УДК 517.2

Шарипов К.С.

ЫГУ им. К. Тыныстанова

РЕГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Впервые поставлена, исследована краевая задача для регулярного возмущения посредствам зависимости решения от параметров и краевых условий.

В теории дифференциальных уравнений подробно исследован вопрос о зависимости решения y(t,μ)начальной задачи Коши

$$y'=f(f,t,\mu), \qquad (\mu \text{ - малый параметр}) \qquad (1)$$
$$y\,(t_{0,}\,\mu)=y_0 \qquad (2)$$

от входящий в уравнение параметра μ (см. [1]).

Кроме этого показано что при μ→0 решение y(t,μ) задачи Коши (1)-(2) стремится к решению y(t) задачи Коши вида

$$y'=f(t,\,y,\,o), \qquad (3)$$
$$y\,(t_0)=y_0 \qquad (4)$$

Ранее этим было выявлено одно свойство малого параметра [μ].

Теперь мы переходим к изучению других свойств параметра μ.

Краевые задачи для регулярного возмущения.

Следуя [2-3], поставим новую задачу: существует ли решение задачи Коши (1)-(2) удовлетворяющее условию

$$y\,(T,\mu)=y_1 \qquad (5)$$

где y_1 - заданное число.

В этом случае, следуя [2], имеем усовершенствованную задачу Коши для регулярного возмущения вида

$$y\,'=f(t,y,\mu) \qquad (6)$$

1) начальное условие

$$y(t_{0,}\mu)=y_0 \qquad (7)$$

2) плюс, заданное условие

$$y\,(T,\mu)=y_1 \qquad (8)$$

Значит, решение усовершенствованной задачи Коши (6)-(8) дает нам решение краевой задачи вида

$$y'\ f(t,y,\mu),\,t\in[t_0,T] \qquad (9)$$

граничные условия

$$y(t_{0,}\mu)=y_{0\,/}\,y(T,\mu)=y_1 \qquad (10)$$

Это и есть разобранный нами способ решения краевой задачи (9)-(10) для регулярного возмущения.

Тогда поставленная задача (5) сводится к решению следующей задачи: существует ли параметр μ такой, что решение y(t,μ) задачи Коши (6)-(7) удовлетворяет заданному условию (8).

Видно, что нами раскрыто другое свойство параметра μ .

Рассмотрим следующие задачи:

1) по параметру μ исследуем условие (8);

2)при μ→0 исследуем решение краевой задачи (9)-(10).

Сказанное сначала покажем на линейной краевой задаче вида

$$y'=p(ty+\mu q(t),\,t\in[t_{0,}T] \qquad (11)$$

граничные условия

$$y(t_{0,}\mu) = y_{0,}\, y(T,\mu) = y_1\,. \qquad (12)$$

Ее сведем к усовершенствованной задаче Коши

$$y' = p(t, y + \mu q(t), t \in \lfloor t_{0,} T \rfloor \qquad (13)$$

1) начальное условие

$$y\,(t_{0,}\mu) = y_0\,, \qquad (14)$$

2) плюс заданное условие

$$y(T,\mu) = y_1\,. \qquad (15)$$

Такая усовершенствованная задача Коши ранее нами исследована [2, 3]. Приведем вкратце схему построения решения усовершенствованной задачи Коши (13)-(14).

Задача Коши (13)-(14) имеет решение равное

$$y = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \mu \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} q(s)ds\,, \qquad t \in (t_0, T) \qquad (16)$$

Отсюда находим μ:

$$\mu = \frac{y_1 - y_0 e^{\int_{t_0}^{T} p(s)ds}}{\int_{t_0}^{T} e^{\int_{t_0}^{T} p(\tau)d\tau} q(s)ds} \left(\int_{t_0}^{T} e^{\int_{t_0}^{T} p(\tau)d\tau} q(s)ds \neq o \right), \qquad (17)$$

при котором выполняется условие (15).

В итоге задача о существовании μ решена.

Подставляя (17) в (16), имеем решение усовершенствованной задачи Коши (13)-(15) в виде

$$y = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \frac{y_0 - y_0 e^{\int_{t_0}^{T} p(s)ds}}{\int_{t_0}^{T} e^{\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau}} \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} q(s)ds, t \in \lfloor t_{0,} T \rfloor \qquad (18)$$

Таким образом, задача 1) решена. Теперь переходим к задаче 2)

Исследование решения (18) при μ→o.

Одним из основных моментов было использование параметра μ при решении краевой задачи (9)-(10).

