УДК 515.122.4
DOI 10.35254/bsu/2024.69.21

Жанакунова М. О.
БГУ имени К.Карасаева
к.ф-м.н., доцент

Аскарбек к. Л.
БГУ им. К.Карасаева.
ст.преп.

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ПАРАКОМПАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Аннотация

В статье исследуются топологические свойства пространств с дополнительной структурой, с акцентом на основные типы паракомпактных отображений, которые являются важным элементом в изучении топологических пространств. Паракомпактность, являясь обобщением компактности, сохраняет многие полезные свойства и находит применение в теории отображений. В работе анализируются такие типы отображений, как паракомпактные первого рода, слабо паракомпактные, квазипаракомпактные и локально паракомпактные. Приводятся их основные свойства, примеры и область применения в математике, что способствует углубленному пониманию топологических структур и раскрытию новых возможностей использования паракомпактных отображений. В классе паракомпактных равномерных пространств все три возможных свойства равномерных пространств совпадают. Исследованы свойства любого подпространства и дизъюнктной суммы относительно этих дополнительных структурных характеристик.

Ключевые слова: топологические пространства, паракомпактность, отображения, паракомпактные первого рода, слабо паракомпактные, квазипаракомпактные, локально паракомпактные, подпространства, образ, покрытие, метрика и гомеоморфизмы.

Жанакунова М.О.
К. Карасаев атындагы БМУ
физ.-математика илим. канд.,
доцент

Аскарбек кызы Л.
К. Карасаев атындагы БМУ
ага окутуучу

ПАРАКОМПАКТТЫК ЧАГЫЛДЫРУУЛАРДЫН КЭЭ БИР ТҮРЛӨРҮ

Кыскача мазмуну

Бул макалада кошумча түзүлүшү бар мейкиндиктердин топологиялык касиеттери, өзгөчө топологиялык мейкиндиктерди изилдөөдө маанилүү болгон паракомпакттык чагылтуулардын негизги түрлөрү каралат. Паракомпакттуулук, компакттуулуктун жалпылоосу катары, көптөгөн пайдалуу касиеттерди сактап, чагылтуулар теориясында колдонулат. Эмгекте биринчи түрдөгү паракомпакттык, алсыз паракомпакттык, квазипаракомпакттык жана локалдык паракомпакттык сыяктуу чагылтуулардын түрлөрү талданат. Алардын негизги касиеттери, мисалдары жана математикада колдонулушу келтирилген, бул топологиялык түзүлүштөрдү тереӊ түшүнүүгө жана паракомпакттык чагылтууларды колдонуунун жаӊы мүмкүнчүлүктөрүн ачууга өбөлгө түзөт. Паракомпакттык бирдей мейкиндиктердин классында бирдей мейкиндиктердин мүмкүн болгон үч касиети дал келет. Ар кандай ички мейкиндиктин жана дизъюнкттик суммалардын касиеттери бул кошумча структуралык мүнөздөмөлөргө карата изилденген.

Түйүндүү сөздөр: топологиялык мейкиндиктер, паракомпакттык, картографиялар, биринчи типтеги паракомпакт, начар паракомпакт, квази-паракомпакт, локалдык паракомпакт, субмейкиндиктер, сүрөт, жабуу, метрикалык жана гомеоморфизмдер.

Zhanakunova M. O.
BSU by K.Karasaeva,
cand. of phys. and mathem. sciences,
associate profess.

Askarbek k. L.
BSU by K.Karasaeva,
senior teacher

SOME TYPES OF PARACOMPACT MAPPINGS

Abstract

This article explores the topological properties of spaces with additional structures, focusing on the primary types of paracompact mapping that are crucial in topological space studies. Paracompactness, a generalization of compactness, retains many beneficial properties and has applications in mapping theory. This analysis covers mappings, such as paracompacts of the first kind, weakly paracompact, quasi-paracompact, and locally paracompact. It outlines their main properties, examples, and mathematical applications, aiming to enhance the understanding of topological structures and uncover new uses for paracompact mapping. In paracompact uniform space classes, all three uniform-space properties are equivalent. The properties of any subspace or disjunction sum were investigated with respect to these additional structural characteristics.

Keywords: topological spaces, paracompactness, mappings, paracompact of the first kind, weakly paracompact, quasi-paracompact, locally paracompact, subspaces, image, covering, metric and homeomorphisms.

