DOI: https://doi.org/10.69722/1694-8211-2024-57-75-83
УДК: 511

***Камчиева А. М.**, аспирант, научный сотрудник*
kamchieva.asel@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7272-4791,
КАО
***Урдалетова А. Б.**, канд. физ.-мат. наук, профессор*
anarkul.urdaletova@manas.edu.kg
ORCID: 0000-0003-4420-3961
КТУ «Манас»
***Кыдыралиев С. К.**, докт. экон. наук,*
канд. физ.-мат. наук, профессор
kydyraliev_s@auca.kg
ORCID: 0000-0001-6305-9251
АУЦА
г. Бишкек, Кыргызстан

НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

В статье рассматривается текущее состояние развития математики, её влияние на компетентность и уровень знаний современных школьников, раскрывается значимость логической строгости для освоения математических навыков и способности к творческому мышлению. Акцент делается на необходимости применения математических знаний в решении нестандартных задач, а также на развитии аналитического склада ума. Исследуется влияние математических олимпиад и общереспубликанского тестирования на формирование у школьников глубоких математических навыков и логического мышления. Главная роль в исследовании отводится новому подходу в решении иррациональных уравнений и неравенств, применение которого ведет к развитию логики, интуиции, креативного мышления, а также позволяет ответить на вопросы не только из различных разделов математики, но и в физике, химии. Определены основные этапы нового подхода в решении иррациональных уравнений и неравенств, отмечена эффективность применения в решении некоторых типов иррациональных уравнений и неравенств.

***Ключевые слова**: функциональная грамотность, математика, иррациональное уравнение, иррациональное неравенство, креативное мышление, ОРТ.*

***Камчиева А. М.**, ага илимий кызматкер, аспирант*
kamchieva.asel@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7272-4791
КББА
***Урдалетова А. Б.**, физ.-мат. илимд. канд., профессор*
anarkul.urdaletova@manas.edu.kg
ORCID: 0000-0003-4420-3961
«Манас» КТУ
***Кыдыралиев С. К.**, экон. илимд. докт., профессор*
kydyraliev_s@auca.kg
ORCID: 0000-0001-6305-9251
Борбордук Азиядагы Америка университети
Бишкек ш., Кыргызстан

ИРРАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЖАНА БАРАБАРСЫЗДЫКТАРДЫ ЧЫГАРУУНУН ЖАҢЫ ЫКМАСЫ

Макалада математиканын өнүгүүсүнүн учурдагы абалы, анын азыркы мектеп окуучуларынын компетенттүүлүгүнө жана билим деңгээлине тийгизген таасири каралып, математикалык көндүмдөрдү өздөштүрүү үчүн логикалык катаалдуулуктун жана чыгармачылык менен ойлонуу жөндөмүнүн мааниси ачылат. Математикалык билимди стандарттуу эмес маселелерди чечүүдө колдонуу зарылдыгына, ошондой эле аналитикалык акыл-эсти өнүктүрүүгө басым жасалат. Мектеп окуучуларынын терең математикалык көндүмдөрүн жана логикалык ой жүгүртүүсүн өнүктүрүүгө математикалык олимпиадалардын жана жалпы республикалык тестилөөнүн таасири изилденген. Изилдөөдө негизги ролду иррационалдык теңдемелерди жана барабарсыздыктарды чечүүгө жаңыча мамиле кылат, аны колдонуу логиканы, туюмду, чыгармачылык ой жүгүртүүнү өнүктүрүүгө алып келет, ошондой эле математиканын ар кандай тармактарынан гана эмес, физика жана химия боюнча суроолорго жооп берүүгө мүмкүндүк берет. Иррационалдык теңдемелерди жана барабарсыздыктарды чечүүдө жаңы ыкманын негизги этаптары аныкталып, иррационалдык теңдемелердин жана барабарсыздыктардын айрым түрлөрүн чыгарууда колдонуунун натыйжалуулугу белгиленди.