Теперь при μ→o исследуем полученное решение (18).

В этом случае используем известную теорию регулярных возмущений.

Рассмотрим краевую задачу, которая получается из краевой задачи (11)-(12), если в ней формально положить μ=o:

$$y' = p(t)y, t \in \lfloor t_{0,} T \rfloor, \qquad (19)$$

граничные условия

$$y(t_0) = y_0\,, y(T) = y_1 \qquad (20)$$

Решение данной задачи исследована нами [2, 3].

Приведем краткую схему доказательства существования решения.

Функцию p(t) пишем в виде

$$p(t) = \beta f\,(t), t \in \lfloor t_{0,} T \rfloor, \qquad (21)$$

где β - произвольная постоянная (параметр), а f(t) - заданная непрерывная функция.

Краевую задачу (19)-(20) сведем к усовершенствованной задаче Коши вида

$$y\,' = p(t), t \in \lfloor t_{0,} T \rfloor, \qquad (22)$$

1) начальное условие

$$y(t_0) = y_0\,, \qquad (23)$$

2) плюс, заданное условие

$$y(T) = y_1 \tag{24}$$

Отсюда имеем, что

$$\mu = \frac{1}{\int_{t_0}^{T} f(s)ds} \ln\frac{y_1}{y_0} \,(p(t) \neq 0), \tag{25}$$

$$p(t) = \frac{1}{\int_{t_0}^{T} f(s)ds} \ln\frac{y_1}{y_0}\, f(t), t \in [t_{0,} T] \tag{26}$$

А решение усовершенствованной задачи Коши, равно

$$y = y_0 e^{\frac{\int_{t_0}^{t} f(s)ds}{\int_{T_0}^{T} f(s)ds} \ln\frac{y_1}{y_0}} = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}, t \in [t_{0,} T], \tag{27}$$

где $y_{0,} y_1$ -любые заданные числа.

Покажем существование предела от (18)

$$\lim_{\substack{\mu \to 0, \\ t \in [t_{0,} T]}} y(t, \mu) \tag{28}$$

Сначала выясним, когда μ→о. Для чего используем формулу (17)

$$\mu = \frac{y_1 - y_0 e^{\int_{t_0}^{T} p(s)ds}}{\int_{t_0}^{T} e^{\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} q(s)ds} \left(\int_{t_0}^{T} e^{\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} q(s)ds \neq 0 \right)$$

Видно, что при

$$y_1 \to y_0 e^{\int_{T_0}^{T} p(s)ds} \tag{29}$$

следует, что

$$\mu = \frac{y_1 - y_0 e^{\int_{t_0}^{T} p(s)ds}}{\int_{t_0}^{T} e^{\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} q(s)ds} \to 0 \tag{30}$$

Поэтому рассмотрим следующие два случая:

$$1) \int_{t_0}^{T} p(s)ds < 0; \tag{31}$$

$$2) \int_{t_0}^{T} p(s)ds > 0 \tag{32}$$

Вычислим предел (28) при выполнении неравенства (31), имеем

$$y(t) = y_0 e^{\int_{tt_0}^{t} p(s)ds}, t \in [t_{0,} T] \tag{33}$$

Данная функция удовлетворяет условию

$$y(t_0) = y_0 \tag{34}$$

Из (29) следует, что при μ→о находим y_1:

$$y_1 = y_0 e^{\int_{t_0}^{T} p(s)ds} \tag{35}$$

В этом случае будем говорить, что по заданному условию (23) условие (24) определяется только и только по формуле (35).

Итак, из вышесказанного следует, что решение задачи Коши (22)-(23) удовлетворяет специальному условию

$$y(T) = y_1 = y_0 e^{\int_{t_0}^{T} p(s)ds} \tag{36}$$

Отсюда следует, что решение (33) уравнения (19) удовлетворяет специальным граничным условиям

$$y(t_0) = y_0,\ y(T) = y_1 = y_0 e^{\int_{t_0}^{T} p(s)ds} \tag{37}$$

Теперь можем говорить, что функция (33) является решением специальной краевой задачи

