УДК 517.928
DOI 10.35254/bsu/2024.69.35

Туркманов Ж. К.
БГУ им. К.Карасаева,
к.ф-м.н. доц.
zhturkmanov@bhu.kg

Карынбаева М. М.,
БГУ им. К.Карасаева,
старший преподаватель
mkarynbaeva@bhu.kg

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Аннотация

В статье исследуются асимптотические разложения решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. Рассматриваются два класса сингулярно возмущенных уравнений: уравнения типа Прандтля-Тихонова с граничными слоями и устойчивыми решениями при малых параметрах, а также уравнения типа Лайтхилла с внутренними слоями и более сложной структурой решений. Представлен метод параметризации для анализа поведения решений вплоть до особой точки. Доказано существование решения задачи Коши для уравнения Лайтхилла при определенных условиях, включая положительность начального значения и непрерывную дифференцируемость коэффициентов. Показано преимущество метода параметризации перед классическим методом малого параметра при построении асимптотических разложений решений в окрестности особой точки. Приведен конкретный пример применения разработанного метода.

Ключевые слова: асимптотические разложения, нелинейные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения, малый параметр, сингулярные возмущения, граничные слои, параметризация, асимптотический анализ, поведение решений, Лайтхилл, Прандтль-Тихонов.

Turkmanov Zh.K.
BSU named after. K. Karasaev,
Ph.D. Assoc. Prof.
zhturkmanov@bhu.kg

Karynbaeva M. M.,
BSU named after. K. Karasaev,
senior lecturer
mkarynbaeva@bhu.kg

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF SOLUTIONS TO NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER

Abstract

This study examines the asymptotic expansions of solutions to nonlinear ordinary differential equations with a small parameter. Two classes of singularly perturbed equations are considered: Prandtl-Tikhonov type equations characterized by boundary layers and stable solutions with small parameters, and Lighthill-type equations distinguished by internal layers and more complex solution structures. A parameterization method was presented to analyze the solution behavior up to a singular point. The existence of a solution to the Cauchy problem for the Lighthill equation under certain conditions was proven. The advantage of the parameterization method over the classical small-parameter method in constructing asymptotic expansions of solutions near a singular point was demonstrated.

Keywords: asymptotic expansions, nonlinear equations, ordinary differential equations, small parameter, singular perturbations, boundary layers, parameterization, asymptotic analysis, solution behavior, Lighthill, Prandtl-Tikhonov.

Туркманов Ж. К.
К.Карасаев атындагы БМУ,
ф-м.илим. канд. доц.
zhturkmanov@bhu.kg

Карынбаева М. М.,
К.Карасаев атындагы БМУ,
ага окутуучу
mkarynbaeva@bhu.kg

КИЧИНЕ ПАРАМЕТРЛҮҮ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН АСИМПТОТТУК КЕҢЕЙҮҮЛӨРҮ

Кыскача мазмуну

Макалада кичине параметрлүү сызыктуу эмес кадимки дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык жайылышы изилденет. Сингулярдык козголгон теңдемелердин эки классы каралат: чек аралык катмарлары жана кичине параметрлерде туруктуу чечимдери мүнөздүү болгон Прандтль-Тихонов тибиндеги теңдемелер, жана ички катмарлары жана татаалыраак чечимдер түзүмү менен айырмаланган Лайтхилл тибиндеги теңдемелер. Өзгөчө чекитке чейинки чечимдердин жүрүм-турумун талдоо үчүн параметрлөө ыкмасы сунушталат. Белгилүү шарттарда Лайтхилл теңдемеси үчүн Коши маселесинин чечиминин бар экендиги далилденген. Өзгөчө чекиттин айланасында чечимдердин асимптотикалык жайылышын түзүүдө параметрлөө ыкмасынын кичине параметр ыкмасына салыштырмалуу артыкчылыгы көрсөтүлгөн.

Түйүндүү сөздөр: асимптотикалык кеңейүүлөр, сызыктуу эмес теңдемелер, кадимки дифференциалдык теңдемелер, кичинекей параметр, сингулярдык пертурбациялар, чектик катмарлар, параметрлөө, асимптотикалык анализ, чечимдердин жүрүм-туруму, Лайтхилл, Прандтл-Тихонов.

Введение. Чаще всего признаком сингулярно возмущенной задачи для дифференциальных уравнений является различие малого параметра при старшей производной. Мы будем пользоваться другим признаком сингулярности задачи, т.е. это – такие возмущенные уравнения, что при нулевом значении малого параметра порядок уравнений не снижается, однако содержит особую точку (в данной работе – на левом конце области определения). И если искать решения таких уравнений классическим методом малого параметра, то с увеличением порядка приближения по малому параметру в окрестности особой точки они перестают приближаться к точному решению, т.е. это явление аналогично «бисингулярной задаче» или «задаче с точкой поворота».

Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лайтхилла

$$\big(x+\varepsilon u(x)\big)u'(x)=r(x)-q(x)u(x),\quad u(1)=u^0, \qquad \textbf{(1)}$$

где $0<\varepsilon<<1$, u^0-заданная постоянная, $q(x),r(x)\in C^{\infty}[0,1]$ и $q_0=q(0)>0$.

Возникает вопросы: 1) существует ли решение задачи (1) на отрезке [0,1]?;

2) если существует, то можно ли получить равномерно пригодное решение на всем отрезке [0,1]?. [1, с. 11-17.]

Сначала запишем уравнение **(1)** в виде

$$\big(x(\xi)+\varepsilon u(\xi)\big)u'(\xi)=\Big(r\big(x(\xi)\big)-q\big(x(\xi)\big)u(\xi)\Big)x'(\xi),\qquad u(1)=u^0 \quad (2)$$

Решение задачи **(2)** будем искать в параметрической форме

$$u(\xi)=u_0(\xi)+\varepsilon u_1(\xi)+\varepsilon^2u_2(\xi)+\cdots,\ u(1)=u^0 \qquad (3.1)$$

$$x(\xi)=\xi+\varepsilon x_1(\xi)+\varepsilon^2x_2(\xi)+\cdots,\qquad x(1)=1 \qquad (3.2)$$

где $u_i(\xi)$, $x_{i+1}(\xi)$ $(i=0,1,2,\dots)$ - пока неопределенные функции, такие что $x_i(1)=u_i(1)=0$ $(i=0,1,2,\dots)$

Теперь подставляем ряды **(3.1)** и **(3.2)** в **(2)** имеем

$$\big(\xi+\varepsilon\big(u_0(\xi)+x_1(\xi)\big)+\varepsilon^2\big(u_1(\xi)+x_2(\xi)\big)+\cdots\big)(u_0'(\xi)+\varepsilon u_1'(\xi)+\varepsilon^2u_2'(\xi)+\cdots)=$$

$$=\{r(\xi)+r_1(\xi)(x_1(\xi)\varepsilon+x_2(\xi)\varepsilon^2+\cdots)+r_2(\xi)(x_1(\xi)\varepsilon+x_2(\xi)\varepsilon^2+\cdots)^2+\cdots+$$

$$+r_n(\xi)(x_1(\xi)\varepsilon+x_2(\xi)\varepsilon^2+\cdots)^n+\ldots-(q(\xi)+q_1(\xi)\big(x_1(\xi)\varepsilon+x_2(\xi)\varepsilon^2+\cdots\big)+$$

$$+q_2(\xi)(x_1(\xi)\varepsilon+x_2(\xi)\varepsilon^2+\cdots)^2+\cdots+q_n(\xi)(x_1(\xi)\varepsilon+x_2(\xi)\varepsilon^2+\cdots)^n+\cdots)\times$$

$$\times(u_0(\xi)+\varepsilon u_1(\xi)+\varepsilon^2u_2(\xi)+\cdots)\}\,(1+\varepsilon x_1'(\xi)+\varepsilon^2x_2'(\xi)+\cdots+\varepsilon^nx_n'(\xi)+\cdots)\quad (4)$$

где

$$q_i=q_i(\xi)=\frac{1}{i!}q^{(i)}(\xi),$$

$$r_i=r_i(\xi)=\frac{1}{i!}r^{(i)}(\xi),$$

$r_0(\xi)=r\,(\xi),\ q_0(\xi)=\ q(\xi)$

Отсюда, приравнивая коэффициента при одинаковых степенях ε имеем:

$$Lu_0 : \xi\, u_0'(\xi) + q(\xi)\, u_0(\xi) = r(\xi), \qquad u_0(1) = u^0 \qquad (5.0)$$

$$Lu_1 : \xi\, u_0'(\xi) x_1' - u_0' x_1 - u_0 u_0' + \{(r_1 - q_1 u_0) x_1(\xi)\}, \qquad u_1(1) = 0 \quad (5.1)$$

$$Lu_2 : \{\xi\, u_0'(\xi) x_2' - (u_0 + x_1) u_1' - (u_1 + x_2) u_0' + \{(r_1 - q_1 u_0) x_1 - q(u_1) x_1'\} +$$

$$+\{(r_1 x_2 + r_2 x_1^2 - q_1 x_1 u_1 - (q_1 x_2 + q_2 x_1^2\} u_0\} \qquad u_2(1) = 0 \quad (5.2)$$

