул учурда кичине козголуунун чечимдин туруктуулугуна болгон таасири байкалат. Мына ошол себептүү сызыктуу эмес маселе каралат.*

***Түйүндүү сөздөр:** кичине козголуу, дифференциалдык теңдеме, эки жактуу туруктуулук, Коши маселеси, кичине параметр, чечим, асимптотика.*

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДВУХСТОРОННЕ УСТОЙЧИВОЙ ОБЛАСТИ

Каримов Салы, д. ф. - .м. н., проф., karimovsaly@mail.com
Акматов А А., ст. препод., abdilaziz_akmatov@mail.ru
ОшГУ, Ош, Кыргызстан

***Аннотация:** В работе проведено исследование решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Особенность работы заключается в том, что начальная точка выбрана в точке смены устойчивости. Вторая особенность состоит в том, что в каждом двухсторонне устойчивом интервале выполняются условия смены устойчивости. Появивщиеся двухсторонне устойчивые интервалы симметричны относительно начальной точки. Каждая из областей является ограниченным интервалом. В связи с этим достаточно исследовать решение задачи в одном из них. Асимптотическое разлоджение решения построим с помощью метода последовательных приближений. В этом случае отмечается влияние малого возмущения. Поэтому рассматривается нелинейная задача.*

***Ключевые слова:** малое возмущение, дифференциальные уравнения, двухсторонне устойчивость, задача Коши, малый параметр, решение, асимптотика.*

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS TO A BILATERALLY STABLE DOMAIN

Karimov Saly, Dr Sc, professor, karimovsaly@mail.com
Akmatov A. A., senior lecturer, abdilaziz_akmatov@mail.ru
OshSU, Osh, Kyrgyzstan

***Abstract:** In this paper, we study the solution of singularly perturbed differential equations. The peculiarity of the work is that the starting point is chosen at the point of change of courtesy. The second feature is that in each two-sided stable interval the conditions of stability change are satisfied. The resulting bilaterally stable intervals are symmetrical with respect to the starting point. Each of the regions is a bounded interval. In this regard, it suffices to study the solution of the problem in one of them. We construct an asymptotic expansion of the solution using the method of successive approximations. In this case, the influence of a small perturbation is noted. Therefore, a nonlinear problem is considered.*

***Keywords:** small perturbation, differential equations, bilateral stability, Cauchy problem, small parameter, solution, asymptotic.*

Киришүү. Бул жумушта эки жактуу туруктуу чектелген аралык изилденет. Баштапкы чекитти туруктуулук шарты алмашкан жерден тандап алабыз. Баштапкы чекитти туруктуу аралыктан тандап алган учур [2] каралган. Ар бир туруктуу аралыктын ичинде $\alpha(t)$- функциясынын чыныгы бөлүгү өзүнүн белгисин туруктуулуктан туруксуздукка өзгөртөт. Чечимди чыныгы сандар

талаасында изилдейбиз. Кичине козголуу $\varepsilon h(t)$ - нын чечимдин туруктуулугунун узартылышына болгон таасири болгондуктан анын теңдеш нөл болгон учурун карайбыз. Кичине козголуунун таасири астында комплекстүү тегиздикке көчүп, чечимди деңгээл сызыктар усулун [1] колдонуп чыгарууга туура келет.
Мына ошол себептүү сызыктуу эмес маселени карайбыз.
Маселенин коюлушу. Төмөнкү

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=a(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon f(t,x(t,\varepsilon)), \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0, \tag{2}$$

мында $0<\varepsilon<<1$ - кичине параметр, $x(t,\varepsilon)$ - белгисиз функция, $x^0-const$.

Аралык $H_1=\{(t,x)|t\in[0,\sqrt{2}],|x|\le\delta\}$, мында $0<\delta$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес турактуу сан.

