УДК 517.968

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Зулпукаров Ж. А., к.ф.-м. н., доц., zulpikarov66@mail. Ru
Артыков А. Ж., к.ф.-м. н., доц., aamat62@mail.ru
Жороев Т. Ж. ст. препод., tuigun2003@mail.ru, ОшТУ им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызская Республика

Аннотация: *В данной статье доказана единственность решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с тремя независимыми переменными и построен регуляризирующий оператор в пространстве Z2(G). Раннее были рассмотрены интегральное уравнение Вольтерра первого рода с одним независимым переменным, доказана единственность и существование его решения. Актуальность данной темы востребована до сих пор. Различные вопросы решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода широко исследованы в работах российских ученых А.Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В.К. Иванова, А.Л. Бухгейма, В.Г. Романова, а также и кыргызскими учеными М. И. Иманалиевым, А. Асановым и др.*

Ключевые слова: *функция, пространство, уравнения, малый параметр, интегрируя по частям, теорема.*

ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕНИ ЧЕЧҮҮ ҮЧҮН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯНЫ ТУРГУЗУУ

Зулпукаров Ж.А., ф.-м.и.к.,доц., zulpukarov66@mail. ru
Артыков А.Ж., ф.-м.и.к., доц., aamat62@mail.ru
Жороев Т. Ж., ага окутуучу, магистр, tuigun2003@mail.ru
М. М. Адышев атындагы ОшТУ,
Ош шаары, Кыргызстан Республикасы

Аннотация: *Бул макалада биз Z2(G) мейкиндигинде үч көз карандысыз өзгөрмөлүү экинчи даражадагы жекече туундулу дифференциалдык теңдеменин чечиминин жалгыздыгын далилдейбиз жана регуляризациялоо оператордун тургузабыз. Мурда бир көз карандысыз өзгөрмөлүү биринчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемеси каралып, анын чечиминин жалгыздыгы жана бар экендиги далилденген. Бул теманын актуалдуулугу дагы эле талап кылынат. Биринчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемелеринин чечимдерин орус окумуштуулары А. Н. Тихонов, М. М. Лаврентьев, В. К. Иванова, А. Л. Буххайм, В. Г. Романов, ошондой эле кыргыз окумуштуулары М. И. Иманалиев, А. Асанов ж.б. изилдешкен.*

Түйүндүү сөздөр: *функция, мейкиндик, теңдемелер, кичинекей параметр, бөлүктөп интегралдоо, теорема.*

CONSTRUCTION OF A REGULARIZATION FOR SOLVING THE INVERSE PROBLEM

Zulpukarov Zh. A., k.f.-m.s., zulpukarov66@mail. ru
Artykov A. Zh., k.f.-m.s., aamat62@mail.ru
Zhoroev T. Zh., teacher, tuigun2003@mail.ru, OshTU named after M M. Adysheva, Osh city, Kyrgyz Republic

Abstract: *In this paper, we prove the uniqueness of the solution of a second-order partial differential equation with three independent variables and construct a regularizing operator in the space Z2(G). Earlier, the Volterra integral equation of the first kind with one independent variable was considered, and the uniqueness and existence of its solution was proved. The relevance of this topic is still in demand. Various issues of solving Volterra integral equations of the first kind are widely studied in the works of Russian scientists A.N. Tikhonov, M. M. Lavrentiev, V.K. Ivanova, A.L. Buchheim, V.G. Romanov, as well as Kyrgyz scientists M. I. Imanaliev, A. Asanov and others.*

Keywords: *function, space, equations, small parameter, integrating by parts, theorem.*

Введение. Первые результаты по построению регуляризации для решения интегральных уравнений Вольтерра I рода с одним независимым переменным были получены в [1]. Результаты и методы работы [1] получили дальнейшее развитие в работах [2]. Существование единственности и регуляризации решений интегральных уравнений Вольтерра с одной независимой переменной изучалось в [3-7].Различные вопросы решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода широко исследованы в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова, А. Л. Бухгейма, В.Г. Романова, М. И. Иманалиева и других.

Цель исследования. Доказать существование и единственность решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с тремя независимыми переменными и построить регуляризирующий оператор в пространстве Z2(G).

Методика исследования. Интегрирования по частям, используются методы интегральных уравнений, функционального анализа и малого параметра.

