УДК 512.1
DOI: 10.36979/1694-500X-2024-24-4-4-9

ЕЩЕ РАЗ ПРО РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, С.Н. Джапарова

Аннотация. Несколько лет назад мы написали работу под названием «Модная формула». При этом подразумевалось статистическое значение слова Мода – наиболее часто встречающееся значение. Мы предполагаем, что наиболее часто употребляемой формулой в школьном курсе математики является формула для разности квадратов. Со времени написания той работы прошло довольно много времени, за которое мы накопили материал для следующей статьи на эту тему. Значительная часть работы посвящена использованию метода, основанного на идеях великих математиков древности, в частности, Диофанта и аль-Хорезми. Этот метод, с помощью формулы для разности квадратов, позволяет с большим успехом решать все задачи, для решения которых обычно используются квадратные уравнения.

Ключевые слова: разность квадратов; квадратные уравнения; новый способ решения; иррациональные уравнения; Диофант; Аль Хорезми; текстовые задачи.

ДАГЫ БИР ЖОЛУ КВАДРАТТАРДЫН АЙЫРМАСЫ ЖӨНҮНДӨ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, С.Н. Джапарова

Аннотация. Бир нече жыл мурун биз Модалуу формула деген макала жазганбыз. Бул аталыш мода сөзүнүн эң көп кездешкен маанисин – статистикалык маанисин билдирет. Мектептин математика курсунда эң көп колдонулган формула бул квадраттардын айырмасынын формуласы деп ойлойбуз. Ал иш жазылгандан бери бир топ убакыт өттү. Бул убакытта биз аталган тема боюнча кийинки макала үчүн материал топтодук. Эмгектин олуттуу бөлүгү байыркы замандын улуу математиктери, атап айтканда Диофант жана аль-Хорезминин эмгектеринен келип чыккан ыкмага таянат. Бул ыкма квадраттардын айырмасынын формуласын колдонуу менен, адатта, квадраттык теңдемелер колдонулган бардык маселелерди чоң ийгилик менен чечүүгө мүмкүндүк берет.

Түйүндүү сөздөр: квадраттардын айырмасы; квадраттык теңдемелер; чыгаруунун жаңы ыкмасы; иррационалдык теңдемелер; Диофант; аль-Хорезми; тексттик маселелер.

ABOUT THE DIFFERENCE OF SQUARES AGAIN

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova, S.N. Japarova

Abstract. A few years ago, we wrote a paper called the Mode of formulas. This implied the statistical meaning of the word Mode – the most frequently occurring meaning. We assume that the most frequently used formula in a school mathematics course is the formula for difference of squares. Quite a lot of time has passed since that work was written, during which we have accumulated material for the next article on this topic. A significant part of the work is devoted to the use of a method based on the ideas of the great mathematicians of antiquity, in particular Diophantus and al Khwarizmi. This method, using the formula for the difference of squares, allows you to solve with great success all problems for which quadratic equations are usually used.

Keywords: difference of squares; quadratic equations; a new solution method; irrational equations; Diophantus; Al Khwarizmi; word problems.

В работе [1] были рассмотрены задачи, которые успешно решаются, если воспользоваться формулой разности квадратов. Данная работа по своей сути является ее продолжением. В ней исследуется ряд задач, которые решаются методами, отличными от обычных, используемых в современной школе. В основе этих методов лежит хорошо известная формула сокращенного умножения: $\boldsymbol{m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)}$. В ее справедливости очень легко убедиться: $\boldsymbol{(m + n)(m - n)} = m^2 - mn + nm - n^2 = \boldsymbol{m^2 - n^2}$.

Задача 1

Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 2x - 15} + \sqrt{x^2 - 2x - 8} = 7$.

Решение

Обычно для решения таких уравнений возводят в квадрат обе стороны уравнения:

$$x^2 - 2x - 15 + 2\sqrt{x^2 - 2x - 15} \cdot \sqrt{x^2 - 2x - 8} + x^2 - 2x - 8 = 49,$$

затем оставляют корень с одной стороны:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 15} \cdot \sqrt{x^2 - 2x - 8} = 13 - x^2 - 2x,$$

и возводят в квадрат еще раз:

$$\left(x^2 - 2x - 15\right)\left(x^2 - 2x - 8\right) = \left(13 - x^2 - 2x\right)^2.$$

После этого можно ввести новую переменную $y = x^2 - 2x$ и решить полученные квадратные уравнения. При этом нужно не забыть провести проверку – могут быть посторонние корни.