***Түйүндүү сөздөр**: функционалдык сабаттуулук, математика, иррационалдык теңдеме, иррационалдык барабарсыздыктар, чыгармачыл ой жүгүртүү, ЖРТ.*

Kamchieva A. M., *postgraduate student of the Kyrgyz Academy of Education,*
kamchieva.asel@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7272-4791
Urdaletova A. B., *cand. of physical and mathem. sciences, professor*
anarkul.urdaletova@manas.edu.kg
ORCID: 0000-0003-4420-3961
Kyrgyz-Turkish University "Manas"
Kydyraliev S. K., *doctor of economics, professor*
kydyraliev_s@auca.kg
ORCID: 0000-0001-6305-9251
American University of Central Asia
Bishkek city, Kyrgyzstan

NEW APPROACH TO SOLVING IRRATIONAL EQUATIONS AND INEQUALITIES

The article examines the current state of mathematics development, its impact on the competence and level of knowledge of modern schoolchildren, reveals the importance of logical rigor for mastering mathematical skills and the ability to think creatively. The emphasis is on the need to apply mathematical knowledge in solving non-standard problems, as well as on the development of an analytical mindset. The influence of mathematical Olympiads and nationwide testing on the formation of students' deep mathematical skills and logical thinking is investigated. The main role in the research is given to a new approach to solving irrational equations and inequalities, the application of which leads to the development of logic, intuition, creative thinking, and also allows you to answer questions not only from various branches of mathematics, but also in physics and chemistry. The main stages of a new approach to solving irrational equations and inequalities are determined, and the effectiveness of using some types of irrational equations and inequalities in solving is noted.

***Keywords:** functional literacy, mathematics, irrational equation, irrational inequality, creative thinking, ORT.*

Математика, как и все науки, не стоит на месте, она продолжает своё развитие, внезапно находя новейшее применение давным-давно открытым гипотезам. Успешность в исследовании математики зависит от компетентности, которые формируются на данный момент времени. Упрочнение практических опытов находится в непрямой зависимости от подуровня знания методологического материала [1, с. 107]. Логическая строгость обеспечивает интуитивное, осмысленное освоение математическими познаниями, навыками и умениями, способствует становлению математических способностей.

Поиск ответов на разные задачи требует от каждого из нас, от всего общества, хорошо развитой способности к творческой деятельности, креативному мышлению и функциональной грамотности. Научиться применению основ математики каждому обучающемуся ей, не очень и сложно [6, с. 4]. Ученик способен отыскать в данных условиях более или менее оптимальное решение [4, с. 136]. Но сейчас к математике предъявляются еще новые требования, математические знания должны быть применимы учениками для решения неординарных, нестандартных задач, которые в свою очередь имеют прикладной характер.

В нашем исследовании основной целью являются: увеличение запаса систематизированных знаний, умений и навыков в решении иррациональных уравнений и неравенств. Обучающийся должен получить сформированность логики, прикладных навыков, применять результаты современной деятельности в решении поставленных задач [8]. Развитие аналитического склада ума максимально способствует усовершенствованием математического склада ума. Правильное решение текстовых задач, в конечном счёте, сводящееся к исследованию различных видов уравнений, сравнимо с искусством [3].

Талантливые, творчески мыслящие школьники, участвующие в математических олимпиадах всевозможного уровня, должны научиться нестандартным путям решений. В итоге это поможет получению высокого результата общереспубликанского тестирования (ОРТ). Важный обязательный критерий ОРТ – это правильное исследование различных видов уравнений. Одними из обширных разделов изучения математики в рамках школьной программы считаются уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств. Они имеют широкий спектр применения не только в различных разделах математики, но и в физике, химии. Решение множества прикладных задач не обходится без их использования. Анализ решения каждой задачи способствует укреплению навыков решения уравнений, повышает математическую интуицию в выборе способа решения, развивает критическое мышление и логику.

Решение иррациональных уравнений и неравенств является важным и довольно сложным разделом школьного курса математики. Обычно, при решении иррациональных уравнений путем возведения обеих частей уравнения в соответствующую степень, пытаются «уединить радикал», то есть представить уравнение в виде $A(x)=\sqrt[n]{B(x)}$, где $A(x)$ и $B(x)$ — рациональные выражения. Тогда, после возведения обеих частей уравнения в n-ю степень, получается рациональное уравнение.

