Р.К.КАРАБАКИРОВ, К.Р.КАРАБАКИРОВ

ЫКТЫМАЛДЫКТАР ТЕОРИЯСЫ ЖАНА МАТЕМАТИКАЛЫК СТАТИСТИКА

Кыргыз республикасынын билим берүү
министерлиги тарабынан техникалык жогорку окуу жайларынын
студенттери үчүн окуу китеби катарында бекитилген.

БИШКЕК 2009

УДК 519.2
ББК 22.17
К 21

Рецензенттер:
Ф.-м.и.д., проф. Рафатов Р., ф.-м.и.д., проф. Саламатов Ж.С.

Карабакиров Р.К, Карабакиров К.Р.
К21 Ыктымалдыктар теориясы жана математикалык статистика: Жогорку техникалык окуу жайлардын студенттерине арналган окуу китеби, - Б.:2009. — 260 б.
ISBN 978-9967-432-27-7

Китепте ыктымалдыктар теориясынын жана математикалык статистиканын бардык негизги бөлүктөрү, жогорку техникалык окуу жайларынын окуу программасына ылайык берилди. Китепте теориялык материалдарды бышыктоо максатында мисалдар жана маселелер чыгаруулары менен көрсөтүлдү. Андан башка жетишерлик сандагы мисал, маселелер жооптору менен берилди. Китепти практикалык сабактарды өткөрүү үчүн да колдонсо болот. Китепте студенттердин билимдерин текшерүүгө арналган текшерүү иштердин тапшырмалары да келтирилди.

К 1602090000-09 УДК 519.2
ББК 22.17

ISBN 978-9967-432-27-7

Кириш сөз

Фрунзедеги политехникалык институтта, Кыргыз курулуш,транспорт жана архитехтура университетинде жана Кыргыз-Россия Славян университетинде ыктымалдыктар теориясы жана математикалык статистиканы көп жылдардан бери окутуунун материалдарынын негизинде бул китеп даярдалды.

Китеп жогорку инженердик-техникалык окуу жайлардын окуу программасына ылайыкталып жазылды. Материалдарды жайгаштырууда жөнөкөйдөн татаалга өтүү ыкмасы колдонулду. Алдын ала кокус окуялар жана аларды үйрөнүүдө пайдаланылуучу материалдар берилди. Андан кийин, кокус окуялардын негизинде аныкталуучу кокус чоңдуктар, бөлүштүрүү закондору менен толук жазылды. Китептин акыркы главалары математикалык статистикага арналды.

Математикалык түшүнүктөрдү бышыктоо максатында тиешелүү мисалдар келтирилди.Алардын арасында кыргыз элинин балдар оюнунан алынган мисалдар да бар. Бул болсо теориялык материалдарды бышыктоонун жеткилең болушуна жасалган аракет болду. Ар бир главанын аягында жетиштүү сандагы мисалдар жана маселелер жооптору менен берилди. Кээ бир мисалдар менен маселелерди чыгарууда керек болуучу функциялардын маанилеринин таблицалары тиркеме түрүндө келтирилди.

Ыктымалдыктар теориясы жана математикалык статистика боюнча текшерүү ишин (тест) өткөрүүгө 15 варианттан турган маселелер сунуш кылынды. Ар бир вариантка ондон эсеп киргизилди. Ар бир маселеге бештен же төрттөн жоол жазылды. Ал жооптордун бирөө гана туура. Туура жооптор таблица түрүндө тапшырмалардын аягында берилди. Варианттардагы маселелерди экиге бөлүп, текшерүү ишти кокус окуялар теориясы боюнча (1-5 маселелер) жана кокус чоңдуктар менен математикалык статистиканын элементтери боюнча (6-10 маселелер) өз алдынча жүргүзсө да болот. Студенттердин калдык билимин текшерүү үчүн ар бир варианттагы 10 маселенин ичинен төрт-бештен маселени тандап алуу сунуш кылынат. Мисал катары биз сунуш кылган маселелер варианттары боюнча тестин аягында берилди.

Китепте параграфтар, аныктамалар, теоремалар, мисалдар, натыйжалар жана эскертүүлөр ар бир главага тиешелүү түрдө өз алдынча номерленди. Ал эми чиймелер менен шилтемеге керектүү формулалардын номерлери китеп боюнча жалпы белгиленди.

Китепти жазууда пайдалуу кеңешин бергендиги үчүн профессор Ж.С. Саламатовго ыразычылыгыбызды билдиребиз. Ошондой эле, китепти басып чыгарууга колдоо көрсөткөндүгү үчүн, университеттин илим жана мамлекеттик тил боюнча проректору, профессор Р.К. Картаңбаевге, айрыкча университеттин ректору, техникалык илимдердин доктору, профессор А.А. Абдыкалыковго терең ыразычылык билдиребиз.

Китеп жөнүндө өз пикирлерин билдирген окурмандарга ырахмат айтуу менен, туура билдирген сунуштарды китептин кийинки чыгарылышына пайдаланар элек.

Авторлор.

Б и р и н ч и   г л а в а

ЫКТЫМАЛДЫКТАР ТЕОРИЯСЫНЫН НЕГИЗГИ ТҮШҮНҮКТӨРҮ

§I. Окуялардын түрлөрү

Бизге байкалуучу окуяларды үч түргө: шексиз, болбос (мүмкүн эмес) жана кокустан болуучу (кокус) окуяларга бөлүүгө болот.

I-аныктама. Кандайдыр бир шарттардын көптүгү (S) аткалырганда сөзсүз боло турган окуя шексиз (шексиз болуучу) окуя деп аталат.

Мисалы, эгерде идиште нормалдуу атмосфералык басымда жана температурада суу сакталса, анда «идиштеги суу суюк түрдө болот» деген ырастоо шексиз окуя болот. Мында, берилген атмосфера басымы жана температура - S шарттарынын көптүгүн түзөт.

2-аныктама. S шарттарынын көптүгү аткарылганда сөзсүз болбой тургун окуя болбос (мүмкүн эмес) окуя деп аталат.

Жогорку мисалдын учурунда «идиштеги суу муз түрүндө болот» деген ырастоо мүмкүн эмес (болбос) окуя.

3-аныктама. S шарттарынын көптүгү аткарылган учурда боло турган же болбой турган окуя кокус (кокустан болуучу) окуя деп аталат.

Мисалы, чүкөнү өкчөгөндө «чүкө алчы конот» деген ырастоо - кокустан болуучу окуя. Себеби, өкчөлгөн чүкө алчы конушу да, конбошу да мүмкүн.

Ар бир кокус окуя, мисалы, өкчөлгөн чүкөнүн алчы конушу көптөгөн себептердин (өкчөөдө жумшалган күч, чүкөнүн формасы, канчалык бийиктиктен өкчөлгөндүгү ж.б) таасиринин натыйжасы болот. Бул себептердин ар биринин жыйынтыкка тийгизген таасирлерин эсепке алуу мүмкүн эмес, анткени алар эң көп жана алардын таасир этүү закондору белгисиз. Ошондуктан, ыктымалдыктар теориясы жекече окуялардын аткарылышы тууралуу маселени койбойт, анын муну чечүүгө күчү да келбейт. Эгерде бирдей эле S шарттары аткарылган учурда кокус окуяны көп жолу байкоого мүмкүн болсо,анда кеп башка. Жетиштүү көп сандагы бир өңчөй кокус окуялар, алардын жекече табиятына карабай, белгилүү бир закон ченемдүүлүккө ээ болушат экен. Ыктымалдыктар теориясында ошол закон ченемдүүлүктөр аныкталат.

Ошентип, ыктымалдыктар теориясы бир өңчөй көптөгөн кокус окуялардын ыктымалдык закон ченемдүүлүктөрүн үйрөнүүчү илим.

Көп кокус окуялар баш ийген закон ченемдүүлүктөрдү билүү, ал окуялардын кандай тартипте өтөрүн билүүгө мүмкүндүк берет. Мисалы, тыйынды бир жолу чимирип таштаганда (мындан ары жөн эле таштаганда) үстүнө герб жагы менен түшөрүн алдын ала айтууга болбойт. Ал эми, эгерде тыйын көп санда, бирдей эле шартта ташталса, анда канча жолу «герб» түшөрүн, анча-мынча ката кетирүү менен, алдын ала айтып берүүгө болот.

Ыктымалдыктар теориясы табият таануу жана техникалык илимдердин ар түрдүү тармактарында колдонулат.

Жогоруда биз кокус окуя деп, S шарттардын көптүгү аткарылганда боло турган же болбой турган окуяны айтканбыз. Мындан ары «шарттардын көптүгү аткарылганда» дештин ордуна кыскача эле «сыноо жүргүзүлгөндө» деп айтабыз. Анда, окуя сыноонун жыйынтыгы катары каралат.

<u>I-мисал.</u> Мергенчи бута атты. Атуу — бул сыноо. Октун бутага тийиши же тийбеши — окуя.

<u>2-мисал.</u> Кутуда кызыл жана көк түскө боелгон чүкөлөр бар. Болжобой эле бир чүкө алынды. Чүкө алуу — сыноо, алынган чүкө белгилүү бир түстө (кызыл же көк) болушу — окуя.

Кокус окуялар биригүүчү жана бирикбөөчү болуп, эки түргө бөлүнөт.

<u>4-аныктама.</u> Эгер бир эле сыноодо бир окуя аткарылганда калган окуялар аткарылбаса (аткарылса) анда алар бирикпөөчү (биригүүчү) окуялар деп аталат.

Жогоруда келтирилген мисалдарда «ок бутага тийди» жана «ок бутага тийген жок» деген, ошондой эле «алынган чүкө кызыл түстө» жана «алынган чүкө көк түстө» деген окуялар бирикпөөчү окуялар болот. Себеби, алардын бири аткарылса, экинчиси аткарылбайт. Ал эми «алынган чүкө кызыл түстө» жана «алынган чүкө түстүү» деген окуялар биригүүчү окуялар болору түшүнүктүү.

<u>5-аныктама.</u> Сыноонун натыйжасында аткарылышы мүмкүн болгон бардык окуялардын тобу, окуялардын толук группасы деп аталат.

3-мисал. Акча-буюм лотереясынын эки билети алынган. Тираж ойнолгондо «биринчи билет утту, экинчиси уткан жок», «биринчиси уткан жок, экинчиси утту», «экөө тең утту» жана «экөө тең уткан жок» деген гана окуялардын бири болушу мүмкүн. Ошондуктан, бул окуялар толук группа түзгөн окуялар болушат.

Толук группа түзгөн окуялардын жок дегенде биринин аткарылышы шексиз окуя болот, б.а. алардын жок дегенде бири сөзсүз аткарылат. Эгерде толук группа түзүүчү окуялар эки экиден бирикпөөчү окуялар болсо, сыноонун жыйынтыгында алардын бири гана аткарылат.

6-аныктама. Толук группа түзгөн эки окуя карама-каршы окуя деп аталат.

I-мисалдагы «ок бутага тийди» жана «ок бутага тийген жок» деген окуялар карама-каршы окуялар болот. Карама-каршы окуялардын бири A аркылуу белгиленсе, экинчиси $\overline{A}$ аркылуу белгиленет.

7-аныктама. Окуялардын эч биринин аткарылуу мүмкүнчүлүгү, башкаларынын аткарылуу мүмкүнчүлүктөрүнөн ашык же кем болбосо, ал окуялар бирдей мүмкүнчүлүктөгү окуялар деп аталат.