Рассмотрим задача

$$a_1(t,x,y)u_{tx}+a_2(t,x,y)u_{ty}+a_3(t,x,y)u_{xy}+b_1(t,x,y)u_t+b_2(t,x,y)u_x+$$
$$+b_3(t,x,y)u_y+c(t,x,y)u=f(t,x,y), \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&u(0,x,y)=0, \quad (x,y)\in[0;X]\times[0;Y],\\
&u(t,0,y)=0, \quad (t,y)\in[0;T]\times[0;Y],\\
&u(t,x,0)=0, \quad (x,t)\in[0;X]\times[0;T],
\end{aligned} \tag{2}$$

где $a_i(t,x,y), b_i(t,x,y), c(t,x,y)$ и $f(t,x,y)$ – заданные функции, а $u(t,x,y)$ – неизвестная функция в области $G=\{(t,x,y): 0\le t\le T, 0\le x\le X, 0\le t\le Y\}$. ($i$=1,2,3)

Обозначим через $Z_2(G)$ – пространство функций $u(t,x,y)$, таких что $u(t,x,y), u_t(t,x,y), u_x(t,x,y), u_y(t,x,y), u_{tx}(t,x,y), u_{xy}(t,x,y), u_{ty}(t,x,y), u_{txy}(t,x,y)\in L_2(G)$.

Сделаем следующую подстановку $u(t,x,y)=\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^y \vartheta(s,z,w)dwdzds$, $(t,x,y)\in G$. (3)

Подставляя (3) в (1) имеем

$$a_1(t,x,y)\int\limits_0^y\vartheta(t,x,w)dw+a_2(t,x,y)\int\limits_0^x\vartheta(t,z,y)dz+a_3(t,x,y)\int\limits_0^t\vartheta(s,x,y)ds+$$
$$+b_1(t,x,y)\int\limits_0^x\int\limits_0^y\vartheta(t,z,w)dwdz+b_2(t,x,y)\int\limits_0^t\int\limits_0^y\vartheta(s,x,w)dwds+$$
$$+b_3(t,x,y)\int\limits_0^t\int\limits_0^x\vartheta(s,z,y)dzds+c(t,x,y)\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^y\vartheta(s,z,w)dwdzds=f(t,x,y). \tag{4}$$

Очевидно, что задача (1) – (2) эквивалентна к системе интегральных уравнений (3) – (4). Обе части уравнения (4) умножив на $\vartheta(t,x,y)$ и интегрируя по области $G_{txy}=\{(s,z,w): 0\le s\le t, 0\le z\le x, 0\le w\le y\}$, получим

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^w a_1(s,z,w)\vartheta(s,z,\eta)\vartheta(s,z,w)d\eta dwdzds+\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^z a_2(s,z,w)\vartheta(s,\xi,w)\times$$
$$\times\vartheta(s,z,w)d\xi dwdzds+\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^s a_1(s,z,w)\vartheta(\tau,z,w)\vartheta(s,z,w)d\tau dwdzds+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^z\int\limits_0^w b_1(s,z,w)\vartheta(s,\xi,\eta)\vartheta(s,z,w)d\eta d\xi dwdzds+\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^s\int\limits_0^w b_2(s,z,w)\vartheta(\tau,z,\eta)\times$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y\int_0^s\int_0^z\int_0^w c(s,z,w)\vartheta(\tau,\xi,\eta)\vartheta(s,z,w)d\eta d\xi d\tau dwdzds=\int_0^t\int_0^x\int_0^y f(s,z,w)\vartheta(s,z,w)dwdzds. \qquad (5)$$

Дважды интегрируя по частям в области G_{txy} и применив формулу Дирихле, получаем

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\{(t-s)(x-z)[a_1(s,z,w)-(y-w)a'_{1w}(s,z,w)]\left(\int_0^w\vartheta(s,z,\eta)d\eta\right)^2+(t-s)(y-w)\times$$

$$\times[a_2(s,z,w)-(x-z)a'_{2z}(s,z,w)]\left(\int_0^z\vartheta(s,\xi,w)d\xi\right)^2+(x-z)(y-w)[a_3(s,z,w)-$$