В данной работе будет представлен новый метод решения иррациональных уравнений, использующий сведения к системе уравнений.

1. Поводом к появлению этого метода явились попытки решить уравнение №84, предложенное в замечательной книге Ч. Тригга «Задачи с изюминкой» [7]:

$\sqrt[3]{6x+28}-\sqrt[3]{6x-28}=2$, а также близкое к нему уравнение $\sqrt[3]{6x+28}+\sqrt[3]{6x-28}=6$.

В книге предложен стандартный вариант решения уравнения $\sqrt[3]{6x+28}-\sqrt[3]{6x-28}=2$. Нужно возвести обе части уравнения в 3-ю степень: $(6x+28)-3\sqrt[3]{(6x+28)^2(6x-28)}+3\sqrt[3]{(6x+28)(6x-28)^2}-(6x-28)=8$.

На следующем шаге следует привести подобные члены и вынести за скобки общий множитель: $-3\sqrt[3]{(6x+28)(6x-28)}[\sqrt[3]{(6x+28)}-\sqrt[3]{(6x-28)}]=-48$.

Далее, остается воспользоваться тем, что выражение в квадратных скобках равно 2, и решить уравнение $\sqrt[3]{(6x+28)(6x-28)}=8$.

К сожаленью, при решении уравнения $\sqrt[3]{6x+28}+\sqrt[3]{6x-28}=6$, если следовать вышеуказанным путем, после соответствующих преобразований, получим довольно сложное уравнение $3\sqrt[3]{(6x+28)(6x-28)}\cdot 6=216-12x$.

Поэтому, желательно идти другим путем.

Дальнейшее изложение иллюстрирует другой, новый метод решения иррациональных уравнений.

2. *Решите уравнение* $\sqrt{4x+8}+\sqrt{3x+4}=11$.

Решение

Заметим, что $\sqrt{4x+8}=2\sqrt{x+2}$, и обозначим $\sqrt{x+2}=a$; $\sqrt{3x+4}=b$. Тогда, $3a^2-b^2=3(x+2)-(3x+4)=2$, и имеет место система уравнений: $2a+b=11;\ 3a^2-b^2=2$.

Выразим b из первого уравнения: $b=11-2a$ и подставим во второе: $3a^2-(11-2a)^2=2 <=> a^2-44a+123=0$. Корни этого уравнения: $a=3$ и $a=41$.

При $a=41$ число $b=11-2a$ отрицательно. А так как b является квадратным корнем, он должен быть неотрицательным. Таким образом, данное значение является посторонним.

Итак, $\sqrt{x+2}=a=3$. Возведем полученное уравнение в квадрат:

$x+2=9$ и получим $x=7$.

Подставив найденное значение в исходное уравнение, убедимся в том, что оно является корнем.

3. *Решите уравнение* $\sqrt{2x^2+6x+13}-\sqrt{x^2+3x-2}=3$.

Решение

Обозначим $\sqrt{2x^2+6x+13}=a$; $\sqrt{x^2+3x-2}=b$. Тогда, $a^2-2b^2=17$, и имеет место система уравнений: $a-b=3;\ a^2-2b^2=17$. Отсюда, $a=b+3$ и, подставив во второе: $(b+3)^2-2b^2=17 <=> b^2-6b+8=0$. Корни этого уравнения: $b=2$ и $b=4$.

Итак, для того чтобы закончить решение, нужно решить два уравнения:

$\sqrt{x^2+3x-2}=2;\ \sqrt{x^2+3x-2}=4.$

Первое уравнение: $\sqrt{x^2+3x-2}=2 <=> x^2+3x-2=4 <=> x^2+3x-6=0$.

Его корни: $x_1=-1,5-\sqrt{8,25};\ x_2=-1,5+\sqrt{8,25}$.

Второе уравнение: $\sqrt{x^2+3x-2}=4 <=> x^2+3x-2=16 <=> x^2+3x-18=0$

.

Его корни: $x_3=-1,5-4,5=-6;\ x_4=-1,5+4,5=3$.

