УДК: 373.2

Бактыгулова Н. Ш., Болотбек уулу С., Макеев А. К.

Бактыгулова Н. Ш. – магистрант, НГУ имени С. Нааматова

Болотбек уулу С. – студент, НГУ имени С. Нааматова

Макеев А. К. – к.п.н., доцент, НГУ имени С. Нааматова

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ METHOD OF SEPARATION OF VARIABLES FOR PARABOLIC EQUATIONS

Аннотация: *Данная статья рассматривает метод разделения переменных в контексте смешанной задачи для уравнения с переменными коэффициентами. Уравнение описывает распространение тепла или колебания в стержне и имеет вид:*

$$\underline{\partial u}\ d\ \underline{du}\ \partial u - (k(x)\ \_\_) - q(x)u =$$
$$p(x)\ \_\_$$
$$\partial t \quad dx \quad\quad dx \quad\quad\quad\quad \partial t$$

с граничными условиями $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$ *и начальным условием* $u(x,0) = \varphi(x)$. *Используя метод разделения переменных, предполагается, что решение имеет вид* $u(x, t) = X(x)T(t)$, *что приводит к системе уравнений. После разделения переменных получаем дифференциальное уравнение для* $X(x)$ *и уравнение для* $T(t)$, *которые связаны параметром* λ.

Задача Штурма-Лиувилля возникает из граничных условий для $X(x)$, *и ее решение определяет собственные значения* λ_n *и соответствующие собственные функции* $X_n(x)$.

Доказывается существование счетного множества положительных собственных значений и их ортогональность с весом $p(x)$ *на отрезке* $[0, l]$. *Для функций, удовлетворяющих граничным условиям, доказывается разложение в ряд Фурье по собственным функциям задачи.*

Для решения системы уравнений используются коэффициенты Фурье, которые определяются через интегралы от произведения $p(x), f(x)$ и $X_k(x)$.

Статья также содержит пример решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности в стержне с неоднородными граничными условиями.

В заключение, отмечается, что метод разделения переменных может быть применен и к другим типам уравнений, таким как гиперболические или эллиптические уравнения, что обсуждается в статье.

Abstract: *This article examines the method of separation of variables in the context of a mixed problem for an equation with variable coefficients. The equation describes the propagation of heat or vibrations in the rod and has the form:*

$$\underline{\partial u}\ d\ \underline{du}\ \partial u - (k(x)\ \_\_) - q(x)u =$$
$$p(x)\ \_\_$$
$$\partial t \quad dx \quad\quad dx \quad\quad\quad\quad \partial t$$

with boundary conditions $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ *and initial condition* $u(x, 0) = \varphi(x)$. *Using the method of separating variables, it is assumed that the solution has the form* $u(x, t) = X(x)T(t)$, *which leads to a system of equations. After separating the variables, we get the differential equation for X(x) and the equation for T(t), which are related by the parameter λ.*

The Sturm-Liouville problem arises from the boundary conditions for X(x), and its solution determines the eigenvalues λ_n *and the corresponding eigenfunctions* $X_n(x)$.

The existence of a countable set of positive eigenvalues and their orthogonality with weight p(x) on the segment [0, l] is proved. For functions satisfying boundary conditions, the Fourier series expansion in terms of the eigenfunctions of the problem is proved.

To solve the system of equations, Fourier coefficients are used, which are determined through integrals from the product $p(x), f(x)$ *and* $X_k(x)$.

The article also provides an example of solving a mixed problem for the equation of thermal conductivity in a rod with inhomogeneous boundary conditions.

In conclusion, it should be noted that the method of separating variables can be applied to other types of equations, such as hyperbolic or elliptic equations, which are considered in the article.

Ключевые слова: *определения, теоремы, доказательство, смешанные задачи, формулы, решение задач.*

Keywords: *definitions, theorems, proof, mixed problems, formulas, problem solving.*

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения с переменными коэффициентами:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = p(x)\frac{du}{dt}, 0 < x < l, t > 0, (1)$$

$$\begin{cases} u(x,t)|_{x=0} = 0, u(x,t)|_{x=l} = 0, t \geq 0 \ (2) \\ u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), 0 \leq x \leq l. (3) \end{cases}$$