4-мисал. Тыйынды таштаганда «герб түштү» жана «цифра түштү» деген окуялар, бирдей мүмкүнчүлүктүү, карама-каршы окуялар болушат. Мында, тыйындын бетиндеги жазуулар анын кайсыл жагы менен түшөрүнө таасир этпейт деп эсептелет.

5-мисал. Кумар ойноочу сөөк (куб түрүндө) ташталганда, тигил же бул сандагы упайдын түшүшү-бирдей мүмкүнчүлүктөгү окуялар болушат. Сөөк бир тектүү материалдан жасалган жана анын бетиндеги жазуулар сөөк кайсыл бети менен түшөөрүнө таасир этпейт деп эсептесек болот.

§2 Ыктымалдыктын классикалык аныктамасы

Ыктымалдыктар теориясынын негизги түшүнүктөрүнүн бири — ыктымалдык. Анын бир нече аныктамасы бар. Алдын ала, анын классикалык деп аталган аныктамасын беребиз. Анан, анын жетишпеген жактарын көрсөтөбүз да, алардан кутулууга мүмкүн болгон башка аныктамаларды келтиребиз.

Аныктама түшүнүктү болуш үчүн мисал келтирели. Кутуда 6 аябай аралаштырылган чүкөлөр бар. Алардын бири ак (боелбогон), 2 кызыл түскө белгон (оң жана сол), 3 көк түскө боелгон (оң, сол жана сака) чүкөлөр болсун. Болжобой (көрбөй) туруп алынган бир чүкөнүн түстүү (б.а. кызыл же көк) чүкө болуп калуу мүмкүнчүлүгү, түзсүз чүкө болуп калуу мүмкүнчүлүгүнө караганда чоң болору түшүнүктүү. «Алынган чүкө түстүү» деген окуяны A аркылуу белгилеп, анын аткарылуу мүмкүнчүлүгүн аныктайлы. Сыноонун жыйынтыгында төмөндөгүдөй 6 натыйжа (жөнөкөй окуя) болушу мүмкүн: A_1 — алынган чүкө ак; A_2,A_3 — алынган чүкө кызыл; A_4, A_5, A_6 — алынган чүкө көк. Бул окуялар эки экиден биригишпейт (сөзсүз бири гана аткарылат), бирдей мүмкүнчүлүктүү (аябай аралаштырган, саканын көлөмү чүкөлөрдүкүндөй эле) жана толук группа түзөт (бири сөзсүз аткарылат).

<u>8-аныктама.</u> Окуянын аткарылышы мүмкүн болгон натыйжалар-ал окуяга оңтойлуу натыйжалар деп аталат.

A окуясына беш — A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 натыйжалары оңтойлуу, б.а. A_2, же A_3, же A_4 же A_5, же A_6 натыйжалары аткарылса, A окуясы (алынган чүкө түстүү) аткарылат. Ушул мааниде А окуясы бир нече жөнөкөй окуяларга (A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) ажырайт. Жөнөкөй окуялар башка окуяларга ажырабайт. Окуя менен жөнөкөй окуянын айырмасы ушунда.

<u>9-аныктама.</u> Окуяга оңтойлуу натыйжалардын санынын (m) жалпы натыйжалардын санына (n) болгон катышы ал окуянын ыктымалдыгы деп аталат.

A окуясынын ыктымалдыгы $P(A)$ менен белгиленет. Аныктама боюнча

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad \text{(I)}$$

Биз карап жаткан мисалда m=5, n=6, демек $P(A)$=5/6.

(I) формуласында m, n аркылуу белгиленген жөнөкөй натыжалар бирдей мүмкүнчүлүктүү, бирикпөөчү жана толук группа түзгөн натыйжалар деп эсептелет. Ыктымалдыктын аныктамасынан анын төмөнкү касиеттери келип чыгат.

<u>I-касиет.</u> Шексиз окуянын ыктымалдыгы бирге барабар.

Чындыгында эле, окуя шексиз болсо, ага бардык жөнөкөй натыйжалар оңтойлуу болот. Анда, m=n.

Демек , $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$.

<u>2-касиет.</u> Болбос окуянын ыктымалдыгы нөлгө барабар.

Чындыгында эле, окуя болбос (мүмкүн эмес) болсо, ага бардык жөнөкөй натыйжалар оңтойсуз (оңтойлуу эмес) болот. Анда $m=0$, ошондуктан $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$.

<u>3-касиет.</u> Кокус окуянын ыктымалдыгы нөл менен бирдин ортосунда жаткан оң сан .

Чындыгында эле, кокус окуяга бардык жөнөкөй натыйжалардын кандайдыр бир бөлүгү гана оңтойлуу болот. Демек, $0<m<n$ же $0<\frac{m}{n}<1$ $б.а.$ $0<P(A)<1$.

Ошентип, ар кандай окуянын ыктымалдыгы $0\le P(A)\le 1$ кош барабарсыздыгын канааттандырат.

§3 Комбинаториканын негизги формулалары

Ыктымалдыкты эсептөөдө комбинаториканын формулаларын пайдаланууга туура келет. Алардын кээ бир көп кездеше тургандарына түшүнүк беребиз.

<u>10-аныктама.</u> Бардык учурда бирдей эле ар түрдүү элементтерден турган, бири биринен элементтердин орундары менен гана айырмаланган комбинациялар орун алмаштыруу деп аталат.

Бардык мүмкүн болгон орун алмаштуулардын саны $P_n=n!$ болот, мында $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n;$ $0!$ бирге барабар деп $(0!=1)$ кабыл алынган.

<u>6-мисал.</u> Эгерде ар бир цифра бир эле жолу катыша алса 1,2,3 цифраларынан канча үч орундуу сан түзүүгө болот?

<u>Чыгаруу.</u> Изделип жаткан үч орундуу сандардын саны $P_3=1\cdot 2\cdot 3=6$ болот.

<u>11-аныктама</u>. Ар түрдүү n элементтеринен алынган m элементтен турган жана элементтеринин составы менен же жайгашкан орундары менен айырмаланган комбинация орундаштыруу деп аталат.

Орундаштыруунун жалпы саны $A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]$ болот.

7-мисал. 6 ар түрдүү түстөгү желекчелерден экиден алып канча комбинация түзүүгө болот?

Чыгаруу. Изделген комбинациялардын саны $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$

12-аныктама. Ар түрдүү n элементеринен m ден алынып, жок дегенде бир элементи менен айырмаланган комбинация топтоштуруу деп аталат.

Топтоштуурунун саны $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

8-мисал. 10 тетиги бар ящиктен 2 тетикти канча түрдүү жол менен алууга болот?

Чыгаруу. Изделип жаткан комбинациялардын саны $C_{10}^2 = 10!/(8!\cdot 2!) = 45$

Жогоруда айтылган комбинациялардын сандары $A_n^m = C_n^m P_m$ формуласы менен байланышканын белгилей кетели. Комбинаториканын маселеринин чыгарууда төмөнкү эрежелер колдонулат.

Сумманын эрежеси. Эгерде кандайдыр бир A нерсе жалпы нерселердин тобунан m түрдүү жол менен тандалып алынса, ал эми B нерсеси n түрдүү жол менен тандалып алынса, анда A же B ны $m+n$ ар кандай жол менен тандап алууга болот.

Көбөйтүүнүн эрежеси. Эгерде кандайдыр бир A нерсеси жалпы нерселердин тобунан m түрдүү жол менен тандалып алынса, жана B нерсеси n түрдүү жол менен тандалып алынса, анда A жана B нерселери (AB) $m \cdot n$ түрдүү жол менен тандалып алынат.

§4 Ыктымалдыктырды түздөн түз чыгаруу мисалдары.

9-мисал. Абонент телефон чалган жатып, номердин бир цифрасын унутуп калгандыктан, аны болжоп эле алды. Керектүү цифра алынгандыгынын ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. A аркылуу «керектүү цифра алынды» деген окуяны белгилебиз. Абонент бардык болгон 10 цифранын бирин алган болот. Ошондуктан, бардык жөнөкөй натыйжалардын саны 10. Бул натыйжалардын баары биригишпейт, бирдей мүмкүнчүлүктүү жана толук группаны түзөт. A окуясына бир гана натыйжа оңтойлуу (керектүү цифра бирөө гана). Изделип жаткан ыктымалдык окуяга оңтойлуу натыйжалардын санынын, бардык жөнөкөй натыйжалардын санына болгон катышына барабар $P(A)=\frac{1}{10}$

<u>10 мисал.</u> Кумар ойнолчу эки сөөк ташталган. Түшкөн упайлардын суммасы 4 кө барабар деген окуянын (A окуясы) ыктымалдыгын тапкыла. Маселе төмөндөгүдөй чыгарылган. Кетирилген катаны тапкыла.

<u>Чыгаруу.</u> Сыноонун эки гана натыйжасы болот: түшкөн упайлардын суммасы 4 кө барабар жана түшкөн упайлардын суммасы 4 кө барабар эмес. А окуясына эки натыйжанын бири гана оңтойлуу. Демек, изделип жаткан ыктымалдык $P(A)=\frac{1}{2}$.

Бул маселени чыгарууда кетирилген ката - алынган натыйжалар бирдей мүмкүнчүлүктө эмес болгондугунда жатат.

Туура чыгарылышы төмөндөгүдөй болушу керек. Бирдей мүмкүнчүлүктүү жөнөкөй натыйжалардын саны $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ (бир сөөктөгү ар бир түшкөн упай экинчи сөөктөгү ар бир түшкөн упай менен топтолуш керек). Бул натыйжалардын үчөө гана (1;3), (3;1), (2;2) A окуясына оңтойлуу (кашанын ичинде түшкөн упайлардын саны көрсөтүлгөн). Демек, изделип жаткан ыктымалдык $P(A)$ =3/36 =1/12.

<u>11-мисал.</u> Ящиктеги 10 тетиктин жетөө стандарттуу. Алынган алты тетиктин төртөө стандарттуу болушунун ыктымалдыгын тапкыла.

<u>Чыгаруу.</u> Сыноонун мүмкүн болгон жөнөкөй натыйжаларынын жалпы саны, 10 -дон 6 тетикти канча жол менен алууга мүмкүн болсо ошончо, б.а. 10 элементти 6 - дан топтоштуруунун санына барабар (C_{10}^{6}). Бизге керектүү A окуясына (алынган 6 тетиктин төртөө стандарттуу)оңтойлуу натыйжалардын санын аныктайбыз. Жети стандарттуу тетиктен 4 стандарттуу тетик C_7^4 жол менен тандалып алынат; калган 6-4=2 тетик стандарттуу эмес болуш керек. 10-7=3 стандарттуу эмес тетиктен 2--ни C_3^2 жол менен тандап

алабыз. Демек, бардык оңтойлуу натыйжалардын саны $C_7^4 C_3^2$.

Анда $P(A) = \frac{C_7^4 C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{1}{2}$.

§5 Салыштырма жыштык. Салыштырма жыштыктын туруктуулугу

Салыштырма жыштык ыктымалдык сыяктуу эле ыктымалдыктар теориясынын негизги түшүнүктөрүнүн бири.

13-аныктыма. Окуя аткарылган сыноолордун санынын, жүргүзүлгөн бардык сыноолордун жалпы санына болгон катышы ошол окуянын салыштырма жыштыгы деп аталат.

Салыштырма жыштык $W(A) = \frac{m}{n}$ формуласы менен аныкталат, мында m - окуя аткарылган сыноолордун саны, n - сыноолордун жалпы саны.