$$\dots$$

$$Lu_n : \{\xi\, u_0' x_n' - u_0' + x_n + f_n(u_0, \dots, u_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-1}, u_0', \dots, u_{n-1}', x_1', \dots, x_{n-1}'\} +$$

$$+g_n(u_0, \dots, u_{n-1}, x_1, \dots, x_n), \qquad u_n(1) = 0 \qquad (5.n)$$

$$\dots$$

где

$$f_n(u_0 + x_1) u_{n-1}' - (u_1 + x_2) u_{n-2}' - \dots - (u_{n-2} + x_{n-1}) u_1' - u_{n-1} u_0' + (r_1 x_1 - q u_1 -$$

$$-q_1 x_1 u_0) x_{n-1}' + (r_1 x_2 + r_2 x_1^2 - q u_1 - q_1 x_1 u_1 - (q_1 x_2 + q_2 x_1^2) u_0)\, x_{n-2}' + \dots +$$

$$+(r_1 x_{n-1} + 2 r_2 x_1 x_{n-2} + 2 r_2 x_2 x_{n-3} + \dots + \varepsilon_{n-1} x_1^{n-1} - q_1 u_1 x_{n-2} - \dots -$$

$$-(q_1 x_{n-1} + 2 q_2 x_1 x_{n-2} + \dots + q_{n-1} x_1^{n-1}) u_0') x_1', \qquad (6.1)$$

$$q_n = r_1 x_n + 2 r_2 x_1 x_{n-1} + \dots + r_n x_1^n - q_1 x_1 u_{n-1} - (q_1 x_2 + q_2 x_1^2) u_{n-2} - \dots -$$

$$-(q_1 x_n + q_2 x_1 x_{n-1} + \dots + q_n x_1^n) u_0 \qquad (6.2)$$

Мы везде в этих уравнениях коэффициент $r(\xi) - q(\xi) u_0(\xi)$ при производной $x_n'(\xi)$ $(n = 1,2,\dots)$ заменили согласно **(5.0)** на $\xi u_0'$.

Из уравнений $(5.n)$ $(n = 1,2,\dots)$ следует, что если мы хотим определять функции $x_n(\xi)$ $(n = 1,2\dots)$ из дифференциальных уравнений, то мы должны предположить, что

$$\xi u_0' = r(\xi) - q(\xi) u_0(\xi) \neq 0, \qquad \xi \epsilon (0,1) \qquad (7)$$

И этого условия нельзя избежать при применении метода параметризации к уравнению (1)**,** хотя в [1] это условие не возникло в методе малого параметра.

Условие (7) впервые появилось в работах Вазова [2, с. 464] при обосновании метода *Лайтхилла*, затем в работах Сибуя и Такахаси [3, с. 172—193]. Отметим, что правое часть $(5.n)$ является линейной относительно $x_n(\xi)$, а функция f_n линейно.

Зависит от $u_0', u_1' \dots, u_{n-1}', x_1', \dots, x_{n-1}'$

Решение уравнения (5.0) можно представить в виде

$$u_0(\xi) = \xi^{-q_0} G(\xi) \left(u^0 + \int_1^\xi S^{q_0 - 1} G^{-1}(S) ds \right) := S^{-q_0} w(\xi) \qquad (8)$$

где,

$$G(\xi)=\left\{exp\int_{1}^{\xi}(q_0-q(s))S^{-1}ds\right\}$$

Пусть

$$u^0-\int_{0}^{1}S^{q_0-1}r(s)G^{-1}(s)ds\neq 0 \quad \Leftrightarrow w_0=w(0)\neq 0$$

Разлагая функцию $w(\xi)$ в ряд, приставим **(8)** в виде

$$u_0(\xi)=\xi^{-q_0}(w_0+w_1\xi+w_2\xi^2+\cdots) \qquad (9)$$

Отсюда имеем

$$u_0(\xi)=\ w_0\cdot\xi^{-q_0},\ \xi\to 0 \qquad (9.1)$$

Поскольку при дифференцировании $u_0(\xi)$ её особенность в точке $\xi=0$

увеличивается, то $x_1(\xi)$ лучше выбрать таким, чтобы первая фигурная скобка в **(5.1)** была равна нулю, т.е

$$\xi x_1'=x_1+u_0(\xi),\qquad x_1=0$$

Отсюда используя **(9)**, получаем

$$x_1(\xi)=\ \xi+\xi\int_{1}^{\xi}S^{-2}u_0(S)\,ds\sim-\frac{W_0}{1+q_0}\xi^{-q_0} \qquad (10)$$