Рассмотрим другой способ решения. Для этого введем обозначения:

$$a = \sqrt{x^2 - 2x - 15}; \;\; b = \sqrt{x^2 - 2x - 8}.$$

Тогда, $\begin{cases} a + b = 7, \\ a^2 - b^2 = -7. \end{cases}$ Поэтому, так как $a^2 - b^2 = \left(a + b\right)\left(a - b\right)$, систему можно переписать в виде: $\begin{cases} a + b = 7, \\ a - b = -1. \end{cases}$

Отсюда, $a = 3;\;\; b = 4$. Таким образом,

$$a = \sqrt{x^2 - 2x - 15} = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 3^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow x_1 = 6;\; x_2 = -4.$$

Примерно также выглядит и следующее уравнение.

Задача 2

1. *Решить уравнение* $(2x^2 + x + 1)(9 - x - 2x^2) = 23$ *и найти сумму модулей всех корней.*

Решение

Если обозначить первую скобку через a, а вторую через b, то получится система уравнений: $\begin{cases} ab = 23; \\ a + b = 10. \end{cases}$ Теперь, использовав 2-ое уравнение системы, положим $a = 5 + z$, $b = 5 - z$ и, из 1-го уравнения получим: $25 - z^2 = 23 \Rightarrow z^2 = 2$. Следовательно, имеют место два квадратных уравнения:

$$2x^2 + x + 1 = 5 - \sqrt{2} \;\text{ и }\; 2x^2 + x + 1 = 5 + \sqrt{2}.$$

Решим первое из них: $2x^2 + x - (4 - \sqrt{2}) = 0$.

Дискриминант этого уравнения: $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-(4 - \sqrt{2})) = 33 - 8\sqrt{2}$.

Преобразуем его: $33 - 8\sqrt{2} = 32 - 8\sqrt{2} + 1 = (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 1 + 1^2 = (4\sqrt{2} - 1)^2$.

Поэтому, по формуле корней квадратного уравнения: $x = \dfrac{-1 \pm (4\sqrt{2} - 1)}{2 \cdot 2}$.

Таким образом, уравнение $2x^2 + x - (4 - \sqrt{2}) = 0$ имеет корни $\sqrt{2} - 0,5$ и $-\sqrt{2}$.

Повторив рассуждения, несложно увидеть, что уравнение $2x^2 + x + 1 = 5 + \sqrt{2}$ имеет корни $-\sqrt{2} - 0,5$ и $\sqrt{2}$. ***Ответ:*** $4\sqrt{2}$.

Отметим, что метод решения системы, использованный в пункте 2?, основан на работах Диофанта и аль-Хорезми [2, 3, 7] и формулируется следующим образом:

Для того чтобы решить систему

$$\begin{cases} px + qy = r; \\ x \cdot y = s; \end{cases} \qquad (*)$$

относительно неизвестных *x* и *y*, нужно:

- воспользоваться подстановкой Диофанта-Аль Хорезми и записать: $px = r/2 - z$; $qy = r/2 + z$;
- из уравнения $xy = s$ получить, что $px \cdot qy = (r/2 - z)(r/2 + z) = p \cdot q \cdot s$;
- из формулы разности квадратов получить, а затем решить уравнение $(r/2)^2 - z^2 = p \cdot q \cdot s$ относительно неизвестной *z*;
- использовать найденные значения *z* для определения *x* и *y*.

Продемонстрируем эффективность этого АЛГОРИТМа – используем такую форму записи для его обозначения в дальнейшем при решении нескольких последующих задач.

Задача 3

Решить уравнение $\left(x^2 + 7x + 12\right)\left(x^2 - 3x + 2\right) = 24$.

Решение

Можно раскрыть скобки, но в результате получится уравнение четвертой степени, которое можно решить, но процесс решения будет довольно трудоемким. В то же время, если разложить квадратные трехчлены на множители: $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$; $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, и затем поменять местами сомножители: $(x + 3)(x + 4)(x - 1)(x - 2) = [(x + 3)(x - 1)]\ [(x + 4)(x - 2)]$, то исходное уравнение запишется в виде: $\left(x^2 + 2x - 3\right)\left(x^2 + 2x - 8\right) = 24$. Введем обозначения:

$a = \left(x^2 + 2x - 3\right)$; $b = \left(x^2 + 2x - 8\right)$.