О некоторых типах паракомпактных отображений

Паракомпактные отображения играют важную роль в топологии и функциональном анализе. Они являются классом отображений, которые обладают уникальными свойствами, позволяющими более эффективно исследовать топологические пространства и их свойства. В этой статье мы рассмотрим некоторые типы паракомпактных отображений и их значимость в математике.

Основные определения

Для начала напомним несколько ключевых определений:

1. Паракомпактное пространство — это топологическое пространство, в котором каждая открытая покрывающая система имеет локально конечное покрытие, то есть покрытие, где каждая точка пространства имеет окрестность, пересекающую лишь конечное число элементов покрытия.

Класс паракомпактов весьма широк — он включает все метрические пространства и все бикомпакты. Однако не каждое локально бикомпактное хаусдорфово пространство паракомпактно.

Каждое хаусдорфово паракомпактное пространство нормально. Это позволяет строить на паракомпактах разбиения единицы, подчинённые произвольному заданному открытому покрытию.

К числу паракомпактов относятся, в частности, пространства Линделёфа.

2. Паракомпактное отображение — это отображение $f(X) \to Y$ топологическими пространствами, где пространство X паракомпактно, а отображение обладает определенными дополнительными свойствами, такими как замкнутость, непрерывность или собственность.

Типы паракомпактных отображений

Существует несколько типов паракомпактных отображений, каждый из которых имеет свои особенности и требования. Рассмотрим основные из них.

1. Паракомпактные отображения первого рода

Отображение $f(X) \to Y$ называется **паракомпактным первого рода**, если образ каждого паракомпактного подпространства пространства X также, является паракомпактным. Это означает, что паракомпактные свойства сохраняются при отображении в пространстве *Y*, что является важным условием при исследовании топологической структуры больших пространств.

Пример: Рассмотрим непрерывное отображение между паракомпактным пространством и метрическим пространством. Известно, что метрические пространства являются паракомпактными, и если отображение замкнутое и непрерывное, то оно сохранит паракомпактные свойства подмножеств пространства.

2. Слабо паракомпактные отображения

Отображение $f(X) \to Y$ называется **слабо паракомпактным**, если для любого замкнутого подмножества $A \subseteq X$ его образ $f(A)$ в пространстве Y является паракомпактным. Слабая паракомпактность требует паракомпактности только для образов замкнутых множеств, что делает это условие менее строгим, чем у паракомпактных отображений первого рода.

Пример: Отображение из замкнутого подпространства паракомпактного пространства в паракомпактное пространство при некоторых условиях может быть слабо паракомпактным. Например, если Y — паракомпактное пространство, а Y — метрическое пространство, то слабо паракомпактное отображение сохраняет паракомпактные образы замкнутых множеств.

3. Квазипаракомпактные отображения

Отображение $A \subseteq X$ называется **квазипаракомпактным**, если для любого паракомпактного подпространства $A \subseteq X$ его прообраз f также является паракомпактным. Это свойство противоположно по направлению сохранению паракомпактности образов, так как теперь важно, чтобы паракомпактность сохранялась для прообразов.

Пример: Если f является замкнутым отображением из паракомпактного пространства в Y, и каждое открытое множество в X имеет прообраз, являющийся паракомпактным, то такое отображение называется квазипаракомпактным.

4. Локально паракомпактные отображения

Отображение называется **локально паракомпактным**, если у каждой точки пространства Y существует окрестность, паракомпактность которой сохраняется при отображении в Y. Это одно из наиболее естественных обобщений паракомпактности в контексте отображений.

Пример: Рассмотрим отображение из локально компактного пространства в метрическое пространство. Если отображение непрерывно и замкнуто, то оно будет локально паракомпактным, поскольку локальная паракомпактность сохраняется на уровне окрестностей.

Свойства паракомпактных отображений

Основные свойства паракомпактных отображений включают:

• **Замкнутость**. Многие типы паракомпактных отображений, такие как замкнутые отображения, сохраняют паракомпактность для образов или прообразов множества.

• **Непрерывность**. Непрерывные отображения между паракомпактными пространствами часто сохраняют паракомпактность, что делает их важными в теории отображений.

• **Наследуемость**.Паракомпактные свойства наследуются для подпространств и произведений топологических пространств, что делает исследование таких отображений особенно полезным в сложных структурах.