Төмөнкү шарттар аткарылсын:

U 1. $f(t,0)\equiv 0$, $\forall(t,x)\in H_0$: $f(t,x)\in\Phi(S_r)$, $\Phi(S_r)$ - аналитикалык функциялардын мейкиндиги, $f(t,0)\equiv 0$; $|f(t,\tilde{x})-f(t,\tilde{\tilde{x}})|\le M|\tilde{x}-\tilde{\tilde{x}}|\times\max\{|\tilde{x}|,|\tilde{\tilde{x}}|\}$, мында $0<M$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес турактуу сан. Ажыралма экинчи даражадан кем эмес болуп башталат.

U 2. $a(t)\in\Phi(S_r)$ жана $a(t)=t^3-t+i(2t^2-1)$. Анда

$\operatorname{Re}a(t)<0$, $t\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ болсо,

$\operatorname{Re}a(t)>0$, $t\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$ болсо,

$\operatorname{Re}a(t)=0$, $t=0$, $t=\pm1$болсо.

Маселе. U 1-U 2 шартта (1)-(2) маселенин чечимин H_1 аймагындагы асимптотикалык жүрүмүн изилдөө.

Аймакты $H_0=\{(t,x)|t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}],|x|\le\delta\}$, мында $0<\delta$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес турактуу сан, $H_1=\{(t,x)|t\in[0,\sqrt{2}],|x|\le\delta\}$, $H_2=\{(t,x)|t\in[-\sqrt{2},0],|x|\le\delta\}$.

Аныктама. $\forall t\in[-r_0,0]$ $x(0,\varepsilon)=x^0$ чечим үчүн $(\lim_{\varepsilon\to0}x(t,\varepsilon)=0)$ жана $\forall t\in[0,r_1]$ $x(0,\varepsilon)=x^0$ чечим үчүн $(\lim_{\varepsilon\to0}x(t,\varepsilon)=0)\implies x(t,\varepsilon)$ чечимди $[-r_0,r_1]$ аралыгында эки жактуу туруктуу деп айтабыз.

Теорема орун алат:

Теорема. U 1 шарты аткарылсын жана $a(t)=t^3-t+i(2t^2-1)$, $t_0=0$ болсун. Анда H_1 аймагында (1)-(2) маселе жалгыз чечимге ээ болуп жана

$$|x(t,\varepsilon)|\le q|x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right), \tag{3}$$

баалоосу орун алат. Мында $x^0-const$.

Далилдөө. (1)-(2) маселесин интегралдык теңдеме менен алмаштырабыз:

$$x(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)E(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,x(\tau,\varepsilon))d\tau, \tag{4}$$

мында $E(t,t_0,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)$, $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)$.

(4) теңдемеге удаалаш жакындашуу усулун колдонобуз.
Удаалаш жакындашууларды төмөнкүчө аныктайлы:

$$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0, \quad x_m(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)E(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,x(\tau,\varepsilon))d\tau, \tag{5}$$

мында $m=1,2,\ldots$.
(5) удаалаш жакындашууларын баалайбыз:

$$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$x_1(t,\varepsilon)=x^0E(t,0,\varepsilon),$$

мында $E(t,0,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+i\left(\frac{2t^2}{3}-t\right)\right)\right)$.

$$|x_1(t,\varepsilon)|=\begin{cases}|x^0|, & 0\le t<\varepsilon^{\lambda}, 0<\lambda<1,\\ O(\varepsilon), & \varepsilon^{\lambda}\le t\le\sqrt{2}-\varepsilon^{\lambda},\\ |x^0|, & \sqrt{2}-\varepsilon^{\lambda}<t\le\sqrt{2}.\end{cases}$$

$m=2$ үчүн

$$x_2(t,\varepsilon)=x^0E(t,0,\varepsilon)+\int_0^t E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,x_1(\tau,\varepsilon))d\tau,$$

мында $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+i\left(\frac{2}{3}t^3-t\right)\right)-\left(\frac{\tau^4}{4}-\frac{\tau^2}{2}+i\left(\frac{2}{3}\tau^3-\tau\right)\right)\right)\right)$.