Ыктымалдыктын жана салыштырма жыштыктын аныктамаларын салыштырып, ыктымалдыктын аныктамасында сыноолордун жүргүзүлүшү талап кылынбайт; ал эми салыштырма жыштыктын аныктамасында сыноолор жүргүзүлүшү керек деген жыйынтыка келебиз. Башкача айтканда, ыктымалдыкты тажрыйбага чейин, салыштырма жыштыкты тажрыйбадан кийин эсептешет.

12-мисал. Техникалык текшерүү бөлүмү, кокустан тандалып алынган 80 тетиктен турган топтон, 3 стандарттуу эмес тетик тапты. Стандарттуу эмес тетиктин чыгуусунун салыштырма жыштыгын тапкыла.

Чыгаруу. Изделип жаткан салыштырма жыштык $W(A) = \frac{3}{80}$ болот.

13-мисал. Бутага 24 жолу атылган октун 19-у тийди. Бутага тийгизүүнүн салыштырма жыштыгы $W(A)=19/24$.

Көптөгөн байкоолор, ар биринде сыноолордун саны жетиштүү көп болгон тажрыйбаларды бирдей шартта жүргүзгөндө, салыштырма жыштык туруктуулук касиетке ээ болорун көрсөттү. Бул касиеттин мааниси, ар түрдүү тажрыйбаларда салыштырма жыштык аз гана өзгөрүлүп (сыноолордун саны канчалык көп болсо, ошлончолук аз), кандайдыр бир турактуу сандын тегерегинде жаткандыгында турат. Ал турактуу сан окуянын ыктымалдыгы болот. Демек, тажрыйба жүзүндө салыштырма жыштык табылса, анда аны жакындаштырылган түрдө ыктымалдыктын мааниси үчүн кабыл алууга болот. Айтылгандарга мисал келтирели.

14-мисал. Тыйын таштоо боюнча көп сандагы тажрыйба жүргүзүлүп, «герб» түшүштүн саны эсептелген. Бир нече тажрыйбанын жыйынтыгы 1-таблицада берилген.

1-таблица

Таштоонун саны	«Герб» түшүүнүн саны	Салыштырма жыштык
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Мында, салыштырма жыштык 0,5 санынан аз эле айырмаланып турганы көрүнүп турат, ал айырма тажрыйбанын саны канчалык көбөйгөн сайын, ошончолук азайып жатат. Мисалы, тыйын 24000 жолу ташталганда ал айырма болгону 0,0005 ке барабар. Тыйынды таштаганда «герб» жагы менен түшүүнүн ыктымалдыгы 0,5 экендигин эске алсак, салыштырма жыштык, сыноонун саны көбөйгөн сайын, ыктымалдыка умтулары көрүнүп турат.

§6 Геометриялык ыктымалдык

Ыктымалдыктын классикалык аныктамасын сыноонун натыйжалары чексиз көп болгон учурда колдонууга болбойт. Ушул кемчиликти жоюш үчүн, геометриялык ыктымалдыкты - чекиттин белгилүү бир обласка (кесиндиге, тегиздиктин бөлүгүнө ж.б.) тийиштүү болушунун ыктымалдыгын киргизебиз.

L кесиндисинин бөлүгү l болсун. L кесиндисине болжоосуз эле бир чекит коюлган дейли. Мында, төмөндөгүдөй шарттар аткарылат: коюлган чекит L дин ар кандай чекити менен дал келип калышы мүмкүн, ал чекиттин l- ге да тийиштүү болошу l- дин узундугуна пропорциялаш, анын L- ге карата кандай орунда жайгашканына көз каранды эмес. Ушул шарттар аткарылса, коюлган чекиттин l- ге тийиштүү болушунун ыктымалдыгы $P = \frac{|l|}{|L|}$ формуласы менен аныкталат, мында $|l|$, $|L|$ сандары l жана L кесиндилеринин узундуктары.

15-мисал. Ox сан огунун узундугу L болгон OA кесиндисине, болжооосуз эле, $B(x)$ чекити коюлган. OB жана BA кесиндилеринин кыскасынын узундугу $\frac{L}{3}$ -ден чоң болуш ыктымалдыгын тапкыла. Чекиттин кесиндиге тийиштүү болуш ыктымалдыгы, кесиндинин узундугуна пропорциялаш болуп, анын сан огунда жайгашкан ордуна карата көз каранды эмес деп эсептейбиз.

Чыгаруу. OA кесиндисин C жана D чекитттери аркылуу барабар үч бөлүккө бөлөбүз.

Эгерде $B(x)$ чекити узундугу $\frac{L}{3}$ болгон CD кесиндисине тийиштүү болсо, маселе чечилет. Демек, изделип жаткан ыктымалдык

$$P = \frac{L}{3} \Big/ L = 1/3$$

Жалпак g фигурасы G фигурасынын бөлүгү болсун. G жалпак фигурасынан болжоосуз эле бир чекит алынган. Муну биз төмөндөгүдөй шарттар аткарылат деп түшүнүшүбүз керек: алынган чекит G нын ар кандай чекитине дал келиши мүмкүн, ал чекиттин g га тийиштүү болушу g нын аянтына пропорциялаш болуп, gнын формасына жана анын G га карата жайгашкан ордуна көз каранды эмес. Ушул шарттар аткарылса, ташталган чекиттин, g га тийиштүү болуш ыктымалдыгы $P = \frac{S_g}{S_G}$ формуласы менен аныкталат, мында S_g, S_G сандары g жана G областарынын аянтары.

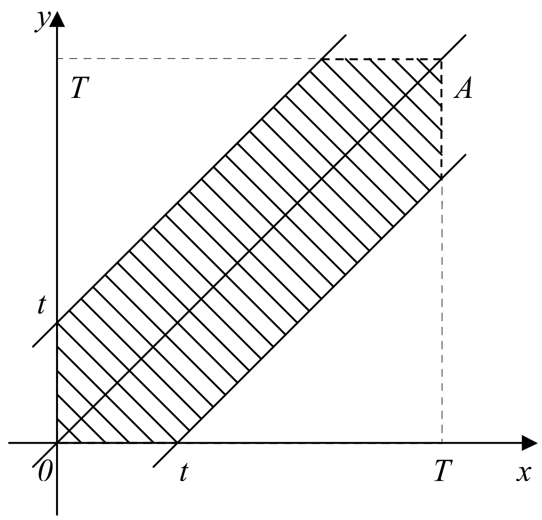
16-мисал. Борборлору бир чекитте жаткан, радиустары 5 см. жана 10 см. болгон эки айлана бир тегиздикте чийилген. Чоң тегереке ташталган чекиттин, эки айлананын ортосундагы шакекчеге тийиштүү болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Чекиттин жалпак фигурага тийиштүү болуш ыктымалдыгы фигуранын аянтына пропорциялаш болуп, анын чоң тегереке карата жайгашкан ордуна көз каранды эмес.

Чыгаруу. Шакекченин (g нын) аянты $Sg = \pi(100 - 52) = 75\pi$. Чоң тегеректин аянты $S_G=\pi 10^2=100\pi$. Изделип жаткан ыктымалдык $P=75\pi/100\pi =0{,}75$.

17-мисал. Сигнализаторго эки аспаптан сигнал келип түшүп турат. Ал сигналдардын, убакыттын ар кандай T аралыгында, келип түшүү мүмкүнчүлүгү бирдей. Сигналдардын келип түшүү учурлары бири бирине көз каранды эмес. Эгерде сигнал келип түшкөн учурлардын айырмасы t дан ($t<T$) кичине болсо, сигнализатор иштейт. Ар бир аспап бирден сигнал жиберген болсо, сигнализатордун T убакытта иштеп туру ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Биринчи жана экинчи аспаптардан сигнал келип түшкөн учурларын, тиешелүү түрдө x жана y аркылуу белгилебиз. Маселенин шарты боюнча $0 \le x \le T$, $0 \le y \le T$ кош барабарсыздыктары аткарылыш керек. Тик бурчтуу xOy координата системасын киригизебиз. Бул системада, жогорку кош барабарсыздыктарды $OTAT$



1-чийме

квадратында жаткан ар кандай чекиттин координатарары канааттандырат (1-чийме). Ошентип, бул квадратты, чекиттеринин координата-лары сигнал келип түшүшү мүмкүн болгон бардык учурларды түшүндүргөн, G фигурасы катары карасак болот. Эгерде сигнал келип түшүүүчү учурлардын айыр-масы t дан кичине болсо, б.а., $y>x$ болгондо $y-x<t$ жана $x>y$ болгондо $x-y<t$, же, ушунун эле өзү,

$y>x$ болгондо $y<x+t$ (1')

$x>y$ болгондо $y>x-t$ (2)

болсо сигнализатор иштейт.

(1') барабарсыздыгы, G фигурасынын $y=x$ түз сызыгынан өйдө жана $y=x+t$ түз сызыгынан төмөн жаткан чекиттери үчүн аткарылат.

(2) барабарсыздыгы болсо G - нын $y=x$ түз сызыгынан төмөн жана $y=x-t$ түз сызыгынан жогору жаткан чекиттери үчүн аткарылат.

1-чиймеден көрүнүп тургандай, (1') жана (2) барабарсыздыктарын канаттандыруучу чекиттер штрихтелген алты бурчтукта жатышат. Ошентип, бул алты бурчтукту, чекиттеринин координаталары, x жана y убакыттарынын оңтойлуу учурлары болгон, g фигурасы катарында кароого болот. Изделген ыктымалдык

$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2} = \frac{t(2T-t)}{T^2}$$

МАСЕЛЕЛЕР.

1. Кутудагы 20 окшош чүкөнүн 8и оң чүкө. Болжоосуз эле бир чүкө алынган. Ал чүкөнүн оң чүкө болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P=0,4

2. Тыйын үки жолу ташталган. Экөөндө тең герб түшүүнүн ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P=0,25

3. Кутудагы 25 чүкөнүн 13ү оң, 10у сол чүкө жана 2ө сака. Болжоосуз алынган бир чүкөнүн оң чүкө же сака болуу ыктмалдыгын жтапкыла.

Жообу: P=0,75.

4. Кутуда 6 кубик бар. Ар бир кубиктин бардык грандарында бирдей И, Р, А, Д, К, А тамгаларынын бири жазылган (эки кубикте бирдей тамга жазылбайт). Бирден алынып туруп, бир сапка тизилген кубиктерден «ДАРИКА» деген ат окулушунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P= P_2 / P_6=1/360.

5. Окшош беш карточканын ар биринде Л, Д, Е, А, Ы тамгаларынын бири жазылган жана алар аябай аралаштырылган. Бирден алынып бир катарга тизилген 4 карточкадан «АДЫЛ» деген ат окулушунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P=$\frac{1}{A_5^4} = \frac{1}{120}$

6. Бардык грандары сырдалган куб бирдей миң кичине кубиктерге бөлүнгөн жана аябай аралаштыралган. Көрбөй туруп алынган кубик: а) бир; б) эки; в) үч сырдалган грандуу болушунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008.