Тогда, $\begin{cases} a - b = 5, \\ ab = 72. \end{cases}$ Чтобы решить эту систему, введем обозначения: $a = \dfrac{5}{2} - z$; $-b = \dfrac{5}{2} + z$. Отсюда, $ab = \left(\dfrac{5}{2} - z\right)\left(-\dfrac{5}{2} - z\right) = z^2 - \dfrac{25}{4} = 24 \Rightarrow z^2 = 30,25 \Rightarrow z = \pm 5,5$. Отсюда, $a = -3$ или $a = 8$.

Первое значение приводит к квадратному уравнению: $x^2 + 2x - 3 = -3 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$. Оно имеет корни -2 и 0.

Во втором случае получается уравнение: $x^2 + 2x - 3 = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 11 = 0$. Его корни: $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1+11} = -1 \pm 2\sqrt{3}$.

Задача 4 [4]

Сумма катетов равна 17, гипотенуза 13. Чему равны катеты?

Решение

Воспользуемся теоремой Пифагора и запишем задачу на математическом языке в виде:

$$\begin{cases} a + b = 17, \\ a^2 + b^2 = 13^2. \end{cases}$$

Здесь *a* и *b* – катеты прямоугольного треугольника.

Так как $17^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 13^2 + 2ab$, *то* исходная система равносильна системе: $\begin{cases} ab = 60, \\ a + b = 17. \end{cases}$ Обозначим $a = 17/2 + z$; $b = 17/2 - z$. Тогда $(8,5 + z)(8,5 - z) = 60$. Отсюда,

$72,25 - z^2 = 60 \Rightarrow z^2 = 12,25 \Rightarrow z = 3,5$.

Таким образом, $a = 8,5 + 3,5 = 12$; $b = 8,5 - 3,5 = 5$.

Задача 5 [5]

Решить уравнение $x^2 - 2 = \sqrt{4x + 5}$.

Решение

Возведем уравнение в квадрат, отметив при этом, что могут появиться посторонние корни:

$x^4 - 4x^2 + 4 = 4x + 5 \Rightarrow x^4 - 4x^2 - 4x - 1 = 0$.

Перепишем уравнение в виде разности двух квадратов: $(x^2)^2 - (2x + 1)^2 = 0$.

Отсюда, $[x^2 - (2x + 1)][x^2 + (2x + 1)] = 0 \Rightarrow [x^2 - 2x - 1][x^2 + 2x + 1] = 0$.

Корни 1-го уравнения: $x_1 = 1 - \sqrt{2}$; $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Корни 2-го уравнения: $x_3 = x_4 = -1$.

Осталось вспомнить, что в процессе решения уравнения в результате возведения в квадрат могли появиться посторонние корни. Поэтому нужно проверить, удовлетворяют ли полученные корни исходное уравнение. В итоге получается, что все корни, кроме $1 + \sqrt{2}$, являются посторонними.

Ответ $1 + \sqrt{2}$.

Задача 6

Решить систему уравнений: $\begin{cases} \log_4(x^2 y) = 3,5; \\ \log_4 x \cdot \log_4 y^5 = 3,75. \end{cases}$

Решение

Свойства логарифма позволяют переписать систему в виде:

$$\begin{cases} \log_4(x^2 y) = 3,5; \\ \log_4 x \cdot \log_4 y^5 = 3,75, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_4 x^2 + \log_4 y = 3,5; \\ 5\log_4 x \cdot \log_4 y = 3,75, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\log_4 x + \log_4 y = 3,5; \\ \log_4 x \cdot \log_4 y = 0,75. \end{cases}$$

Отсюда, если $2\log_4 x = 3,5 / 2 - z$; $\log_4 y = 3,5 / 2 + z$,

то $(2\log_4 x)(\log_4 y) = \left(\frac{3,5}{2} - z\right)\left(\frac{3,5}{2} + z\right)$.

Следовательно, $3,0625 - z^2 = 2 \cdot 0,75 \Rightarrow z^2 = 1,5625$.