Абсалюттук чоңдугу

$$|x_2(t,\varepsilon)|\le|x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)+M\int_0^t\exp\left(\frac{t^4-2t^2-\tau^4+2\tau^2}{4\varepsilon}\right)|x_1^2(\tau,\varepsilon)|d\tau,$$

$\vee$ $|x_2(t,\varepsilon)|\le|x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)(1+M|x^0|C_1\varepsilon)$.

Бул жерде $\varepsilon\le-\frac{1}{2M|x^0|C_1}$ болсо, $1+M|x^0|C_1\varepsilon\le q$. Демек,

$$|x_2(t,\varepsilon)|\le q|x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right).$$

$m=3$ үчүн $\quad x_3(t,\varepsilon)=x^0E(t,0,\varepsilon)+\int_0^t E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,x_2(\tau,\varepsilon))d\tau$.

Модулу $\quad |x_3(t,\varepsilon)|\le|x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)+M\int_0^t\exp\left(\frac{t^4-2t^2-\tau^4+2\tau^2}{4\varepsilon}\right)|x_2^2(\tau,\varepsilon)|d\tau,$

$\vee$ $|x_3(t,\varepsilon)|\le|x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)[1+q^2M|x^0|C_1\varepsilon]$.

Бул жерде $\varepsilon\le-\frac{1}{8M|x^0|C_1q^2}$ болсо, $1+M|x^0|C_1\varepsilon q^2\le q$. Демек, $|x_3(t,\varepsilon)|\le q|x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)$.

$m=k$ үчүн $x_m(t,\varepsilon)=x^0E(t,0,\varepsilon)+\int_0^t E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))d\tau$.

Абсалюттук чондугу

$$|x_{m+1}(t,\varepsilon)| \le |x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right) + M\int_0^t \exp\left(\frac{t^4-2t^2-\tau^4+2\tau^2}{4\varepsilon}\right)\cdot|x_m^2(\tau,\varepsilon)|d\tau,$$

$\vee$

$$|x_{m+1}(t,\varepsilon)| \le |x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)\left[1+M|x^0|C_1\varepsilon q^2\right] = q|x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right),$$

мында

$$1+M|x^0|C_1\varepsilon\alpha_m^2(\varepsilon). \tag{7}$$

(6) баалоосу далилденди.

(7) барабардыктан $\varepsilon \le \dfrac{1}{M|x^0|C_1q^2}$ болсо, анда $\forall m\in N$, $1+M|x^0|C_1\varepsilon q^2 \le q$.

$\{x_m(t,\varepsilon)\}$ удаалаштыгынын жыйналуучулугун далилдейли:

$$x_m(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + (x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)) + (x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)) + \ldots + (x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)) + \ldots.$$

Анда $(5)\Rightarrow$ $x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon) = \int_0^t E(t,\tau,\varepsilon)\cdot\left[f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon)) - f(\tau,x_{m-2}(\tau,\varepsilon))\right]d\tau$.

$$|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)| = \int_0^t |E(t,\tau,\varepsilon)|\cdot|f(\tau,x_m(\tau,\varepsilon)) - f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))|\cdot|x_m(\tau,\varepsilon)-x_{m-1}(\tau,\varepsilon)|d\tau \le$$

$$\le M\int_0^t |E(t,\tau,\varepsilon)|\cdot\max\{|x_{m-1}(\tau,\varepsilon)|,|x_{m-2}(\tau,\varepsilon)|\}\cdot|x_{m-1}(\tau,\varepsilon)-x_{m-2}(\tau,\varepsilon)|d\tau,$$

бул жерде (6) эске алуу менен $\max\{|x_{m-1}(t,\varepsilon)|,|x_{m-2}(t,\varepsilon)|\} = q|x^0|\exp\left(\dfrac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)$.