$$-(t-s)a'_{3s}(s,z,w)]\left(\int_0^s\vartheta(\tau,z,w)d\tau\right)^2-2(t-s)(x-z)(y-w)[b_1(s,z,w)\left(\int_0^w\vartheta(s,z,\eta)d\eta\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^z\vartheta(s,\xi,w)d\xi\right)+b_2(s,z,w)\left(\int_0^w\vartheta(s,z,\eta)d\eta\right)\left(\int_0^s\vartheta(\tau,z,w)d\tau\right)+b_3(s,z,w)\left(\int_0^z\vartheta(s,\xi,w)d\xi\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^s\vartheta(\tau,z,w)d\tau\right)]\}dwdzds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\{(t-s)[b_1(s,z,w)-(x-z)b'_{1z}(s,z,w)-$$

$$-(y-w)b'_{1w}(s,z,w)+(x-z)(y-w)b''_{1zw}(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w\vartheta(s,\xi,\eta)d\eta d\xi\right)^2+$$

$$+(x-z)[b_2(s,z,w)-(t-s)b'_{2s}(s,z,w)-(y-w)b'_{2w}(s,z,w)+(t-s)(y-w)b''_{2sw}(s,z,w)]\times$$

$$\times\left(\int_0^s\int_0^w\vartheta(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)^2+(y-w)[b_3(s,z,w)-(t-s)b'_{3s}(s,z,w)-(x-z)b'_{3z}(s,z,w)+$$

$$+(t-s)(x-z)b''_{3sz}(s,z,w)]\left(\int_0^s\int_0^z\vartheta(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)^2-(t-s)(x-z)[c(s,z,w)-$$

$$-(y-w)c'_w(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w\vartheta(s,\xi,\eta)d\xi d\eta\right)\left(\int_0^s\int_0^w\vartheta(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)-(t-s)(y-w)\times$$

$$\times[c(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w\vartheta(s,\xi,\eta)d\eta d\xi\right)\left(\int_0^s\int_0^z\vartheta(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)-(x-z)\times$$

$$\times(y-w)[c(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)]\left(\int_0^s\int_0^w\vartheta(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)\left(\int_0^s\int_0^z\vartheta(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)\}dwdzds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\{[c(s,z,w)-(y-w)c'_w(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)]-(t-s)c'_s(s,z,w)+$$

$$+(t-s)(y-w)c''_{sw}(s,z,w)+(x-z)(y-w)c''_{zw}(s,z,w)+(t-s)(x-z)c''_{sz}(s,z,w)-$$

$$-(y-w)(x-z)(t-s)c'''_{szw}(s,z,w)]\left(\int_0^s\int_0^z\int_0^w\vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right)^2\}dwdzds=$$

$$=\int_0^t\int_0^x\int_0^y\left\{\int_0^s\int_0^z\int_0^w f(\tau,\xi,\eta)\vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right\}dwdzds. \qquad (6)$$

Предполагаем выполнение условий:

а) функции $a_i(t,x,y), a'_{it}(t,x,y), a'_{ix}(t,x,y), a'_{iy}(t,x,y), b_i(t,x,y), b'_{itx}(t,x,y), b'_{ity}(t,x,y), b'_{ixy}(t,x,y), c(t,x,y), c'''_{txy}(t,x,y)$ − непрерывные функции в области G, ($i=1,2,3$);

б) главные миноры матричной функции $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ неотрицательны при всех

$G_1=\{(t,x,y): 0\le s\le t\le T, 0\le z\le x\le X, 0\le w\le t\le Y\}$,

где $a_{11}=(t-s)(x-z)[a_1(s,z,w)-(y-w)a'_{1w}(s,z,w)]$,

$a_{22}=(t-s)(y-w)[a_2(s,z,w)-(x-z)a'_{2z}(s,z,w)]$,

$a_{33}=(x-z)(y-w)[a_3(s,z,w)-(t-s)a'_{3s}(s,z,w)]$,

$a_{12}=a_{21}=-(t-s)(x-z)(y-w)b_1(s,z,w)$,

$a_{13}=a_{31}=-(t-s)(x-z)(y-w)b_2(s,z,w)$,

$a_{32}=a_{23}=-(t-s)(x-z)(y-w)b_3(s,z,w)$;

в) главные миноры матричной функции $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$ неотрицательны при всех

$(t,x,y,s,z,w)\in G_1$,

где $b_{11}=(t-s)[b_1(s,z,w)-(x-z)b'_{1s}(s,z,w)-(y-w)b'_{1w}(s,z,w)+(x-z)(y-w)b''_{1zw}(s,z,w)]$,