7. Окшош беш карточканын ар бирине А, Т, М, С, А тамгаларынын бири жазылган жана алар аябай аралаштырылган. Бирден алынып бир катарга тизилген 5 карточкадан «САМАТ» деген ат окулушунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: $p=P_2/P_5=1/60$

8. Кулпунун жалпы огунда 5 диска бар. Ар бир диска, ар түрдүү тамга жазылган, алты секторго бөлүнгөн. Эгерде ар бир диска, кулпунун корпусуна карата белгилүү бир абалда жайгашса гана кулпу ачылат. Дискаларды каалагандай жайгаштырганда кулпунун ачылуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: $1/6^5$

9. Ар түрдүү 8 китеп текчеге ар кандай жайгаштырылган. Белгилүү эки китептин катар жайгашуусунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: $P=7\cdot 2!\cdot 6!/8!=1/4$

10. Текчедеги 10 китептин бешөөнүн ар биринин баасы 300 сомдон, эки китептики 200 сомдон жана 3 китептики 150 сомдон. Көрбөй туруп алынган эки китеп 500 сом турарынын ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: $P=C_5^1 \cdot C_2^1 / C_{10}^2 = 2/9$

11. Техникалык текшерүү бөлүмү 100 тетиктен турган топтон 5 стандарттуу эмес тетик тапкан. Стандарттуу эмес тетиктердин чыгуу салыштырма жыштыгы эмнеге барабар?

Жообу: $W=0,05$

12. Мылтык менен бутага атканда, ага тийүүнүн салыштырма жыштыгы 0,85 болду. Эгерде 120 жолу бута атылса, анын канчасы бутага тийди?

Жообу: 102

13. Ox огунун узундугу L болгон OA кесиндисине, болжобой эле $B(x)$ чекити коюлган. OB жана OA кесиндилеринин кыскасынын узундугу $L/3$ төн кыска болуш ыктымалдыгын

тапкыла. Чекиттин кесиндиге тийиштүү болуш ыктымалдыгы, кесиндинин узундугуна пропорциялаш болуп, анын сан огунда жайгашкан ордуна карата көз каранды эмес деп эсептелет.

Жообу: P=2/3

14. Радиусу R болгон тегеректин ичине чекит ташталган. Ал чекит тегерекке ичтен сызылган квадраттын ичине түшөрүнүн ыктымалдыгын тапкыла. Чекиттин квадраттын ичине түшүшү, анын аянтына пропорцилаш болуп, квадраттын тегереке карата жайгашкан ордуна карата көз каранды эмес деп эсептелет.

Жообу: P=2/π

Э к и н ч и г л а в а

ЫКТЫМАЛДЫКТАРДЫ КОШУУНУН ЖАНА КӨБӨЙТҮҮНҮН ТЕОРЕМАЛАРЫ ЖАНА АЛАРДЫН НАТЫЙЖАЛАРЫ

§1 Бирикпөөчү окуялардын ыктымалдыктарын кошуу теоремасы

Окуялардын суммасы жана көбөйтүндүсү жөнүндө түшүнүктөрдү киргизебиз.

I-аныктама. Бир нече окуялардын суммасы деп, ал окуялардын жок дегенде бирөөнүн аткарылышынан турган окуя аталат.

Мисалы, эгерде аткыч эки жолу бута атса жана A *окуясы*- биринчи атылган октун бутага тийиши, B *окуясы* -экинчи атылган октун бутага тийиши болсо, анда $A+B$-биринчи атылган октун же экинчи атылган октун же экөөнүн тең бутага тийиши болот.

Жекече учурда, эгер A жана B бирикпөөчү окуялар болушса, анда $A+B$ -кайсынысы болсо да, бирөөнүн аткарылышынан турган окуя болот.

A жана B - ыктымалдыктары белгилүү болгон бирикпөөчү окуялар болсун. A же B окуяларынын биринин аткарылуу ыктымалдыгын кантип табууга болот? Бул суроого кошуунун теоремасы жооп берет.

1-теорема. Бирикпөөчү эки окуянын кайсынысы болсо да бирөөнүн аткарылыш ыктымалдыгы, бул окуялардын ыктымалдыктарынын суммасына барабар: $P(A+B)=P(A)+P(B)$

Далилдөө. Белгилөөлөрдү жүргүзөбүз: n - сыноонун бардык мүмкүн болгон жөнөкөй натыйжаларынын саны; m_1- A окуясына оңтойлуу натыйжалардын саны; m_2 - B окуясына оңтойлуу натыйжалардын саны болсун. Же A нын же B нын аткарылышына оңтойлуу жөнөкөй натыйжалардын саны m_1+m_2 (A жана B бирикпөөчү окуялар болгондуктан).

Анда, $P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$

1-натыйжа. Эки экиден бирикпөөчү бир нече окуялардын, кайсынысы болсо да биринин аткарылышынын ыктымалдыгы, алардын ар биринин ыктымалдыктарынын суммасына барабар: $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots.+P(A_n)$

Далилдөө. Теореманы A, B жана C үч окуясы үчүн далилдейли. Шарт боюнча, бул окуялар эки экиден бирикпөөчү окуялар болгондуктан A, B жана C окуяларынын биринин аткарылышы $A+B$ жана C нын аткарылышы менен тең күчтүү. Ошондуктан, биринчи теореманын негизинде $P=(A+B+C)=P[(A+B)+C]=P(A+B)+P(C)=$ $=P(A)+P(B)+P(C)$.

Ар кандай сандагы эки экиден бирикпөөчү окуялар үчүн, далилдөөнү математикалык индукция методу менен жүргүзүүгө болот.

1-мисал. Ящикте 30 шар бар: 10 кызыл, 5-көк жана 15-ак (түзсүз). Андан бир шар алынган. Алынган шардын түстүү болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Алынган шар түстүү болуш үчүн, ал кызыл же көк болуш керек. Ал шардын кызыл шар болуу ыктымалдыгы (A окуясынын ыктымалдыгы) $P(A)=10/30=1/3$. Көк шар чыгыштын (B окуясы) ыктымалдыгы $P(B)=5/30=1/6$. A жана B бирикпейт (алынган шар кызыл болсо, ал көк боло албайт), ошондуктан кошуунун теоремасын колдонуп $P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ экендигин табабыз.

§2 Толук группа түзгөн окуяларды кошуу

2-теорема. Толук группа түзүшкөн $A_1, A_2, \ldots.A_n$ окуяларынын ыктымалдыктарынын суммасы бирге барабар $P(A_1)+P(A_2)+\ldots..+P(A_n)=1$

Далилдөө. Толук группа түзүшкөн окуялардын бири шексиз окуя болгондуктан, алардын жок дегенде биринин аткарылышы да шексиз окуя болот, б.а.

$$P(A_1+A_2+\ldots..+A_n)=1 \quad (3)$$

Толук группа түзгөн окуялардын ар бир экөө бирикпөөчү окуялар болгондуктан, кошуунун теоремасы боюнча

$$P(A_1+A_2+\ldots.+P_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots.+P(A_n) \quad (4)$$

(3) жана (4) формуларанын салыштырсак $P(A_1)+P(A_2)+\ldots.+P(A_n)=1$ келип чыгат.

2-мисал. Институттун консультация берүүчү бөлүмү контролдук иштер салынган каттарды A, B жана C шаарларынан алат. Каттын A шаарынан келүү ыктымалдыгы 0,7 ге барабар, B шаарыныкы 0,2. Кезектеги каттын C шаарынан келишинин ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Кезектеги кат «A шаарынан келет», «B шаарынан келет» жана «C шаарынан келет» деген окуялар бирикпейт жана толук группа түзөт, ошондуктан алардын ыктымалдыктарынын суммасы бирге барабар $0,7+0,2+P=1$

Мындан, изделип жаткан ыктымалдык $P=1-0,9=0,1$ болот.

2-натыжа. Эгер толук группа түзгөн окуялар экөө эле болсо (карама-каршы A жана $\overline{A}$ окуялары), 2-теоремадан $P(A)+P(\overline{A})=1$ же кыскача $p+q=1$ келип чыгат.

Мында, $P(A)=p$ жана $P(\overline{A})=q$. Мындай белгилөөлөр кийин да колдонулат.

3-мисал. Күн бүркөк болот деген окуянын ыктымалдыгы $p=0,7$. Күн ачык болот деген окуянын ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. «Күн бүркөк» жана «күн ачык» деген окуялар карама-каршы, демек $q=1-p=1-0,7=0,3$.

1-эскертүү. A окуясынын ыктымалдыгын эсептөөдө, көпчүлүк учурда $\overline{A}$ окуясынын ыктымалдыгын таап туруп, $p=1-q$ формуласын пайдалануу ыңгайлуу.

4-мисал. Ящиктеги n тетиктин m -и стандарттуу. Көрбөй туруп алынган k тетиктин жок дегенде бири стандарттуу болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. «Алынган тетиктердин арасында жок дегенде бир стандарттуу тетик бар» жана «алынган тетиктердин ичинде бир да стандарттуу тетик жок» деген окуялар карама-каршы. Биринчисин A аркылуу белгилесек, экинчиси $\overline{A}$ болот, демек $P(A)=1-P(\overline{A})$.

n тетиктен k тетикти $C_n^к$ жол менен тандап алуу мүмкүн болгондуктан, сыноонун жалпы жөнөкөй натыйжаларынын саны $C_n^к$ болот. $\overline{A}$ -га оңтойлуу натыйжалардын саны $C_{n-m}^к$ болору түшүнүктүү (бардык $n-m$ стандартсыз тетиктен k -ны $C_{n-m}^к$ жол менен тандап алууга болот). Анда $P(\overline{A})=\dfrac{C_{n-m}^к}{C_n^к}$ болот да, $P(A)=1-\dfrac{C_{n-m}^к}{C_n^к}$ келип чыгат.

§3. Кичине ыктымалдуу окуялардын иш жүзүндө аткарылбастык эрежеси

Практикалык көп маселерди чыгарууда ыктымалдыгы өтө кичине, б.а. нөлгө жакын болгон окуялар менен иш жүргүзүүгө туура келет. Кичине ыктымалдуу A окуясы жекече бир сыноодо аткарылбайт деп, эсептөөгө болобу? Мындай жыйынтык чыгарууга болбойт. Себеби A окуясынын ыктымалдыгы канчалык кичине болбосун, ал окуя аткарылып калышы мүмкүн. Ошентип, кичине ыктымалдуу окуянын жекече бир сыноодо аткарыларын же аткарылбастыгын алдын ала айтууга болбостой сезилет. Бирок, көптөгөн тажрыйбалар кичине ыктымалдуу окуялар жекече сыноолордун басымдуу көпчүлүк учурларында аткарылбай тургандыгын көрсөттү. Ушунун негизинде төмөндөгүдөй «кичине ыктымалдуу окуялардын иш жүзүндө (практикада) аткарылбастык эрежеси» кабыл алынган.

Эреже. Эгер кокус окуя эң кичине ыктымалдыка ээ болсо, анда ал окуялар жекече бир сыноодо аткарылбайт.

Бир сыноодо аткарылбас үчүн, окуянын ыктымалдыгы канчалык кичине болуш керек, деген суроо туулат. Бул суроого бир мааниде жооп берүүгө болбойт. Ар түрдүү маанидеги маселелер үчүн, жооп да ар башка. Мисалы, парашюттун ачылбай калуу ыктымалдыгы 0,01 болсо, ал парашютту пайдаланууга болбойт. Ал эми ыраакы жолдон келүүчү поезддин тиешелүү убакыттан кечигип келүү ыктымалдыгы 0,01 болсо, практика жүзүндө ал поезд белгиленген убакыттан кечикпей келерине ишенүүгө болот.

Практика жүзүндө болбой турган окуянын ыктымалдыгын жетишерлик кичине маанисин (берилген белгилүү бир маселеде), маанилүүлүктүн деңгели деп аташат. Практикада маанилүүлүктүн деңгели үчүн 0,01 жана 0,05 сандарынын ортосундагы маанилерди кабыл алышат.