Подставив найденные значения в исходное уравнение, убедимся в том, что они являются корнями.

4. *Решите уравнение* $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=0,5x+3$.

Решение

Обозначим $\sqrt{2x+5}=a;\ \sqrt{x-1}=b$. Тогда, $a^2-b^2=(2x+5)-(x-1)=x+6$, и имеет место система уравнений: $a+b=0,5x+3;\ a^2-b^2=x+6$. Воспользуемся формулой для разности квадратов, и убедившись в том, что $x=-6$ не является корнем, придем к системе $a+b=0,5x+3;\ a-b=2$. Из этой системы, $2a=0,5x+5$.

Итак, $2\sqrt{2x+5}=0,5x+5$. Возведём это уравнение в квадрат, приведем подобные члены и получим уравнение $x^2-12x+20=0$ с корнями $x_1=2;\ x_2=10$.

Подставим найденные значения в исходное уравнение и убедимся в том, что они являются корнями.

5. *Решите уравнение* $\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2-3x-5}=0,5x+1$.

Решение

Обозначим $\sqrt{3x^2+2x+1}=a;\ \sqrt{2x^2-3x-5}=b$.

Тогда, имеет место система уравнений: $a-b=0,5x+1;\ a^2-b^2=x^2+5x+6$.

Отсюда, предположив, что $a-b=0,5x+1$ отлично от нуля, и воспользовавшись тем, что $a^2-b^2=2(x+3)(0,5x+1)$, придем к системе $a-b=0,5x+1$; $a+b=2(x+3)$. Решив эту систему, получим $b=0,75x+2,5$. Итак, $\sqrt{2x^2-3x-5}=0,75x+0,25$. Возведём это уравнение в квадрат, приведем подобные члены и получим уравнение: $1,4375x^2-6,75x-11,25=0$ с корнями $x_1=-30/23;\ x_2=6$.

Нужно не забыть проверить случай $0,5x+1=0 <=> x=-2$.

Подставим найденные значения в исходное уравнение и убедимся в том, что они являются корнями. Ответ: $x_1=-30/23;\ x_2=6;\ x_3=-2$.

6. *Решите неравенство* $\sqrt{2x^2+5x+19}-\sqrt{2x^2-3x-5}>4$.

Решение

По нашему мнению, неравенства лучше всего, за исключением некоторых специальных случаев, решать методом интервалов. На этом пути нужно:

a) найти область определения;

b) заменить в неравенстве знак неравенства на равенство и решить полученное уравнение;

c) разбить область определения на интервалы корнями уравнения;

d) взять по одной точке из полученных интервалов, и вычислив в них значения соответствующих выражений, выбрать те, в которых выполняется исходное неравенство.

Давайте действовать по порядку.

a) Область определения задачи — это точки, в которых выражения под квадратным корнем неотрицательны. Трехчлен $2x^2 + 5x + 19$ положителен при всех значениях x.

Поэтому область допустимых значений неравенства совпадает с решением неравенства $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$ — множеством $(-\infty; -1] \cup [2,5; +\infty)$.

b) Решим уравнение $\sqrt{2x^2 + 5x + 19} - \sqrt{2x^2 - 3x - 5} = 4$.

Для этого поступим уже привычным образом. Обозначим $\sqrt{2x^2 + 5x + 19} = a$; $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = b$. Тогда:

$$\begin{cases} a - b = 4; \\ a^2 - b^2 = 8x + 24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 4; \\ a + b = 2x + 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x + 5; \\ b = x + 1. \end{cases}$$

Отсюда, $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = x + 1$. Возведём обе части этого уравнения в квадрат, приведем подобные члены и получим уравнение: $x^2 - 5x - 6 = 0$ с корнями $x_1 = -1$; $x_2 = 6$.

Подставим найденные значения в исходное уравнение и убедимся в том, что они являются корнями.

c) Разобьём область определения неравенства $(-\infty; -1] \cup [2,5; +\infty)$ на интервалы корнями уравнения: $(-\infty; -1) \cup [2,5; 6) \cup (6; +\infty)$.

d) Точка -10 принадлежит промежутку $(-\infty; -1)$.