$b_{22}=(x-z)[b_2(s,z,w)-(t-s)b'_{2s}(s,z,w)-(y-w)b'_{2w}(s,z,w)+(y-w)(t-s)b''_{2sw}(s,z,w)]$,

$b_{33}=(y-w)[b_3(s,z,w)-(t-s)b'_{3s}(s,z,w)-(x-z)b'_{3z}(s,z,w)+(x-z)(t-s)b''_{3sz}(s,z,w)]$,

$b_{12}=b_{21}=-(t-s)(x-z)[c(s,z,w)-(y-w)c'_w(s,z,w)]$,

$b_{13}=b_{31}=-(t-s)(y-w)[c(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)]$,

$b_{23}=b_{32}=-(x-z)(y-w)[c(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)]$;

г) $c(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)-(y-w)c'_w(s,z,w)+$

$+(t-s)(y-w)c''_{sw}(s,z,w)+(t-s)(x-z)c''_{sz}(s,z,w)+(x-z)(y-w)c''_{zw}(s,z,w)-$

$-(t-s)(x-z)(y-w)c'''_{szw}(s,z,w)\ge K>0$,

где $0<K$ – некоторая постоянная.

В силу условий *а)* – *г)* левая часть соотношения (6) неотрицательна, поэтому отсюда вытекает следующее неравенство

$$\frac{K}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\left(\int_0^s\int_0^z\int_0^w \vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right)^2 dwdzds\le\left|\int_0^t\int_0^x\int_0^y\int_0^s\int_0^z\int_0^w f(\tau,\xi,\eta)\vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau dwdzds\right|. \qquad (7)$$

Пусть $f(t,x,y)=0$, $(t,x,y)\in G$, тогда из (6) следует $\int_0^s\int_0^z\int_0^w\vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau=0$ т.е. $\vartheta(t,x,y)=0$, $(t,x,y)\in G$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия *а)*, *б)*, *в)* и *г)*. Тогда решение $\vartheta(t,x,y)$ уравнения (4) единственно в классе $L_2(G)$. Следовательно, решение $u(t,x,y)$ задачи (1) – (2) единственно в пространстве $Z_2(G)$.

Далее, наряду с задачей (1) – (2) рассмотрим задачу

$$\varepsilon u_{\varepsilon txy}+a_1(t,x,y)u_{\varepsilon tx}+a_2(t,x,y)u_{\varepsilon ty}+a_3(t,x,y)u_{\varepsilon xy}+b_1(t,x,y)u_{\varepsilon t}+b_2(t,x,y)u_{\varepsilon x}+$$
$$+b_3(t,x,y)u_{\varepsilon y}+c(t,x,y)u_\varepsilon=f(t,x,y), \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&u_\varepsilon(0,x,y)=0, \quad (x,y)\in[0;X]\times[0;Y],\\ &u_\varepsilon(t,0,y)=0, \quad (t,y)\in[0;T]\times[0;Y],\\ &u_\varepsilon(t,x,0)=0, \quad (x,t)\in[0;X]\times[0;T],\end{aligned} \tag{9}$$

где $0<\varepsilon$ - малый параметр.

Решение задачи (8) – (9) будем искать в виде

$$u_\varepsilon(t,x,y)=u(t,x,y)+\varphi_\varepsilon(t,x,y), \quad (t,x,y)\in G, \tag{10}$$

где $u(t,x,y)$ – решение задачи (1) – (2). Подставляя (10) в (8) получим

$$\varepsilon\varphi_{\varepsilon txy}+a_1(t,x,y)\varphi_{\varepsilon tx}+a_2(t,x,y)\varphi_{\varepsilon ty}+a_3(t,x,y)\varphi_{\varepsilon xy}+b_1(t,x,y)\varphi_{\varepsilon t}+b_2(t,x,y)\varphi_{\varepsilon x}+$$
$$+b_3(t,x,y)\varphi_{\varepsilon y}+c(t,x,y)\varphi_\varepsilon=-\varepsilon u(t,x,y).$$

При помощи подстановки

$$\varphi_\varepsilon(t,x,y)=\int_0^t\int_0^x\int_0^y\psi_\varepsilon(s,z,w)dwdzds, \quad (t,x,y)\in G,$$