$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|$ баалайлы. Анда

$$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)| = M\int_0^t \exp\left(\frac{t^4-2t^2-\tau^4+2\tau^2}{4\varepsilon}\right)\cdot|x^0|q\exp\left(\frac{\tau^4-2\tau^2}{4\varepsilon}\right)|x_1(\tau,\varepsilon)|d\tau.$$

$$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)| \le |x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)\beta(\varepsilon),\ \ \beta(\varepsilon) = MqC_1|x^0|\varepsilon.$$

$|x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)|$ баалайлы. Анда

$$|x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)| \le |x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)\beta^2(\varepsilon),\ \ \beta^2(\varepsilon) = \left(MC_1|x^0|q^2\varepsilon\right)^2.$$

$|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)|$ баалайлы. Анда

$$|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)| \le |x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)\cdot\beta^m(\varepsilon),\ \ \beta^m(\varepsilon) = \left(MC_1|x^0|q^2\varepsilon\right)^m$$

Демек, $|x_1(t,\varepsilon) + (x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)) + (x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon))\ldots + (x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)) + ..| \le$

$$\le |x_1(t,\varepsilon)| + |x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)| + |x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)| + \ldots + |x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon| + \ldots \le$$

$$\le |x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)1 + \beta(\varepsilon) + \ldots + \beta^m(\varepsilon) + \ldots) \le |x^0|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)\cdot\frac{1}{1-\beta(\varepsilon)} \tag{8}$$

(8) оң жагы $\forall t\in[0;\sqrt{2}]$ аралыгында бир калыпта жыйналат. Анда $\forall t\in[0;\sqrt{2}]$ аралыгында $\{x_m(t,\varepsilon)\}$ удаалаштыгы да бир калыпта (5) маселесинин чечими болгон $x(t,\varepsilon)$ жыйналат.

$$(8) \Rightarrow \ |x(t,\varepsilon)| \le q|x^0|\exp\left(\frac{t^4 - 2t^2}{4\varepsilon}\right).$$

Демек, (1) маселесинин чечими $t \in \left[0, \sqrt{2}\right]$ аралыгында жашап, жалгыз болуп, ал үчүн (3) баалоосу орун алат. Теорема далилденди.

Корутунду. Эгерде баштапкы чекитти туруктуу [2] аралыктан тандап алсак, анда бул эки жактуу туруктуу аралыкты толук изилдөө үчүн эки баштапкы чекит тандоого туура келет. Туруктуулук шарты алмашкан жерден баштапкы чекит алсак, бир аралыкты изилдеп, алынган баалоону экинчи аралык үчүн да орун алат деп айтууга болот. Себеби бул аралыктар тандалган баштапкы чекитке карата симметриялуу болушат. Баштапкы чекитти туруктуулук шарты бузулган чекиттен тандоо бул өзгөчөлүк болуп эсептелет. Мына ошонун негизинде эки жактан туруктуу болгон аралыкты изилдөө мүмкүнчүлүгү пайда болду. Тактап айтканда бир арлыкты изилдеп алсак, анда алынган баалоо экинчи аралык үчүн да орун алат. Экинчи өзгөчөлүгү эки жактан туруктуу болгон аралыктардын ар бириннде α(t)- функциясынын чыныгы бөлүгү өз белгисин туруктуулуктан туруксуздукка өзгөртөт. Бул болсо, алдынкы каралган жумуштардагы [1-4] изилдөөгө окшоштугу болуп саналат.)

Адабияттар:

1. Алыбаев, К.С. Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. [Текст] / К.С. Алыбаев // Дисс. … д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2001. – 204 с.
2. Акматов А.А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае неоднократной смены устойчивости. [Текст] /А.А.Акматов //Вестник ОшГУ.Ош.№5.2008.С.79-82.
3. Акматов А.А. Сингулярдык козголгон маселенин чечимин изилдөө. [Текст] / А. А. Акматов // Вестник ОшГУ. Ош. №2. – 2021. – С. 26-33.
4. Турсунов, Д.А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют n-кратный полюс. [Текст] / Д.А. Турсунов // Дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек,2005. – 27 с.