Поэтому, $2\log_4 x = 1,75 - z = 1,75 - 1,25 = 0,5; \quad \log_4 y = 1,75 + z = 1,75 + 1,25 = 3$ или $2\log_4 x = 3; \quad \log_4 y = 0,5$. Таким образом, $\begin{cases} \log_4 x = 0,25, \\ \log_4 y = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4^{0,25}, \\ y = 4^3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = 64, \end{cases}$ или

$$\begin{cases} 2\log_4 x = 3, \\ \log_4 y = 0,5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4^{1,5}, \\ y = 4^{0,5}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 2. \end{cases}$$

Мы начали эту работу с иррациональных выражений, ими и завершим [6].

Задача 7

Упростить числовое выражение: $\dfrac{1}{\sqrt{11 - 4\sqrt{6}}} - \sqrt{0,32}$.

Решение

Дробь упростится, если удастся записать подкоренное выражение $11 - 4\sqrt{6}$ в виде полного квадрата – в виде $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. Приравняв соответствующие выражения, получим:

$$\begin{cases} 2ab = 4\sqrt{6}, \\ a^2 + b^2 = 11, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2b^2 = 24, \\ a^2 + b^2 = 11. \end{cases}$$

То есть имеем систему вида (*) и, поэтому, можно использовать АЛГОРИТМ. Обозначим $a^2 = 11/2 + z;\ b^2 = 11/2 - z$. Тогда $(5,5 + z)(5,5 - z) = 24$. Отсюда, $30,25 - z^2 = 24 \Rightarrow z^2 = (2,5)^2$. Таким образом, $a^2 = 5,5 + 2,5 = 8 = 2 \cdot 2^2$; $b^2 = 5,5 - 2,5 = 3$.

Следовательно, $11 - 4\sqrt{6} = \left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2$ и $\dfrac{1}{\sqrt{11 - 4\sqrt{6}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}$. (Важно не забыть о том, что значение корня неотрицательно.) Осталось домножить на сопряженное к знаменателю: $\dfrac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)} = \dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{8 - 3} = \dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5}$.

Теперь выполним вычитание и получим ответ:

$$\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5} - \sqrt{0,32} = \left(0,4\sqrt{2} + 0,2\sqrt{3}\right) - 0,4\sqrt{2} = 0,2\sqrt{3}.$$

Заключение

В работе рассмотрены задачи, ключевым элементом в процессе решения которых является формула разности квадратов. В частности, рассматривается отличный от традиционного школьного метод решения иррациональных уравнений. Возможно, консервативно настроенные коллеги заявят, что все эти задачи можно решить путем сведения к квадратным уравнениям. В этом они будут правы. Но, при этом, во-первых, с не меньшим успехом процесс решения любого квадратного уравнения через теорему Виета можно свести к решению системы (*) [1–3]. Во-вторых, как утверждают многие великие математики, чем больше методов решения задачи знает исследователь, тем лучше. Можно продолжить перечислять аргументы в пользу АЛГОРИТМа, но лучше всего этому делу должен послужить материал данной работы.

Поступила: 28.02.24; рецензирована: 13.03.24; принята: 15.03.24.

Литература

1. *Кыдыралиев С.К.* Модная формула / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Вестник КРСУ. Бишкек, 2020. Т. 20. № 4. С. 3–9.
2. Новый метод решения квадратных уравнений. URL: https://youtu.be/ZBalWWHYFQc (дата обращения: 3.03.2024).
3. *Кыдыралиев С.К.* Живая математика. 7 класс / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова. Бишкек: Солюшин, 2017. 336 с.
4. *Говоров В.М.* Сборник конкурсных задач по математике / В.М. Говоров, П.Т. Дыбов, Н.В. Мирошин, С.Ф. Смирнова. М.: Оникс 21 век, 2015. 480 с.
5. *Бабинская И.Л.* Задачи математических олимпиад / И.Л. Бабинская. М.: Наука, 1975. 112 с.
6. Типичная задачка на подумать из ЕГЭ. URL: https://dzen.ru/video/watch/64625247906ad4171159f7c1?from_site=mail (дата обращения: 3.03.2024).
7. *O'Connor J.J.* Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi / J.J. O'Connor and E.F. Robertson. URL: http://www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Al-Khwarizmi.html (дата обращения: 27.05.2023).