последнее дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка сведем интегральному уравнению

$$\varepsilon\psi_\varepsilon(t,x,y)+a_1(t,x,y)\int_0^y\psi_\varepsilon(t,x,w)dw+a_2(t,x,y)\int_0^x\psi_\varepsilon(t,z,y)dz+a_3(t,x,y)\int_0^t\psi_\varepsilon(s,x,y)ds+$$
$$+b_1(t,x,y)\int_0^x\int_0^y\psi_\varepsilon(t,z,w)dwdz+b_2(t,x,y)\int_0^t\int_0^y\psi_\varepsilon(s,x,w)dwds+b_3(t,x,y)\times$$
$$\times\int_0^t\int_0^x\psi_\varepsilon(s,z,y)dzds+c(t,x,y)\int_0^t\int_0^x\int_0^y\psi_\varepsilon(s,z,w)dwdzds=-\varepsilon u(t,x,y). \tag{11}$$

Обе части уравнения (11) умножим на $\psi_\varepsilon(t,x,y)$ и дважды интегрируем по частям в области G_{txy}, при этом используем формулы Дирихле получим

$$\varepsilon\int_0^t\int_0^x\int_0^y\int_0^s\int_0^z\int_0^w\psi_\varepsilon^2(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau dwdzds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\{(t-s)(x-z)[a_1(s,z,w)-$$
$$-(y-w)a'_{1w}(s,z,w)]\left(\int_0^w\psi_\varepsilon(s,z,\eta)d\eta\right)^2+(t-s)(y-w)[a_2(s,z,w)-(x-z)a'_{2z}(s,z,w)]\times$$
$$\times\left(\int_0^z\psi_\varepsilon(s,\xi,w)d\xi\right)^2+(x-z)(y-w)[a_3(s,z,w)-(t-s)a'_{2s}(s,z,w)]\left(\int_0^s\psi_\varepsilon(\tau,z,w)d\tau\right)^2-$$
$$-2(t-s)(x-z)(y-w)[b_1(s,z,w)\left(\int_0^w\psi_\varepsilon(s,z,\eta)d\eta\right)\left(\int_0^z\psi_\varepsilon(s,\xi,w)d\xi\right)+$$
$$+b_2(s,z,w)\left(\int_0^s\psi_\varepsilon(\tau,z,w)d\tau\right)\left(\int_0^w\psi_\varepsilon(s,z,\eta)d\eta\right)+b_3(s,z,w)\left(\int_0^z\psi_\varepsilon(s,\xi,w)d\xi\right)\times$$
$$\times\left(\int_0^z\psi_\varepsilon(s,\xi,w)d\xi\right)]\}dwdzds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\{(t-s)[b_1(s,z,w)-(x-z)b'_{1z}(s,z,w)-$$

$$-(y-w)b'_{1w}(s,z,w)+(x-z)(y-w)b''_{1zw}(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w \psi_\varepsilon(s,\xi,\eta)d\eta d\xi\right)^2+(x-z)\times$$

$$\times[b_2(s,z,w)-(t-s)b'_{2s}(s,z,w)-(y-w)b'_{2w}(s,z,w)+(t-s)(y-w)b''_{2sw}(s,z,w)]\times$$

$$\times\left(\int_0^s\int_0^w \psi_\varepsilon(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)^2+(y-w)[b_3(s,z,w)-(t-s)b'_{3s}(s,z,w)-(x-z)b'_{3z}(s,z,w)+$$

$$+(x-z)(t-s)b''_{3sz}(s,z,w)]\left(\int_0^s\int_0^z \psi_\varepsilon(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)^2-\frac{1}{2}(t-s)(x-z)[c(s,z,w)-$$

$$-(y-w)c'_w(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w \psi_\varepsilon(s,\xi,\eta)d\xi d\eta\right)\left(\int_0^s\int_0^w \psi_\varepsilon(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)-\frac{1}{2}(t-s)(y-w)\times$$

$$\times[c(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w \psi_\varepsilon(s,\xi,\eta)d\eta d\xi\right)\left(\int_0^s\int_0^z \psi_\varepsilon(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)-\frac{1}{2}(x-z)\times$$

$$\times(y-w)[c(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)]\left(\int_0^s\int_0^w \psi_\varepsilon(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)\left(\int_0^s\int_0^z \psi_\varepsilon(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)\}dwdzds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\{[c(s,z,w)-(y-w)c'_w(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)]-(t-s)c'_s(s,z,w)+$$