Предполагаем, что функции k(x), q(x) и p(x) непрерывны на отрезке [o, |] и выполнены неравенства:

$$k(x) > 0, p(x) > 0, q(x) \geq 0, x \in [0, l].$$

Будем искать решение задачи (1) - (3) в форме:

$$u(x,t) = X(x)T(t), (4)$$

и, подставляя (4) в (1), после разделения переменных получим

$$\frac{(k(x)X')' - q(x)X}{p(x)X} \quad \frac{T'}{T} == -\lambda. (5)$$

Из (2) и (4) вытекает, что функции X (x) должны удовлетворять граничным условиям $X(0) = 0, X(l) = 0$. Присоединив эти граничные условия к дифференциальному уравнению для X (x), получим так называемую задачу Штурма-Лиувилля

$$(6) \begin{cases} k(x)X')' - q(x)X + \lambda + p(x)X = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0, (7) \end{cases}$$

где нужно определить значение параметра и соответствующие нетривиальные решения X (x).

Определение 1. Те значения параметра λ, для которых задача (6) - (7) имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями, а соответствующие нетривиальные решения называются собственными функциями.

Теорема 1. Задача Штурма-Лиувилля (6) - (7) имеет счетное множество положительных собственных значений

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots.$$

Теорема 2. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны друг другу с весом p(x) на отрезке $[0, l]$ *т.е.*

$$\int_0^l p(x)X_n(x)x_m(x)dx = 0. \ (8)$$

Теорема 3. Если *f(x)* имеет на $[0, l]$ непрерывные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет граничным условиям *f (0) = f (l) = 0*, то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям задачи (6) - (7)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x),$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$f_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^l p(x)f(x)X_k(x)dx, \quad \|X_k\|^2 = \int_0^l p(x)X_k^2(x)dx.$$

Доказательство теорем 1 и 3 базируется обычно на сведении задачи Штурма-Лиувилля к эквивалентному интегральному уравнению, мы здесь не будем на нем останавливаться.

Доказательство теоремы 2. Пусть λ_nи λ_m различные собственные значения, $X_\Pi(x)$ и

$X_T(x)$ соответствующие собственные функции, так что

$$L(X_n) + \lambda_n p(x)X_n = 0, L(X_m) + \lambda_m p(x)X_m(x) = 0, (9)$$

где через L обозначен дифференциальный оператор

$$L - L(x) = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}\right) - q(x)X \ (10)$$

Путем простых преобразований получим, что

$$X_nL(X_m) - X_mL(X_n) = X_n(k(x)X'_m)' - X_m(k(x)X'_n)' =$$

$$= (k(x)(X_nX'_m - X_mX'_n))'.$$ Интегрируя

последнее равенство, с учетом граничных условий (7) найдем

$$\int_0^u (x_n(x)L(X_m) - X_mL(X_n)dx = (k(x)(X_nX'_m - X_mX'_n))|^l_o = 0, (11)$$

откуда с помощью (9) выводим соотношение

$$0 = \int_0^l (X_nL(X_m) - X_mL(X_n))dx = \int_0^l \left(X_n(-\lambda_m p(x)X_m) - X_m(-\lambda_n p(x)X_n)\right)dx$$

$$= (\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l p(x)X_n(x)X_m(x)dx,$$

которое равносильно (8), если $\lambda_n \neq \lambda_m$. Таким образом, доказательство теоремы 2 завершается.

Считая задачу Штурма-Лиувилля решенной, вернемся к равенству (5) и решим дифференциальное уравнение

$$T' + \lambda_k T = 0.$$

Очевидно, что $T_k(t) = A_k e^{-\lambda_k t}$. Теперь составляем ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} X_k(x) \quad (12)$$

и определим A_k так, чтобы выполнялось начальное условие (3), т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = \varphi(x),$$

откуда следует, что

$$A_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l p(x) f(x) X_k(x)\, dx, \quad \|X_k\|^2 = \int_0^l p(x)\, X_k^2(x)\, dx. \quad (13)$$

Итак, мы нашли, что решение задачи (1) - (3) дается формулами (13) - (14).

Ограничиваясь формальным построением решения, мы не рассматриваем обоснования и условий применимости метода ни в отношении начальных данных, ни в отношении коэффициентов уравнения (1).

Замечание 1. Как ясно из (11), теорема об ортогональности будет иметь место и для других задач Штурма-Лиувилля, если граничные условия (7) заменить на $X'(0) = 0$, $X'(l) = 0$ или, например, $X(0) = 0$, $X'(l) = 0$.