Тогда уравнение **(5.1)** примет вид

$Lu_1\ =(r_1-q_1\,u_0)x_1\sim\widetilde{a_1}\xi^{-2q_0}$, где, $\widetilde{a_1}=const,$

Отсюда имеем

$u_1\ =\xi^{-q_0}G(\xi)\int_1^{\xi}\ G^{-1}(s)S^{q_0-1}\cdot(r_1(S)-q_1\,(S)u_0(S))x_1\,(S)\,ds\sim a_1\xi^{-2\,q_0},\ \ a_1=$ $const$ (11)

Теперь, приравнивая к нулю выражение в первой фигурной скобке правой части **(5.2)**, имеем

$$\xi x_2'-x_2=u_1+\Big((u_0+x_1)u_1'-\big((r_1q_1\,u_0)x_1-qu_1\big)x_1'\Big)(u_1')^{-1}\sim\widetilde{b_2}\xi^{-2\,q_0},\qquad \widetilde{b_2}=const$$

Отсюда получаем

$$x_2(\xi)\sim b_2\xi^{-2q_0},\quad b_2=const,\qquad \xi\to 0 \qquad (12)$$

Теперь уравнение (5.2) примет вид

$Lu_2{=}g_2\big(u_0,u_1,x_1,x_2\big)\sim\widetilde{a_2}\xi^{-3q_0},\ \ \widetilde{a_2}{=}\ const,\qquad \xi\to 0$

Решая это уравнение, имеем

$$u_2(\xi)\sim a_2\xi^{-3q_0},a_2\ =const,\qquad \xi\to 0 \qquad (13)$$

Если мы таким же способом определяем функцию $x_j(\xi)$ и $u_j(\xi)$ $\ (j=3,4,\dots)$ и

$$x_j(\xi)\sim b_j\xi^{-jq_0},\qquad u_j(\xi)\sim a_j\xi^{-(j+1)q_0} \qquad (14)$$

$(j = 1,2, \dots, n-1)$, где $a_j, b_j = const$, то в $(5.n)$ положим равным нулю выражение в первой фигурной скобке, т. е.

$$\xi x_n' - x_n = \left(u_0'(\xi)\right)^{-1} \cdot f_n(u_0, u_1 \dots, u_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-1}, u_0', \dots, u_{n-1}', x_1', \dots, x_{n-1}') \quad (15)$$

Учитывая **(6.1), (10)-(14)** и также то, что асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений можно дифференцировать. Это уравнение запишем в виде

$$\xi\, x_n' - x_n \backsim \tilde{b}_n \xi^{-q_0 n}, \qquad \tilde{b}_n = const$$

отсюда имеем

$$x_n(\xi) \sim b_n \xi^{-q_0 n}, \quad b_n = const, \qquad \xi \to o \qquad (16)$$

После выбора $x_n(\xi)$ из уравнения **(15)** уравнение **(5.n)** имеет вид:

$$Lu_n(\xi) = g_n(u_o, \dots, u_{n-1}, x_1, \dots, x_n) \qquad (17)$$

В силу **(10)-(14), (16)**, учитывая выражение **(6.2)** для g_n, имеем

$$g_n(\xi) \sim \tilde{a}_n, \xi^{-(n+1)q_0}, \ \tilde{a}_n = const, \qquad \xi \to 0$$

Поэтому решение уравнения **(17)** имеет асимптотику

$$u_n(\xi) \sim a_n \xi^{-(n+1)q_0}, \qquad a_n = const, \qquad \xi \to 0.$$

Следовательно, для любого: $j \in N$ для функции $x_j(\xi), u_j(\xi)$ справедливо асимптотика **(14).** Таким образом, при таком выборе функций $x_n(\xi)$ ряды **(3)** имеет асимптотику

$$u(\xi) \sim \xi^{-q_o}\{w_o + a_1 \varepsilon \xi^{-q_o} + \dots + a_n (\varepsilon \xi^{-q_o})^n + \dots\} \qquad (17.1)$$

$$x(\xi) \sim \xi - \frac{w_o}{1+g_o} \xi^{-q_o} \cdot \varepsilon + b_2 (\varepsilon \xi^{-q_o})^2 + \dots + b_n (\varepsilon \xi^{-q_o})^n + \dots \qquad (17.2)$$

Из **(3)** следует, что точке $x = 0$ соответствует корень уравнения

$$\xi_0 + \varepsilon x_1(\xi_0) + \varepsilon^2 x_2(\xi_0) + \ldots = 0 \qquad (18)$$