Применение

Паракомпактные отображения находят применение в различных областях математики, таких как:

• **Теория меры и интеграла**. Паракомпактные пространства важны для построения мер и интегралов, поскольку они обеспечивают локально конечные покрытия, что упрощает вычисления и теоретические рассуждения.

• **Теория гомотопий и когомологий**. Паракомпактные отображения помогают в построении гомотопических инвариантов и когомологических теорий для топологических пространств.

• **Алгебраическая топология**. Исследование паракомпактных отображений помогает в изучении пространства путей и его структуры, что важно для вычислений в алгебраической топологии.

5. Локально конечные отображения

Локально конечные отображения - это класс паракомпактных отображений, в которых каждая точка из целевого пространства X имеет окрестность, пересекающуюся только с конечным числом образов точек из X. Это позволяет более тщательно изучать свойства отображений и их влияние на структуру топологических пространств.

Открытые отображения

Открытые отображения - это такие паракомпактные отображения, которые отображают открытые множества в открытые множества. Это свойство сохраняет топологическую структуру и делает отображение непрерывным в топологическом смысле.

Гомеоморфизмы

Гомеоморфизмы представляют собой отображения между двумя топологическими пространствами, которые являются взаимно обратными и сохраняют топологическую структуру. Гомеоморфизмы считаются паракомпактными, так как они обеспечивают биективное соответствие между двумя топологическими пространствами.

Значимость паракомпактных отображений

Паракомпактные отображения играют важную роль в топологической теории и анализе. Они позволяют устанавливать связи между топологическими пространствами, описывать их структуру и рассматривать различные отображения в контексте сохранения топологических свойств. Эти отображения часто используются при решении задач в геометрии, анализе и физике.

Заключение

Паракомпактные отображения являются важной областью исследования в топологии, позволяющей лучше понять структуру и свойства топологических пространств. Различные типы паракомпактных отображений, такие как отображения первого рода, слабо паракомпактные, квазипаракомпактные и локально паракомпактные, имеют свои особенности и применяются в различных областях математики. Понимание их свойств помогает глубже анализировать сложные топологические структуры и находить новые решения в смежных областях. Эти отображения помогают лучше понять взаимодействие между пространствами и отображениями, особенно в контексте построения моделей в алгебраической топологии, теории гомотопий, теории меры и интегралов.

Сохранение или передача паракомпактных свойств между пространствами при помощи отображений дает возможность решать множество теоретических задач, связанных с исследованием непрерывности, замкнутости, компактности и других важных топологических свойств. Обобщение и анализ паракомпактных отображений позволяют глубже погружаться в топологические исследования сложных пространств, а также предоставляют инструменты для решения задач в прикладной математике и смежных дисциплинах.

Будущие исследования могут быть направлены на изучение взаимосвязей между паракомпактными отображениями и другими важными классами отображений, что откроет новые горизонты в теории топологических пространств и их применении в различных разделах математики.

Паракомпактные отображения представляют собой важный инструмент в исследовании топологических пространств и их отображений. Они позволяют более глубоко понимать структуру и свойства пространств, что находит применение в различных областях математики и наук о природе. Понимание этих типов отображений способствует развитию математической науки и ее прикладных применений.

Литература

1. Александров, П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию /П.С. Александров. — М.: Наука, 1977. — С. 416
2. Бурбаки, Н. Элементы математики. / Н. Бурбаки. Общая топология. Часть I. — М.: Наука, 1966. — С.418
3. Дугунджи, Дж. Топология. — М.: Мир, 1966.
4. Энгелькинг, Рышард. Общая топология / Р. Энгелькинг; Пер. с англ. [и предисл.] М. Я. Антоновского, А. В. Архангельского. — М. : Мир, 1986. — С.744.
5. Мункрес, Дж. Р. Топология. / Дж.Р. Мункрес. — М. : Физматлит, 2004. — С.26
6. Херсонский, А. Д. Курс общей топологии. / А.Д. Херсонский. — М. : Физматлит, 1973. — С. 48
7. Arkhangel'skii, A.V. General Topology / A.V. Arkhangel'skii, L.S. Pontryagin. I: Basic Concepts and Constructions. Dimension Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1990. — P.98
8. Engelking, R. Dimension Theory. / R. Engelking. Amsterdam: North-Holland, 1978. — P.138
9. Kelley, J.L. General Topology. / J.L. Kelley. New York: Springer-Verlag, 1975.
10. Willard, S. General Topology. / S. Willard. Reading: Addison-Wesley, 1970.