Подставив в исходное неравенство: $\sqrt{2(-10)^2 + 5(-10) + 19} - \sqrt{2(-10)^2 - 3(-10) - 5} > 4$, получаем неверное утверждение. То есть промежуток $(-\infty; -1)$ в решение не входит.

Точка 5 принадлежит промежутку $[2,5; 6)$.

Вычислив значение выражения $\sqrt{2x^2 + 5x + 19} - \sqrt{2x^2 - 3x - 5}$ в точке

$x = 5$, получим приблизительно 4,1276. То есть промежуток $[2,5; 6)$ в решение входит.

Из третьего промежутка $(-\infty; -1)$ возьмем точку 10. Значение выражения $\sqrt{2x^2 + 5x + 19} - \sqrt{2x^2 - 3x - 5}$ в точке $x = 10$ приблизительно равно 3,556. Следовательно, этот промежуток в решение не входит.

Итак, решением неравенства является множество $[2,5; 6)$.

7. Стоит отметить, что умение решать иррациональные неравенства оказывается необходимым и при решении уравнений. Конечно, обычно, можно решить уравнение, а затем проверить, удовлетворяют ли найденные корни этому уравнению. Но на этом пути могут быть различные осложнения.

Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

Решение

Обозначим $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=a$; $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=b$. Тогда, имеет место система уравнений: $a+b=2;\ a^2-b^2=4\sqrt{x-1}$. Воспользуемся формулой для разности квадратов, и придем к системе $a+b=2;\ a-b=2\sqrt{x-1}$. Из этой системы, $2a=2+2\sqrt{x-1}$. Поэтому, вернувшись к исходным обозначениям, получим $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=1+\sqrt{x-1}$. Возведём обе части этого уравнения в квадрат, приведем подобные члены и получим верное равенство. То есть, исходному уравнению удовлетворяют все значения x, которые принадлежат его области определения — множеству $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\geq 0$; $\sqrt{x-1}\geq 0$.

Как следствие, решением уравнения является отрезок $[1; 2]$.

8. Рассмотрим еще один пример.

Решите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x-9}=-1$.

Решение

Обозначим $\sqrt{x}=a$; $\sqrt[3]{x-9}=b$. Тогда, имеет место система уравнений: $a+b=-1;\ a^2-b^3=9$. Выразим a из первого уравнения и подставим во второе: $(-1-b)^2-b^3=9 <=> b^3-b^2-2b+8=0$. Заметим, что если сгруппировать первое и четвертое, а также второе и третье слагаемые, то получится общий множитель $b+2$. В итоге, уравнение можно записать в виде $(b+2)(b^2-3b+4)=0$. Так как оно имеет единственный действительный корень $b=-2$, получим $\sqrt[3]{x-9}=-2$. Следовательно, $x=1$.

Настала пора вернуться к исходным уравнениям.

9. Покажем, как уравнение $\sqrt[3]{6x+28}-\sqrt[3]{6x-28}=2$ можно решить предложенным нами способом.

Решение

Обозначим $\sqrt[3]{6x+28}=a$; $\sqrt[3]{6x-28}=b$.

Тогда $a^3-b^3=(6x+28)-(6x-28)=56$. Это равенство и исходное уравнение приведут нас к системе уравнений: $a-b=2;\ a^3-b^3=56$, где a, b новые неизвестные.

Из первого уравнения системы имеем равенство $a=b+2$. Тогда второе уравнение системы примет вид $(b+2)^3-b^3=56$. Раскрыв скобки и упростив, получим квадратное уравнение $b^2+2b-8=0$. Его корни: $b_1=-4;\ b_2=2$.

Следовательно,

если $b=-4$, то $\sqrt[3]{6x-28}=-4 => 6x-28=-64 => x=-6$;

если $b=2$, то $\sqrt[3]{6x-28}=2 => 6x-28=8 => x=6$.

10. *Решить уравнение* $\sqrt[3]{6x+28}+\sqrt[3]{6x-28}=6$.

Решение

Обозначим $\sqrt[3]{6x+28}=a;\ \sqrt[3]{6x-28}=b$.