Причем, это уравнение должно иметь положительный корень, если решение уравнения **(1)** существует на отрезке $[0,1]$ отметим, что точка $\xi = 0$ является особой точкой уравнения (15)**,** откуда определяется $x_n(\xi)$ $(n = 1,2, \dots)$ в силу (17.2) уравнения (18) можно записать в виде

$$\xi_0 - \frac{w_0}{1+q_0} \xi^{-q_0} \cdot \varepsilon + O(\varepsilon^2 \xi^{-2q_0}) = 0$$

Отсюда имеем

$$\xi_0 \sim \left(\frac{w_0 \varepsilon}{1+q_0}\right)^{1/1+q_0}, \qquad \varepsilon \longrightarrow 0 \qquad (19)$$

Причем, при условии $w_0 > 0$, ξ_0 будет положительным. При этом очевидно, что на обрезке $[\xi_0, 1]$ ряды (3) или (17) сохраняют асимптотический характер. Подставляя (19) в (17.1), имеем

$$u(0) \sim w_0 \left(\frac{w_0 \varepsilon}{1 + q_0} \right)^{-q_{0/1+q_0}}, \qquad \varepsilon \longrightarrow 0$$

При $w_0 < 0$ точке $x = 0$ не отвечает положительный корень уравнения **(18),** поэтому решение уравнения (1) уходит в бесконечность, не дойдя до точки $x = 0$.

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия:1) $q(x), r(x) \in C^{\infty}[0,1]$, 2) $q_0 > 0$, 3) $w_0 > 0$, 4) $\xi u_0' \neq 0$, $\xi \in (0,1]$. Тогда решение задачи **(1)** существует на отрезке $[0,1]$ и оно представим в виде асимптотического ряда **(17).** Из вышеизложенного следует, что условие вызова: $u_0'(\xi) \neq 0$, $\xi \in$ (0,1] является существенным в методе Лайтхилла. [4, с. 1179-1201.]

Пример. Рассмотрим задачу Коши

$$\big(x + \varepsilon u(x)\big)u'(x) + u(x) = 0, \quad u(1) = b \qquad (20)$$

Сначала запишем уравнение **(20)** в виде

$$\big(x + \varepsilon u(x)\big)u'(\xi) + u(\xi)x'(\xi) = 0 \qquad (21)$$

Подставляя **(3)** в **(21)** и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, и из вышеизложенных следует, что

$$u(\xi) = b\xi^{-1} \qquad \textbf{(22)}$$

$$x(\xi) = \xi + \frac{b}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})\varepsilon \qquad \textbf{(23)}$$

Отсюда имеем решение задачи (**1**) в виде [5, с. 8-11.]

$$u(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 b^2} - x}{\varepsilon} \qquad (24)$$

Очевидно, что при $b > 0$ решение задачи **(23)** существует на отрезке $[0,1]$ и

$$u(0) = \frac{\sqrt{2b + \varepsilon^2 b^2}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Заключение. Продолжение решение уравнение **(1)** до точки x=0 методом возмущений является трудной задачей, т.е. эти особенности не только сохраняются в решениях высших порядков, но даже становятся резко выраженными при повышении порядка решения. Поэтому мы предложили новый метод получения параметрического представления решения этого уравнения на отрезке $[0,1]$ и показали, что решение дает при определенных условиях равномерно пригодные представления решения задачи **(1)** [6, с. 338].

Проведенное исследование доказывает преимущество применения метода параметризации к построению асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач включительно до особой точки.

Литература

1. Carrier, C. P. Boundary Layer Problems in applied mathematics / C. P. Carrier // Communications on Applied Mathematics. – 1954. – Vol. 7. – P. 11-17.

2. Вазов, В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений / В. Вазов. – Москва : Мир, 1968. – 464 с.

3. Takahashi, K. Uber eine erweiterte asymptotische Darstellung der Losung eines Systems von linearen homogenen Differentialgleichungen, welche von zwei Parametern abhängt / K. Takahashi // Tohoku Mathematical Journal. – 1958. – Vol. 10, № 2. – P. 172-193.

4. Lighthill, M. J. A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid / M. J. Lighthill // Philosophical Magazine. – 1949. – Vol. 40. – P. 1179-1201.

5. Алымкулов, К. Метод малого параметра и обоснование метода Лайтхилла / К. Алымкулов // Известия АН Киргизской ССР. – 1979. – № 6. – С. 8-11.

6. Туркманов, Ж. К. Об асимптотическом поведении решений возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с иррегулярной особой точкой / Ж. К. Туркманов, М. М. Карынбаева // Сборник научных работ 78-й Международной научной конференции Евразийского Научного Объединения. – Москва : ЕНО, 2021. – С. 338.