$$y' = p(t),\ t \in [t_0, T], \tag{38}$$

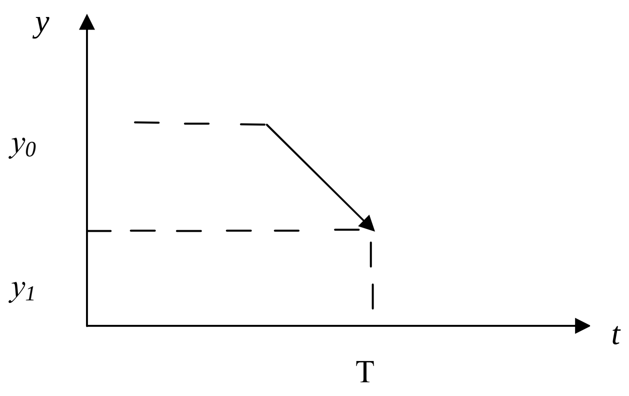
Граничные условия

$$y(t_0) = y_0,\ y(T) = y_1 = y_0 e^{\int_{t_0}^{T} p(s)ds} \tag{39}$$

Здесь

$$|y_1| \le |y_0| \tag{40}$$

Приведем график функции (33)



Итак решение задачи доказано.

Теорема 1. При μ→0 решение (18) краевой задачи (11)-(12) согласно (31) стремится к решению (33) специальной краевой задачи вида

$$y' = p(t)y,\ t \in [t_0, T], \tag{41}$$

граничные условия

$$y(t_0) = y_0,\ y(T) = y_1 = y_0 e^{\int_{t_0}^{T} p(s)ds} \tag{42}$$

Полученная специальная краевая задача (41)-(42) является частным случаем краевой задачи (19)-(20).

Теперь рассмотрим формулу (32). Тогда параметр (17) представим в виде

$$\mu = \frac{e^{-\int_{t_0} p(s)ds} \; y_1 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds} - y_0}{\int_{t_0}^{T} e^{\int_{s}^{T} p(s)ds} q(s)ds} \qquad (43)$$

Здесь согласно (32) $\int_{t_0}^{T} p(s)ds$ принимает сколь угодно большое значение.

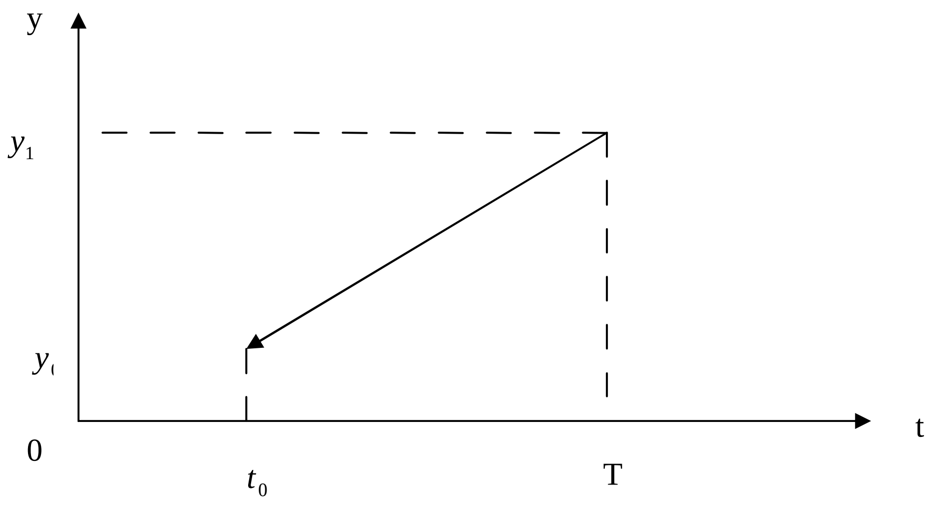
Видно, что μ будет стремиться к нулю при

$$y_0 \to y_1 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds} \qquad (44)$$

Значит граничные условия (12) связанны формулой (44)
Отсюда следует следующее неравенство

$$|y_0| \le |y_1| \qquad (45)$$

В этом случае график функции (33) имеет вид



В случае (32) функция (33) является решением краевой задачи

$$y'=p(t)y, \; t \in [t_{0,} T] \qquad (46)$$

граничные условия

$$y(t_0) = y_1 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds}, \; y(T) = y_1 \qquad (47)$$

Таким образом, при $\mu \to 0$ краевая задача (11)-(12) имеют ограниченные решения как решения краевых задач (38)-(39) и (46)-(47).

Продолжение этой статьи следует.

P.S. Такое исследование можно проводить и сингулярным возмущением

Литература

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б. Дифференциальные уравнения. –М., 1979.
2. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциального и интегрального уравнений //Вестник ИГУ, №12, 2004.
3. Шарипов С., Шарипов К.С. Усовершенствование производных Ньютона-Лейбница и их применения //Вестник ИГУ, №17, 2006.