Жогоруда айтылган эрежени кичине ыктымалдуу эле окуялар үчүн колдонбостон, жетишерлик чоң ыкмалдуу (бирге жакын) окуялар үчүн да колдонууга болот. Чындыгында эле, эгер A окуясынын ыктымалдыгы нөлгө жакын болсо, анда карама-каршы $\overline{A}$

окуясынын ыктымалдыгы бирге жакын болот. Ал эми A окуясы аткарылбаса, анда ага карама-каршы $\overline{A}$ окуясынын ыктымалдыгы чоң болот да, ал аткрылат. Ошентип, кичине ыктымалдуу окуялардын практикада аткарылбастык эрежесинен төмөндөгүдөй маанилүү натыйжа келип чыгат.

3-натыйжа. Кокус окуя бирге жакын ыктымалдыка ээ болсо, анда практика жүзүндө ал окуя жекече бир сыноодо аткарылат.

Бул учурда дагы кандай чоңдуктагы ыктымалдыкты бирге жакын деп эсептеш, каралып жаткан маселенин маанисине жараша аныкталат.

§4. Окуялардын көбөйтүндүсү. Көз каранды жана көз кранды эмес окуялар. Шарттуу ыктымалдык.

2-аныктама. Бир нече окуялардын көбөйтүндүсү деп, ал окуялардын ар биринин аткарылышынан (берилген окуялардын биригүүсүнөн) турган окуя аталат.

Мисалы, A, B, C окуялары тиешелүү түрдө тыйынды биринчи, экинчи жана үчүнчү жолу таштаганда «герб» түштү деген окуялар болсо, анда алардын көбөйтүндүсү (ABC) бардык сыноолордо «герб» түштү деген окуя болот.

3-аныктама. Эгерде эки окуянын биринин ыктымалдыгы, экинчисинин аткарылгандыгына же аткарылбагандыгына карата өзгөрсө (өзгөрбөсө) ал окуялар көз каранды (көз каранды эмес) окуялар деп аталат.

5-мисал. Идиште 5 кызыл жана 5 көк шар бар. Идиштен эки жолу бирден шар алынды (алынган шарларды идишке кайра салбай туруп). Анда «биринчи алынган шар кызыл» (A окуясы) жана «экинчи алынган шар көк» (B окуясы) деген окуялар көз каранды болушат. Себеби, A окуясы аткарылса $P(B)=5/9$ ал эми A аткарылбаса $P(B)=4/9$ болот да B нын ыктымалдыгы A га карата өзгөрөт. Эми, эгерде экинчи шарды алардан мурда, биринчи алынган шар идишке кайра салынды деп эсептесек, A жана B окуялары көз каранды эмес болушат. Себеби, бул учурда B нын ыктымалдыгы $P(B)=1/2$ болуп, A нын аткарылышына же аткарылбастыгына карата өзгөрбөйт.

4-аныктама. Бир нече окуялардын ар бир экөө көз каранды эмес болсо, алар эки экиден көз кранды эмес окуялар деп аталат.

Мисалы, эгер A жана B, A жана C, B жана C окуялары көз каранды эмес болушса, A, B, C окуялары эки экиден көз каранды эмес окуялар болушат.

5-аныктама. Бир нече окуялардын ар бир экөө, жана ошондой эле, ар бир окуя калгандарынын ар түрдүү комбинациялары менен көз каранды эмес болсо, анда ал окуялар тобу менен көз каранды эмес окуялар деп аталат.

Мисалы, A_1, A_2 жана A_3 окуялары тобу менен көз каранды эмес болуш үчүн A_1 жана A_2; A_1 жана A_3; A_2 жана A_3; A_1 жана A_2A_3; A_2 жана A_1A_3; A_3 жана A_1A_2 окуялары көз каранды эмес болуш керек. Бир нече окуя тобу менен көз каранды эмес болуш үчүн, алардын эки экиден көз каранды эмес болушу жетишсиз экендиги түшүнүктүү.

6-аныктама. Бир окуянын, экинчи бир же бир нече окуя аткарылды деген шартта аныкталган ыктымалдыгы, шарттуу ыктымалдык деп аталат.

B окуясынын A окуясы аткарылды деген шарттагы ыктымалдыгы $P_A(B)$ түрүндө белгиленет.

Жогоруда келтирилген мисалды карайлы (5-мисал). A менен B көз каранды болгон учурда $P_A(B)=5/9$, $P_{\bar{A}}(B)=4/9$. Ал эми A менен B көз каранды эмес болгон учурда $P_A(B)=P_{\bar{A}}(A)=1/2$. Окуялар көз каранды эмес болгон учурда, шарттуу ыктымалдык кадимки эле шартсыз ыктымалдыкка барабар болуп калары түшүнүктүү.

Биздин мисалда $P_A(B)=P_{\bar{A}}(B)=P(B)=\dfrac{1}{2}$.

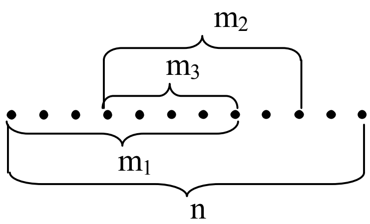
§5 Ыктымалдыктарды көбөйтүүнүн теоремасы

A жана B окуяларынын ыктымалдыктары $P(A)$ жана $P(B)$ белгилүү болсун. Бул эки окуянын көбөйтүндүсүнүн ыктымалдыгы төмөндөгү теорема боюнча аныкталат.

3-теорема. Эки окуянын көбөйтүндүсүнүн ыктымалдыгы, алардын биринин ыктымалдыгын, экинчисинин шарттуу ыктымалдыгына көбөйткөн көбөйтүндүсүнө барабар:

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A)$$

Далилдөө. A жана B окуялары аткарылуучу же аткарылбачу жалпы натыйжалардын саны n, A -га оңтойлуу натыйжалар m_1, B -га оңтойлуу натыйжалар m_2, A аткарылды деген шартта B -га оңтойлуу натыйжалар m_3 болсун. Анда A менен B -нын экөөнө тең оңтойлуу натыйжалар m_3 болот ($2_а$-чиймеде ар бир натыйжа чекит түрүндө көрсөтүлгөн).



2а-чийме

Демек, $P(A)=\frac{m_1}{n}$, $P(B)=\frac{m_2}{n}$,

$P(AB)=\frac{m_3}{n}$, $\frac{m_3}{n}=\frac{m_1}{n}\cdot\frac{m_3}{m_1}$

болгондуктан $P(AB)=P(A)P_A(B)$. Бул формуланы BA окуясына колдонсок $P(BA)=P(B)P_в(A)$ болот. AB жана BA окуялары бир эле окуяны түшүндүргөндүктөн, акыркы эки барабардыктан $P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_в(A)$ келип чыгат. Теорема толук далилденди.

4-натыйжа. Бир нече окуялардын көбөйтүндүсүнүн ыктымалдыгы алардын биринин ыктымалдыгын калгандарынын шарттуу (улам кийинки көбөйтүлүүчү окуянын ыктымалдыгы мурунку окуялардын баары аткарылды деген шарттагы)ыктымалдыктарына көбөйткөн көбөйтүндүгө барабар:
$P(A_1,A_2\ldots A_n)=P(A_1)P_{A1}(A_2)P_{A1A2}(A3)\ldots P_{A1A2\ldots A(n-1)}(A_n)$

Мында $P_{A1A2\ldots..A(i-1)}(A_i)$ ыктамалдыгы A_i окуясынын, $A_1,A_2,\ldots..,A_{(i-1)}$ окуялары аткарылды деген учурдагы шарттуу ыктымалдыгы.

Жекече учурда, үч окуя үчүн $P(ABC)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C)$. Окуялардын көбөйтүндүдөгү ээлеген орду маанилүү эмес, б.а. ар бир окуя каалагандай орунда алынышы мүмкүн.

6-мисал. Окуучунун 5 кызыл, 4 көк жана 3 сары тетрады бар. Ал адегенде бир, андан кийин дагы эки жолу бирден тетрадь алды. «Биринчи алынган тетрадь кызыл» (A окуясы), «экинчи көк» (B), «үчүнчү сары» (C окуясы) деген окуянын (ABC окуясы) ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Биринчи алынган тетраддын кызыл болуу ыктымалдыгы $P(A)=\frac{5}{12}$ болору түшүнүктүү. A окуясы аткарылгандан кийинки B окуясынын шарттуу ыктымалдыгы $P_A(B)$=4/11 болот. Ушул сыяктуу эле $P_{AB}(C)=3/10.$ Анда $P(ABC)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=1/22$.

2-эскертүү. Эгерде A жана B окуялары көз каранды эмес болушса, алардын биринин, экинчиси аткарылды деген учурдагы шарттуу ыктымалдыгы, шартсыз ыктымалдыкка барабар, б. а. $P_A(B)=P(B)$ болгондуктан, көбөйтүүнүн теоремасы, көз каранды эмес окуялар үчүн, $P(AB)=P(A)P(B)$ түрүнө келет. Демек, көз каранды эмес эки окуянын көбөйтүндүсүнүн ыктымалдыгы, ар бир окуянын ыктымалдыктарынын көбөйтүндүсүнө барабар.

Ушул сыяктуу эле, эгерде A_1, $A_2,\ldots,A_n$ окуялары тобу менен көз каранды эмес болушса,

$$P(A_1,A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots.P(A_n)$$

болорун математикалык индукция ыкмасы менен далилдөөгө болот. Практика жүзүндө, окуялардын көз карандылыгы же көз каранды эместиги маселенин шартына жараша аныкталат. Мисалы, эки аткычтын ар биринин бутага тийгизүү ыктымалдыгы, экинчисинин бутага тийгизгендигине байланышпайт. Ошондуктан, «биринчи аткыч бутага тийгизди» жана «экинчи аткыч бутага тийгизди» деген окуялар көз каранды эмес болушат.

7-мисал. Эгерде биринчи аткычтын бутага тийгизүү (A окуясы) ыктымалдыгы 0,8; экинчисиники (B окуясы)-0,7 болсо, анда эки аткычтын тең бутага тийгизүү ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. A жана B көз каранды эмес окуялар болгондуктан

$$P(AB)=P(A)P(B)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56.$$

3-эскертүү. Эгерде A жана B көз каранды эмес окуялар болушса, анда A жана $\overline{B}$, $\overline{A}$ жана B, $\overline{A}$ жана $\overline{B}$ окуялары өз ара көз каранды эмес болушат. Чындыгында эле, $A=AB+A\overline{B}$. Ошондуктан,

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}) \quad \text{же} \quad P(A)=P(A\overline{B})+P(A)P(B)$$

Мындан $P(A\overline{B})=P(A)(1-P(B))$ же $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}),$

б.а. А жана $\overline{B}$ көз каранды эмес. $\overline{A}$ жана B, $\overline{A}$ жана $\overline{B}$ окуяларынын көз каранды эместиги, далилденген ырастоонун натыйжасы болот.

Ушул сыяктуу эле, $A_1,A_2\ldots A_n$ тобу менен көз каранды эмес болушса, карама-каршы $\overline{A_1}\,\overline{A_2},\ldots,\overline{A_n}$ окуялары дагы тобу менен көз каранды эмес болушат.

Бир эле учурда кошуунун жана көбөйтүүнүн теоремаларын колдонууга мисал келтирели.