Более того, чуть позже мы будем рассматривать так называемый особый случай, когда коэффициент k(x) обращается в нуль в точках x=0 и x=l, и в этой ситуации результат подстановки в (11) равен нулю, и собственные функции образуют ортогональную с весом p(x) систему функций.

Замечание 2. Разумеется, что задача Штурма-Лиувилля для уравнения с переменными коэффициентами, которую мы рассмотрели, может возникнуть и при решении уравнений гиперболического или эллиптического типа. Если, например, в правой части (1) заменить $\frac{\partial u}{\partial t}$ на $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, то получим уравнение гиперболического типа с переменными коэффициентами.

Замечание 3. Для уравнения теплопроводности стержня

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

решение смешанных задач проводится примерно по таким же схемам, которые подробно изложены выше в применении к уравнению колебаний струны.

Пример 1. Решить смешанную задачу

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = xe^{t} + 2t, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), t > 0,$$

$$u(x,0) = x + 2sin2xcos3x,$$
$$u(0,t) = t^2, u_x(\pi/2, t) = 1.$$

Решение. Прежде всего перейдем к смешанной задаче с однородными граничными условиями, для чего сделаем замену

$$u(x,t) = t^2 + x + v(x,t).$$

Тогда для неизвестной функции v (x, t) получаем смешанную задачу

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = xe^{t}, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), t > 0, (14)$$
$$v(x,0) = sin5x - sinx, (15)$$
$$v(0,t) = /20, v_x\left(\frac{\pi}{2}; t\right) = 0. (16)$$

Найдем собственные функции $\hat{X}_k(x)$ дифференциального оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ с

граничными условиями $\hat{X}_k(0) = 0$ и $\hat{X}_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

$$-\hat{X}''_k(x) = \hat{\lambda}_k \hat{X}_k(x), (17)$$

$$\hat{X}_k(0) = \hat{X}'_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ (18)$$

Решение дифференциального уравнения (17), удовлетворяющее условию при x = 0, есть

$\hat{X}_k = sin\sqrt{\hat{\lambda}_k}x$. Условие на правом конце приводит к равенству

$$\sqrt{\hat{\lambda}_k}\frac{\pi}{2} = (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in N,$$

откуда

$$\hat{X}_k = \sin(2k-1)\,x, \hat{\lambda}_k = (2k-1)^2, k \in N.$$

Функцию v (x, t) будем искать в виде ряда

$$v(x,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{T_k}(t)\widehat{X_k}(x). (19)$$

Получим уравнения на неизвестные функции $\hat{T}_k(t)$, для чего разложим функцию x, входящую в уравнение (14), по системе $\{\sin(2k-1)\,x\}_{k=1}^{\infty}$:

$$C_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2k-1)\,xdx = \frac{4}{\pi(2k-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2k-1)\,xdx = \frac{4*(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^2}.$$

Далее, подставим ряды (19) и (20) в смешанную задачу (14), (15), (16):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{T'_k}(t)\widehat{X_k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^2\,\widehat{T_k}(t)\widehat{X_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^t c_k X_k(x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = X_3(x) - X_1(x).$$

Потребуем почленного выполнения написанных равенств: при k =

$$T'_1(t) + T'_1(t) = \frac{4}{\pi} e^t;$$

$$T'_1(0) = -1;$$

при k =3

$$T'_3(t) + 25T'_1(t) = \frac{4}{25\pi} e^t$$

$$T'_3(0) = 1;$$

При $k \neq 1; 3$

$$T'_k(t) = (2k-1)^2 T'_k(t) = \frac{4e^t}{\pi}(2k-1)_2 (-1)^{k+1},$$

$$T'_k(0) = 0.$$

Литература:

1. Зарубин А.Н. Гиперболические и параболические уравнения. Опорный конспект лекций с примерами, задачами и заданиями для самостоятельного решения. — Орел: ОГУ, 2009, 106 с.
2. Костецкая Г.С., Радченко Т.Н. Уравнения эллиптического типа. Ростов–на–Дону 2014,
92с
3. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск: Высшая школа, 1977. 239с.
4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 767с.
5. Алексеев А.Д., Кудряшов С.Н. Уравнения с частными производными в примерах и задачах (учебное пособие) Ростов-на-Дону, 2008. 99с