Это приведет нас к системе уравнений: $a+b=6;\ \ a^3-b^3=56$.

Из первого уравнения системы имеем равенство $a=6-b$.

Тогда второе уравнение системы примет вид $(6-b)^3-b^3=56$. Раскрыв скобки и упростив, получим кубическое уравнение $b^3-9b^2+54b-80=0$. Путем перебора можно найти, что оно имеет корень $b=2$. Поэтому, $b^3-9b^2+54b-80=0 <=> (b-2)(b^2-7b+40)=0$. Это уравнение имеет единственный действительный корень $b=2$. Таким образом, $\sqrt[3]{6x-28}=2 => 6x-28=8 => x=6$.

Заключение

Общий алгоритм решения:

Для решения уравнений или неравенств следует выделять общий прием решения, который можно представить следующими этапами:

1. Определить вид уравнения, неравенства.
2. Определить стандартное оно или нет.
3. Если стандартное, то решить в соответствии с известным правилом, алгоритмом.
4. Если нестандартное, то выяснить, какие преобразования необходимо выполнить, чтобы свести его к стандартному, либо перейти к использованию искусственных приемов решения.
5. Выполнить эти преобразования.
6. Сделать проверку.
7. Записать ответ.

Таким образом, нами были рассмотрены общие методы решения иррациональных уравнений, неравенств и их систем. Были выявлены общие подходы к решению, систематизированы методы решения, как иррациональных неравенств, так и иррациональных уравнений. Эти подходы применяли в практической части работы, для решения систем, содержащих иррациональные уравнения и неравенства. [2]

Данная работа помогает разобраться в методах решения иррациональных уравнений и неравенств, способствует углублению знаний и их закреплению. Изучение темы иррациональные уравнения очень важно при подготовке одаренных детей

При решении иррациональных уравнений, обычно, используют формулы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;\ \ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;\ \ (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Метод, предлагаемый в данной работе, позволяет расширить этот набор за счет формул типа: $a^2-b^2=(a-b)(a+b);\ \ a^3+b^3=(a-b)(a^2+ab+b);$

$a^3-b^3=(a+b)(a^2-ab+b)$. Примеры, рассмотренные в данной работе, показывают, что данный подход может быть эффективным при решении некоторых типов иррациональных уравнений и неравенств.

Литература:

1. Жафяров, А. Ж., Методология и технология внедрения компетентностного подхода в математическом образовании // Вестник НГПУ. 2016. №3 (31). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodologiya-i-tehnologiya-vnedreniya-kompetentnostnogo-podhoda-v-matematicheskom-obrazovanii (дата обращения: 19.04.2024).
2. Исакова, М. М., Тлупова, Р. Г., Эржибова, Ф. А., Ибрагим, А. С. Нетрадиционные методы решений иррациональных уравнений // Вестник ЮУрГГПУ. 2018. №3. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/netraditsionnye-etody-resheniy-irratsionalnyh-uravneniy (дата обращения: 14.03.2024).
3. Пойа, Д. Как решать задачу [Текст]: монография / Д. Пойа. - М.: Госучпедгиз, 1959. -208 с.
4. Пуанкаре А. Математическое творчество [Текст] / А. Пуанкаре // О науке / под ред. Л.С. Портнягина. - М.: Наука, 1989. - С. 399–414.
5. Уразаева, Л. Ю., Хмарская, Я. А. Проблемы поддержки детей, одаренных в области математики. Восемнадцатая всероссийская студенческая научно-практическая конференция Нижневартовского государственного университета. Статьи докладов. Ответственный редактор А.В. Коричко. 2016. С. 1277-1280.
6. Фирсов, В. В. Планирование обязательных результатов обучения математике [Текст] / В.В. Фирсов. - М.: Просвещение, 1989. –236 с.
7. Тригг Ч. Задачи с изюминкой -М.: Мир, 1975. -302 с.
8. Шахмейстер А. Х. Иррациональные уравнения и неравенства [Текст] / А.Х. Шахмейстер. -М.: Петроглиф; Виктория плюс, МЦНМО, 2011. - 216 с.