8-мисал. Көз каранды эмес A_1, A_2 жана A_3 окуяларынын ар биринин ыктымалдыгы, тиешелүү түрдө P_1, P_2 жана P_3. Ушул окуялардын биринин гана (кайсынынсы болсо да баары бир) аткарылуу ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Окуялардын биринин гана, мисалы, A_1дин аткарылышы $B_1 = A_1\overline{A_3}\,\overline{A_2}$ окуясынын (A_1 аткарылды A_2 A_3 аткарылган жок деген окуянын) аткарылышы менен тең күчтө. Ушул сыяктуу эле A_2 менен $B_2=\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$; A_3 менен $B_3=\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ тең күчтөгү окуялар. Ошентип, A_1, A_2, A_3 окуяларынын кайсынысы болсо да, биринин гана аткарылышы $B_1+B_2+B_3$ окуясын түзөт(B_1 аткарылды же B_2 аткарылды же B_3 аткарылды). B_1, B_2, B_3 биригишпөөчү окуялар болгондуктан, кошуунун теоремасын колодонууга болот:

$$P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3) \qquad (5)$$

A_1, A_2, A_3 көз каранды эмес болушкандыктан $A_1, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ дагы көз каранды болушпайт. Көбөйтүндүнүн теоремасын колдонсок $P(B_1)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=p_1q_2q_3$ келип чыгат. Ушул сыяктуу эле $P(B_2)=P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})=q_1p_2q_3$,

$$P(B_3)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_3}A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)=q_1q_2p_3$$

Анда (5) формуласынан, изделип жаткан ыктымалдык

$$P(B_1+B_2+B_3)= p_1q_2q_3+ q_1p_2q_3+ q_1q_2p_3$$ болорун табабыз.

§6 Жок дегенде бир окуянын аткарылыш ыктымалдыгы

Сыноонун натыйжасында, тобу менен көз каранды эмес n окуяларынын баары же алардын бир тобу (жекече учурда, бирөө гана же эч бири) аткарылышы мүмкүн болсун. Алардын ыктымалдыктары белгилүү болсо, жок дегенде биринин аткарылыш ыктымалдыгын кантип табууга болот? Жок дегенде бири аткарылат дегенге мисал келтирели.

Сыноонун натыйжасында үч окуя аткарылышы мүмкүн болсо, анда алардын жок дегенде бири аткарылат деген, алардын бирөө же экөө же үчөө тең аткарылат дегенди түшүндүрөт. Жогоруда коюлган суроого төмөнкү теорема жооп берет.

4-теорема. Тобу менен көз каранды эмес $A_1, A_2, \ldots, A_n$ окуяларынын жок дегенде биринин (A окуясынын) аткарылыш ыктымалдыгы бир менен, аларга карама-каршы $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ окуяларынын ыктымалдыктарынын көбөйтүндүсүнүн айырмасына барабар: $P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$, мында $P(A_i) = p_i$, $q_i = 1 - p_i$, $i = \overline{1, n}$.

Далилдөө. А менен $\overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_n}$ ("жок дегенде бири аткарылат" менен "эч бири аткарылбайт" деген окуялар) карама-каршы окуялар. Ошондуктан, алардын ыктымалдыктарынын суммасы бирге барабар:

$$P(A) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) = 1 .$$

Мындан, $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ тобу менен көз каранды эместигин эске алып, көбөйтүүнүн теоремасынын негизинде $P(A) = 1 - P(\overline{A_1}, \overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) \ldots P(\overline{A_n})$ же $P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$ болорун табабыз.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ окуялары бирдей P-га барабар болгон ыктымалдыка ээ болгон жекече учурда, жок дегенде бир окуянын аткарылуу ыктымалдыгы

$$P(A) = 1 - q^n \tag{6}$$

болот.

9-мисал. Үч замбиректин бутага тийгизүү ыктымалдыктары, тиешелүү түрдө, $P_1 = 0{,}8$; $P_2 = 0{,}7$; $P_3 = 0{,}9$;. Ушул үч замбиректен тең бир жолу атылганда, жок дегенде бирөөнүн бутага тийүү (A окуясы) ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Ар бир замбиректин бутага тийгизүү ыктымалдыгы, башкаларыныкы бутага тийгендигине же тийбегендигине байланышпайт. Ошондуктан, каралып жаткан A_i (i - чи замбиректен атылган ок бутага тиет деген окуя), $i = \overline{1.3}$, тобу менен көз каранды эмес окуялар. Карама-каршы $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ окуяларынын ыктымалдыктары, тиешелүү түрдө $q_1 = 1 - P_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $q_2 = 1 - P_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ $q_3 = 1 - P_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Изделип жаткан ыктымалдык $P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$.

10-мисал. Аткыч бир атуу менен бутага тигизет деген окуянын ыктымалдыгы 0,4. Ал жок дегенде 0,9 ыктымалдыгы менен бутага тийгизиш үчүн канча жолу атыш керек?

Чыгаруу. A аркылуу «n жолу атканда, жок дегенде бир жолу бутага тийгизет» деген окуяны белгилейбиз. Биринчи атканда тиет, экинчи атканда тиет ж.б.у.с. окуялар тобу менен көз каранды эмес болушат, ошондуктан, (6) формуласын колдонобуз. Шарт боюнча $P(A) \geq 0{,}9$; p=0,4 (q=1-0,4=06) болгондугун эске алсак, $1-0{,}6^n \leq 0{,}1$ болот. Бул барабарсыздыктын эки жагын 10 негизи боюнча логарифмаласак $nlg0{,}6 \leq lg0{,}1$ келип чыгат. Эми, lg0,6<1 болгондуктан, n>lg0,1/lg0,6=4,5 экендигин табабыз. Демек $n \geq 5$ болуш керек, б.а. аткыч жок дегенде 5 жолу атыш керек.

11-мисал. Тобу менен көз каранды эмес үч сыноодо, окуя жок дегенде бир жолу аткарылышынын ыктымалдыгы 0,936 барабар. Окуянын бир сыноодо аткарылышынын ыктымалдыгын тапкыла (ар бир сыноодо окуянын аткарылыш ыктымалдыгы бирдей).

Чыгаруу. Каралып жаткан окуялар тобу менен көз каранды эмес болгондуктан, $P(A)=1-q^n$ формуласын колодонсок (шарт боюнча $P(A)=0{,}936,\quad n=3)\quad 0{,}936=1-q^3\quad же\quad q^3=1-0{,}936=0{,}064.$ Мындан $q=\sqrt[3]{0{,}064}=0{,}4$. Изделип жаткан ыктымалдык p=1-0,4=0,6.

§7 Биригүүчү окуялардын ыктымалдыктарын кошуунун теоремасы

A жана B биригүүчү окуялар болсун. Алардын ар биринин жана биригип аткарылышынын ыктымалдыктары белгилүү дейли.
$A+B$ окуясынын, б.а. A жана B нын жок дегенде биринин аткарылыш ыктымалдыгын кантип табууга болот? Бул суроого жоопту биригүүчү окуялардын ыктымалдыктарын кошуу теоремасы жооп берет.

5-теорема. Биригүүчү эки окуянын жок дегенде биринин аткарылыш ыктымалдыгы, алардын ар биринин ыктымалдыктарынын суммасынан, алардын биргелешип аткарылыш ыктымалдыгын алып таштаганга барабар, б.а.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Далилдөө. A жана B биригүүчү окуялар болгондуктан бирикпөөчү $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ же AB окуяларынын бири аткарылса, $A+B$ окуясы аткарылган болот. Бирикпөөчү окуялардын ыктымалдыктарын кошуу теоремасынын негизинде

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB) \qquad (7)$$

Бирикпөөчү $A\overline{B}$ же AB окуяларынын бири аткарылса A окуясы аткарылган болот, демек $P(A)=P(A\overline{B})+P(AB)$.
Мындан

$$P(A\overline{B})=P(A) - P(AB) \qquad (8)$$

же

$$P(B\overline{A})=P(B) - P(AB) \qquad (9)$$

(8) менен (9) формуларын (7) -ге койсок

$$P(A+B)=P(A)+P(B) - P(AB) \qquad (10)$$

келип чыгат да, теорема далилденген болот.

4-эскертүү. (10) формуласын пайдаланууда A жана B көз каранды же көз каранды эмес болушу мүмкүн. Көз каранды болгон учурда $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P_A(B)$, көз каранды болбогон учурда $P(A+B)=P(A)+P(B) - P(A)P(B)$.

5-эскертүү. Эгерде A жана B бирикпөөчү окуялар болсо, $P(AB)=0$ болот да (AB-болбос окуя болгондуктан) (10) формуласы $P(A+B)=P(A)+P(B)$ түрүнө келет. Биз кайрадан бирикпөөчү окуяларды кошуунун теоремасын алдык. Ошентип, (10) биригүүчү жана бирикпөөчү окуялар үчүн да аткарылат.

12-мисал. Биринчи жана экинчи замбиректин мээлеген жерге тийгизүү ыктымалдыктары, тийешелүү түрдө P_1=О,8; P_2=О,7.Эки замбиректен тең бир жолу атканда,жок дегенде бири мээлеген жерге тийиштин ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Эки замбиректин ар биринин мээлеген жерге тийгизүү ыктымалдыктары, экинчисиникине көз каранды эмес. Ошондуктан, A (биринчи замбирек мээлеген жерге тийгизет) жана B (экинчи замбирек мээлеген жерге тийгизет) окуялары көз каранды эмес. AB (эки замбирек тең мээлеген жерге тийгизет) окуясынын ыктымалдыгы $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56$.

Изделип жаткан ыктымалдык $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}8+0{,}7-0{,}56=0{,}94$.

6-эскертүү. Бул мисалда A жана B көз каранды эмес болушкандыктан, $P=1-q_1q_2$ формуласын колдонсок да болот. Чындыгында эле $P(\overline{A})=1-p_1=1-0{,}8=0{,}2$; $P(\overline{B})=1-p_2=1-0{,}7=0{,}3$

Эки замбиректен тең жок дегенде бир жолу тийгизүү ыктымалдыгы $P(A+B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}94$ болот. Мурунку эле жыйынтык алынды.

§8 Толук ыктымалдыктын формуласы

Толук группа түзгөн, бирикпөөчү B_1, $B_2,\ldots B_n$ окуяларынын бири аткарылганда гана аткарыла турган A окуясы, аткарылды дейли.
Бул B_1, $B_2,\ldots B_n$ окуяларынын ыктымалдыктары жана A- нын шарттуу ыктымалдыктары $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A),\ldots. P_{B_n}(A)$ белгилүү болсун. A - нын ыктымалдыгын (шартсыз) кантип табууга болот? Бул суроого төмөнкү теорема жооп берет.

6-теорема. Толук группа түзгөн бирикпөөчү B_1, $B_2,\ldots B_n$ окуяларынын бири аткарылганда гана аткарыла турган А окуясынын ыктымалдыгы, ал окуялардын ыктымалдыктарын, А- нын тиешелүү шарттуу ыктымалдыктарына көбөйткөн көбөйтүндүлөрдүн суммасына барабар:

$$P(A)=P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots.+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Бул формуланы «толук ыктымалдыктын формуласы» деп аташат.

Далилдөө. Шарт боюнча A окуясы $B_1, B_2,\ldots B_n$ окуяларынын бири менен гана чогуу аткарылгандактан, A аткарылыш үчүн биригишпөөчү B_1A, $B_2A,\ldots$, B_nA окуяларынын бири аткарылыш керек. Кошуунун теоремасын падаланып

$$P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+\ldots+P(B_nA) \qquad \text{(II)}$$

формуласын алабыз.

Көз каранды окуялардын ыктымалдыктарын көбөйтүүнүн теоремасы боюнча $P(B_iA)=P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$, $i=\overline{1,n}$ болгондуктан (II) формуласынан $P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A)$ келип чыгат. Теорема далилденди.