$$+(t-s)(y-w)c''_{sw}(s,z,w)+(x-z)(y-w)c''_{zw}(s,z,w)+(t-s)(x-z)c''_{sz}(s,z,w)-$$

$$-(y-w)(x-z)(t-s)c'''_{szw}(s,z,w)]\left(\int_0^s\int_0^z\int_0^w \psi_\varepsilon(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right)^2\}dwdzds=$$

$$=\varepsilon\int_0^t\int_0^x\int_0^y\{[u'''_{szw}(s,z,w)-(t-s)u^{IV}_{szws}(s,z,w)-(x-z)u^{IV}_{szwz}(s,z,w)-$$

$$-(y-w)u^{IV}_{szww}(s,z,w)+(y-w)(x-z)u^{V}_{szwwz}(s,z,w)+(y-w)(t-s)u^{V}_{szwws}(s,z,w)+$$

$$+(t-s)(x-z)u^{V}_{szwsz}(s,z,w)-(t-s)(x-z)(y-w)u^{VI}_{szwszw}(s,z,w)]\times$$

$$\times\left(\int_0^s\int_0^z\int_0^w \psi_\varepsilon(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right)\}dwdzds, \qquad (t,x,y)\in G. \tag{12}$$

Пусть $u'''_{szw}(s,z,w)\in Z_2(G)$ и

$$\left|u'''_{szw}(s,z,w)-(t-s)u^{IV}_{szws}(s,z,w)-(x-z)u^{IV}_{szwz}(s,z,w)-(y-w)u^{IV}_{szww}(s,z,w)+\right.$$

$$+(y-w)(x-z)u^{V}_{szwwz}(s,z,w)+(y-w)(t-s)u^{V}_{szwws}(s,z,w)+(t-s)(x-z)\times$$

$$\left.\times u^{V}_{szwzs}(s,z,w)-(t-s)(x-z)(y-w)u^{VI}_{szwszw}(s,z,w)\right|\le C, \tag{13}$$

где $0<C$ – некоторая постоянная.

Тогда в силу условий *а) – г)* и (13) из (12) имеем

$$\frac{K}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\left(\int_0^s\int_0^z\int_0^w \psi_\varepsilon(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right)^2 dwdzds \le C\varepsilon\int_0^t\int_0^x\int_0^y\left|\int_0^s\int_0^z\int_0^w \psi_\varepsilon(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right| dwdzds,\ \varepsilon>0.$$

Отсюда в силу неравенства Гельдера имеем

$$\left\|u_\varepsilon(t,x,y)-u(t,x,y)\right\|_{L_2} \le \frac{2C}{K}\sqrt{TXY}\varepsilon,\quad (t,x,y)\in G, \qquad (14)$$

где $0<C$ – известная постоянная не зависящая от ε определена в условие (13). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполняются условия а), б), в), г) и функция u(t, x, y) из класса Z2(G) удовлетворяющие условие (13) является решением задачи (1) – (2). Тогда решение u_ε (t, x, y) задачи (8) - (9) представимо в виде (10) и при $\varepsilon\to 0$ сходится по норме $L_2(G)$ к решению u (t, x, y) задачи (1)-(2). При этом справедлива оценка (14).

Вывод. Доказано единственность и существование решения вырождающихся дифференциальных уравнений частных производных второго порядка, а также построен регуляризирующий оператор в классе Z_2 (G) .

Литература:

1. Арсенин В. Я., Савелова Т. Н. О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям первого рода типа свертки //Журнал вычслит. матем. и матем. физики.–1969.-Т.9, №6.-С.204-210.
2. Сергеев, В. О. Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР. –1971. – Т.197,
№3. – С.531-534.
3. Бухгейм, А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи Новосибирск: Наука, 1983, 317 с.__
4. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики Новосибирск: Изд-во СО АН СССР. –1962. 94 с.
5. Иманалиев, М. И., Асанов А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып.21. – С.3-38.
6. Асанов, А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра // Известия АН Киргизской ССР. –1988. –№1. – С.13-18.
7. Зулпукаров, Ж. А. Регуляризация решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с тремя независимыми переменными // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2000. – Вып.29. – С.137-142.