13-мисал. Тетиктердин эки тобу бар. Биринчи топтогу тетиктердин стандарттуу болу ыктымалдыгы 0,8 - ге барабар, экинчисиники - 0,9. Кокустан алынган топтон, кокустан алынган тетиктин стандарттуу болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. А аркылуу «алынган тетик стандарттуу» деген окуяны белгилейбиз. Тетик биринчи топтон (B_1-окуясы) же экинчи топтон (B_2-

окуясы) алынат. $P(B_1)=\frac{1}{2}$ жана $P(B_2)=\frac{1}{2}$ экендиги түшүнүктүү. «Биринчи топтон алынган тетик стандарттуу» деген окуянын шарттуу ыктымалдыгы $P_{B_1}(A)=0{,}8$. «Экинчи топтон алынган тетик стандарттуу» деген окуянын шарттуу ыктымалдыгы $P_{B_2}(A)=0{,}9$. Демек, толук ыктымалдыктын формуласы боюнча $P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=0{,}5\cdot 0{,}8+0{,}5\cdot 0{,}9=0{,}85$

14-мисал. Биринчи кутуда радионун 20 лампасы бар, анын 18-и стандарттуу. Экинчи кутуда 10 лампа бар, анын 9-у стандарттуу. Экинчи кутудан кокустан бир лампа алып, аны биринчи кутуга салышкан. Биринчи кутудан кокустан алынган лампанын стандарттуу болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. A аркылуу «биринчи кутудан алынган лампа стандарттуу» деген окуяны белгилейбиз. Экинчи кутудан стандарттуу лампа (B_1 окуясы) же стандарттуу эмес лампа (B_2 окуясы) алынышы мүмкүн. Анда $P(B_1)=9/10$, $P(B_2)=1/10$ болору түшүнүктүү. Эгерде экинчи кутудан стандарттуу лампа алынып, биринчи кутуга салынган болсо, биринчи кутудан алынган лампа стандарттуу болуштун шарттуу ыктымалдыгы $P_{B_1}(A)=19/21$ болот. Ушул сыяктуу эле $P_{B_2}(A)=18/21$. Анда изделип жаткан A окуясынын ыктымалдыгы $P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=\frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21}=0{,}9$ болот.

§9 Божомолдордун (гипотезалардын) ыктымалдыктары. Бейестин формулалары.

A окуясы, толук группа түзгөн бирикпөөчү B_1, $B_2,\dots B_n$ окуяларынын бири аткарылганда гана аткарылсын. Эгерде A окуясы аткарылды десек, ал B_i окуяларынын кайсынысы менен чогуу аткарылгандыгы белгилүү болбогондуктан, аларды (B_i-ни) божомолдор деп аташат.

A- нын ыктымалдыгы

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\dots+P(B_n)P_{B_n}(A) \qquad (12)$$

формуласы боюнча табыларын билебиз. Сыноонун натыйжасында A аткарылды дейли. A аткарылгандыгына байланыштуу божомолдордун ыктымалдыктары кандай өзгөрүлгөндүгүн аныктоо талап кылынсын, б.а. $P_A(B_1), P_A(B_2), \ldots P_A(B_n)$ шарттуу ыктымалдыктарын табыш керек дейли. Көбөйтүүнүн теоремасы боюнча

$P(AB_i)=P(A)P_A(B_i)=P(B_i)P_{B_i}(A)$ же $P_A(B_i)=\dfrac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}$, $i=\overline{1,n}$

(12) формуласын пайдалансак, акыркы формула

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+\ldots+P(Bn)P_{Bn}(A)}, \quad i=\overline{1,n}$$

түрүндө жазылат. Бул формулалар Бейестин формулалары деп аталат (аларды чыгарып, 1764 ж. жарыялаган Англия математигинин атынан). Бейестин формулараары, A окуясы аткарылгандан кийин, божомолдордун ыктымалдыктарын кайра тактоого мүмкүндүк берет.

15-мисал. Заводдун цехи (бөлүмү) даярдаган тетик, стандарттуулугун текшерүүгө, эки текшерүүчүнүн бирине берилет. Тетик биринчи текшерүүчүгө түшөрүүнүн ыктымалдыгы 0,6, экинчиге түшөрүнүкү 0,4. Жарактуу тетик биринчи текшерүүчү аркылуу стандарттуу деп табылышынын ыктымалдыгы 0,94, экинчисиники 0,98. Жарактуу тетик текшерилгенде стандарттуу деп табылды. Бул тетикти биринчи текшерүүчү текшергендигинин ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. A аркылуу «жарактуу тетик стандарттуу деп табылды» деген окуяны белгилейбиз.Төмөндөгүдөй эки учур болушу мүмкүн:

1) тетикти биринчи текшерүүчү текшерди (B_1 божомолу);

2) тетикти экинчи текшерүүчү текшерди (B_2 божомолу).

Изделип жаткан ыктымалдыкты Байестин

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)}$$

формуласы боюнча табабыз.

Маселенин шарты боюнча $P(B_1)=0,6$, $P(B_2)=0,4$, $P_{B_1}(A)=0,94$, $P_{B_2}(A)=0,98$.

Демек, изделип жаткан ыктымалдык $P_A(B_1)=\dfrac{0,6\cdot 0,4}{0,6\cdot 0,4+0,4\cdot 0,8}=0,59$

болот.

Сыноого чейин B_1 божомолунун ыктымалдыгы 0,6 болсо, сыноонун жыйынтыгы белгилүү болгондон кийин, бул божомолдун ыктымалдыгы (тагыраак айтканда, шарттуу ыктымалдык) өзгөрүп, 0,59 барабар болуп калды.

Ошентип, Байестин формуласын пайдалануу, каралып жаткан божомолдун ыктымалдыгын кайра тактоого мүмкүнчүлүк берди.

МАСЕЛЕЛЕР

1. Акча-буюм лотереясынын ар бир 10000 билетине 150 буюм утуш, 50 акчалай утуш туура келет. Бир билеттин ээсинин акчалай же буюм түрдө утушка ээ болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P=0,02

2. Аткыч бир атууда 10 упайга тийгизеринин ыктымалдыгы 0,1; 9 упайга тийгизериники 0,3; 8 упайга тийгизеринин ыктмалдыгы 0,6. Бир атуудан аткыч 9 дан кем эмес упайга ээ болорунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P=0,4

3. 10 тетиктен турган топ тетиктин 8 -и стандарттуу. Кокустан алынган 2 тетиктин жок дегенде бири стандарттуу болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P=44/45

4. Кутудагы 10 тетиктин экөө стандарттуу эмес. Кокустан алынган 6 тетиктин ичинде, бирден ашык эмес стандартсыз тетик болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P=2/3

<u>Көрсөтмө.</u> Эгер A - бир дагы стандарттсыз тетик жок, B - бир стандартсыз тетик бар деген окуялар болсо, анда

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=C_8^6/C_{10}^6+C_2^1C_8^5/C_{10}^6$$

5. A, B, C жана D окуялары толук группа түзөт. A, B жана C-нын ыктымалдыктары: $P(B)=0{,}4$; $P(A)=0{,}1$ жана $P(C)=0{,}3$. D-нын ыктымалдыгы эмнеге барабар?

Жообу: $P(D)=0{,}2$

6. Статистика боюнча орточо алганда станоктун 20 жолу токтошунун 10у кескичти алмаштырыш үчүн,3ө

кыймылдаткычтын оң эместигинен, 2 жолу тетик өз убагында берилбегендиктен жана калган токтоолор башка себептердин негизинде болот.

Башка себептердин негизинде токтоолордун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P=0,25

7. Бир жолу атканда аткычтын бутага тийгизүү ыктымалдыгы P=0,9. Аткыч үч жолу атты. Үчөө тең бутага тийиштин ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P =0,729

8. Тыйын жана кумар ойноочу сөөк бир жолу ташталды. «Герб түштү» жана «6 упай түштү» деген окуялардын биригишип чыгуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P=1/12

9. Эки кутунун биринде 10 тетик (анын үчөө стандарттуу) , экинчисинде 15 тетик (анын алтоо стандарттуу) бар. Ар бир кутудан бирден тетик алынган. Экөө тең стандарттуу болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P=0,12

10. Телестудияда 3 телекамера бар. Ар бир камеранын берилген учурда иштеп жатуу ыктымалдыгы P=0,6. Берилген учурда жок дегенде бир камера иштеп жатыш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P=0,936

11. Кумар ойноочу үч сөөктү бир жолу таштаганда 6 упайдын жок дегенде бир сөөктө чыгуу ыктымалгын тапкыла.

Жообу: 91/216

12. Ишкана чыгарган буюмдун 95 -и стандарттуу, анын 86 -сы биринчи сортто. Кокустан алынган буюмдун биринчи сортто болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 0,817

13. Бир жолу атканда аткычтын 10 упайга тийгизүү ыктымалдыгы 0,6 барабар. Ал 0,8 кем эмес ыктымалдык менен, жок дегенде бир жолу 10 упайга тийгизиш үчүн, канча жолу атыш керек.

Жообу: $n \geq 2$

14. 1,2,3,4,5 цифраларынан адегенде бир, андан кийин калган 4 цифрадан-экинчи цифра тандалып алынат. Сыноонун бардык 20 натыйжасы бирдей мүмкүнчүлүктө деп болжолдонот. Төмөнкү окуялардын ыктымалдыктарын тапкыла: а) биринчи жолу; б) экинчи жолу; в) эки жолу тең так цифра тандалып алынат.

Жообу: а) 3/5; б)3/5 ; в)3/10

15. Үч электр лампочкасы чынжырга удаалаш туташтырылган. Эгерде тармактагы чыңалуу номиналдуудан өтүп кетсе, ар бир лампочканын күйүп кетүү ыктымалдыгы 0,6-га барабар. Ашыкча чыңалуу болгондо чынжырда ток жок болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 0,936

16. Көз каранды эмес эки сыноодо A окуясынын жок дегенде бир жолу аткарылыш ыктымалдыгы 0,75 барабар. A окуясынын бир жолку сыноодо аткарылыш ыктымалдыгын тапкыла. A-нын ар бир соноодогу аткарылыш ыктымалдыктары бирдей эле.

Жообу: 0,5

17. A коомунун үч A_1, A_2, A_3 командасы B коомунун үч B_1,B_2,B_3 командасы менен беттешет. A коомунун командалары B коомунун командаларын утуу ыктымалдыктары төмөндөгүдөй: A_1 командасы B_1 менен беттешкенде-0,8; A_2 командасы B_2 менен беттешкенде-0,4; A_3 командасы -B_3 менен беттешкенде-0,4. Утуш үчүн 3 оюндун экөөнү жеңиш керек болсо (тең чыгуу эсепке алынбайт). Кайсы команданын утушу ыктымалдуурак.

Жообу: A коомунунку $(P(A)=0{,}544>\frac{1}{2}$).

18. Бир атканда биринчи аткычтын бутага тийгизүү ыктымалдыгы 0,8, экинчисиники-0,6. «Бутага бир гана аткыч тийгизди» деген окуянын ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 0,44

19. 1,2,…..n сан удаалаштыгынан бир, андан кийин экинчи сан тандалып алынат. Бул тандалып алынган сандардын бири k бүтүн санынан кичине, экинчиси k -дан чоң болуш ыктымиалдыгын тапкыла, мында 1<k<n

Жообу: $[2(k-1)(n-k)]/[n(n-1)]$

Көрсөтмө. а) биринчи сан $<k$, экинчи сан $>k$; б) биринчи сан $>k$, экинчи сан $<k$ болгон учурларды караш керек.

20. Техникалык текшерүү бөлүмү тетиктерди стандарттуулукка текшерет. Тетик стандарттуу болбой калыш ыктымалдыгы 0,1. Төмөндөгү окуялардын ыктымалдыктарын тапкыла: а) текшерилген үч тетиктин бири гана стандарттуу эмес; б) катары менен текшерилген тетиктердин төртүнчүсү гана стандарттуу болбойт.

Жообу: а) 0,243; б)0,0729

21. Эки аткыч бир жолдон бута атышты. Биринчи аткычтын бутага тийгизүү ыктымалдыгы 0,7-ге барабар, экинчисиники-0,6. Жок дегенде бир аткыч бутага тийгизүүсүнүн ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 0,88

22. Жыйноочунун №1 завод даярдаган 16 тетиги, №2 завод даярдаган 4 тетиги бар. Эки тетик кокустан тандалып алынган. Алардын жок дегенде бири №1 завод даярдаган тетик болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 92/95

23. Спортсмендердин группасында 20 лыжачы, 6-велосипедчи жана 4 жөө күлүк бар. Лыжачынын квалификациялык норма толтуруу ыктымалдыгы 0,9 - га барабар, велосипедчиники-0,75. Кокустан тандалып алынган спортсмендин норма толтуруш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 0,86

24. Жыйноочу №1 завод даярдаган 3 куту тетик, №2 завод даярдаган 2 куту тетик алды. №1 завод даярдаган тетиктин стандарттуу болуу ыктымалдыгы 0,8-ге барабар, №2 заводдуку 0,9. Жыйноочу кокустан алынган кутудан, көрбөй туруп алынган тетиктин стандарттуулук ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 0,84

25. Биринчи кутуда 20 тетик бар, анын 15-и стандарттуу; экинчи кутуда 30 тетик бар, анын 24-ү стандарттуу; үчүнчү кутудагы 10 тетиктин 6-о стандарттуу. Кокустан алынган кутудан, көрбөй туруп алынган тетиктин стандарттуулук ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу:43/60

26. Сыналгы ательесинде 4 киноскоп бар. Бул киноскоптпордун гарантиялык мөөнөткө чыдап иштөө ыктымалдыгы, тиешелүү түрдө, 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Кокустан тандалып аланган киноскоптун гарантиялык мөөнөткө чыдап иштөө ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 0,875

27. Эки кутуда үналгы лампалары бар. Биринчи кутудагы 12 лампанын бирөө стандарттуу эмес, экинчи кутудагы 10 лампанын бирөө да стандарттуу эмес. Биринчи кутудан кокустан бир лампа алынып, экинчисине салынган. Экинчи кутудан кокустан алынган лампа стандарттуу эмес болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 13/132

28. Домино ойунунун толук 28 сөөгүнөн кокустан бир сөөк алынды. Экинчи алынган сөөктү, биринчисине жалгаштырып коюга мүмкүн болу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу:.7/18

29. Студент экзамендик билеттердин баарын толук билбейт. Кайсыл учурда билбеген билетти алуу ыктымалдыгы эң кичине болот:билетти биринчи болуп алгандабы же акыркы болуп алгандабы?

Жообу: Ыктымалдык эки учурда тең бирдей

30. 3 бирдей тетиктер бар кутуга дагы бир стандарттуу тетик кошушту да, андан кийин кайра бир тетикти көрбөй туруп алышты. Эгерде кутудагы баштапкы тетиктердин стандарттуулугу жөнүндөгү бардык божомолдор барабар ыктымалдыкта болушса, алынган тетиктин стандарттуу болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 0,625

31. Автоматтын иштеши нормалдык режимден өзгөргөндө С-I белги бергичи 0,8-ге барабар ыктымалдуулук менен, С-II белги бергичи I-ге барабар ыктымалдык менен белги берет. Автоматтын С-I же С-II белги бергичи менен жабдылыш ыктымалдыктары, тиешелүү түрдө, 0,6 жана 0,4. Автоматтын иштеши режимден өзгөрдү деген белги түштү. Кайсынысы ыктымалдуурак: автоматтын С-I белги бергичи менен жабдылышыбы же С-II белги бергичи менен жабдылышыбы?

Жообу: Автоматтын С-I белги бергичи менен жабдылыш ыктымалдыгы 6/11, ал эми С-II менен жабдылыш ыктымалдыгы 5/11

32. Студентердин спорттук тандап алуу мелдештерине катышыш үчүн, курстун I-группасынан-4, II- группасынан-6, III-группасынан-5 студент тандалып алынган. I, II жана III группалардын студенттеринин, институтун тандалма командасына алыныш ыктымалдыктары тиешелүү түрдө 0,9; 0,7 жана 0,8. Кокустан тандалып алынган студент, мелдештин жыйынтыгында тандалма командага алынды. Бул студенттин кайсыл группага тийиштүүлүгү ыктымалдуурак?

Жообу: I, II, III группанын студунттеринин тандалып алыныш ыктымалдыктары, тиешелүү түрдө 18/59, 21/59, 20/59.

33. Дүкөндөгү бир түрдүү товардын 60%и №1 фабрикадан, 25%и №2 фабрикадан, ал эми калган бөлүгү №3 фабрикадан келип түшкөн. №1 фабрикадан келген товардын 1%и, №2- 1,5%и жана №3- 2%и брак болору белгилүү. Сатып алынган бир товар брак болуп калды. Ал товар №1 фабрикадан келип түшүүш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P=0,2.

Ү ч ү н ч ү г л а в а

СЫНООЛОРДУ КАЙТАЛОО

§1 Бернуллинин формуласы

1-аныктама. Эгерде, бир нече сыноонун ар бириндеги A окуясынын аткарылыш ыктымалдыгы, калгандарынын натыйжаларына байланыштуу болбосо, анда ал сыноолор A окуясына карата көз каранды эмес деп аталат.

Ар биринде A окуясы турактуу p ыктымалдыкта аткарыла турган, көз каранды эмес n сыноо жүргүзүлсүн дейли. Анда, ар бир сыноодогу A окуясынын болбостугунун ыктымалдыгы $q=1-p$ болот.

Көз каранды эмес n сыноодо, A окуясы туура k жолу аткарылышынын жана n-k жолу аткарылбашынын ыктымалдыгын табу жөнүндөгү маселе коебуз. Бул жерде, A окуясы k жолу белгилүү бир тартипте аткарылышы талап кылынбайт.

Мисалы, A окуясы 4 сыноодон 3 жолу аткарылышы жөнүндө сөз болуп жатса, анда төмөндөгү таатал окуялардын: $AAA\overline{A}$; $AA\overline{A}A$; $A\overline{A}AA$; $\overline{A}AAA$ бири аткарылышы жетиштүү болот. Татаал окуя $AAA\overline{A}$ - биринчи, экинчи, үчүнчү сыноодо A аткарылгандыгын, ал эми төртүнчү сыноодо A аткарылбагандыгын, б.а. төртүнчү сыноодо, карам-каршы окуя $\overline{A}$ аткарылгандыгын түшүндүрөт; калган татаал окуяларды да ушул сыяктуу түшүнүүгө болот.

Изделип жаткан ыктымалдыкты $P_n(k)$ аркылуу белгилейбиз. Мисалы, $P_5(3)$ - окуя 5 сыноодон 3 жолу аткарылышын жана, ошондуктан, 2 жолу аткарылбашынын ыктымалдыгы болуп эсептелет. Коюлган маселени Бернуллинин формуласы аркылуу чечүүгө болот.

Бернуллинин формуласын чыгаруу. Көз каранды эмес n сыноодо A окуясы k жолу аткарылат жана n-k жолу аткарылбайт деген бир татаал окуянын ыктымалдыгы, көз каранды эмес окуяларды көбөйтүүнүн теоремасы боюнча, $P^k q^{n-k}$-га барабар. Мындай таатал окуялардын саны, n элементтерин k -дан топтоштуруунун саны канча болсо, ошончо, б.а. C_n^k болот. Бул таатал окуялар биригишпөөчү окуялар болгондуктан, андай окуяларды кошуунун теоремасы боюнча, изделип жаткан ыктымалдык бардык татаал окуялардын ыктымалдыктарынын суммасына барабар. Ал эми бардык татаал окуялардын ыктымалдыктары, бири бирине барабар болгондуктан $P_n(k)=C_n^k P^k q^{n-k}$ *же* $P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}P^k q^{n-k}$ болот.

Алынган формула Бернуллинин формуласы деп аталат.

1-мисал. Бир сутканын ичинде электр энергиясынын чыгымдалышы белгиленген нормадан ашпастыгынын ыктымалдыгы P=0,75. Жакынкы алты сутканын 4 суткасында, электр энергиясынын чыгымдалышы нормадан ашпастыгынын ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. 6 сутканын ар биринде электр энергиясынын чыгымдалышы нормадан ашпастыгынын ыктыамлдыгы p=0,75 болсо, нормадан ашып кетишинин ыктымалдыгы $q=1-p=1-0{,}75=$0,25 болот. Анда, изделип жаткан ыктымалдык, Бернуллинин формуласы боюнча

$$P_6(4)=C_n^k P^4 q^2 = C_6^2 P^4 q^2 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}0{,}75^4\cdot 0{,}25^2 = 0{,}3\,.$$

§2 Лапластын локалдык (жеке маанилүүлүк) теоремасы.

Жогоруда, n сыноодон окуя k жолу аткарылыш ыктымалдыгын аныктай турган Бернуллинин формуласы алынган. Аны чыгарууда биз ар бир сыноодогу окуянын ыктымалдыгы турактуу деп эсептедик. Бернуллинин формуласы, n жетишерлик чоң болгон учурда, пайдаланууга ыңгайсыз экендигин жеңил эле көрүүгө болот. Мисалы, эгер n=50, k=30, p=0,1 болсо, анда $P_{50}(30)=50!(0{,}1)^{30}\cdot(0{,}9)^{20}/30!\cdot 20!$. Мында, $50!=30414093\cdot 10^{53}$, $30!=26525\cdot 286\cdot 10^{25}$, $20!=24329020\cdot 10^{11}$ болгондуктан, эбегейсиз чоң сандар менен иштөөгө туура келет.

Демек, изделип жаткан ыктымалдыкты Бернуллинин формуласын колдонбой чыгарууга болобу деген суроо туулат. Бул суроого жоопту, n жетишерлик чоң болгон учурда колдонууга боло турган, Лапластын локалдык теоремасы берет. p=1/2 болгон жекече учурда Лапластын формуласын 1730- жылы Муавр тапкан;

1783- жылы Лаплас, Муаврдын формуласын ар кандай $0<p<1$ үчүн жалпылаган. Ошондуктан, биз сөз кылып жаткан теорема, кээде, Муавр-Лапластын теоремасы деп аталат.

Лапластын локалдык теоремасын далилдеш бир топ таатал, ошондуктан, аны далилдөөсүз келтиребиз да, ал пайдаланыла турган мисалдарды чыгарабыз.

1-теорема. Лапластын локалдык теоремасы. Эгерде, n сыноонун ар биринде A окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы p турактуу болсо, анда A туура k жолу аткарылышынын ыктымалдыгы, жакындаштырылган түрдө, $y=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ *функцисынын* $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ болгон маанисине барабар. $\varphi(x)$ функциясынын, x-тин 4-кө чейинки оң маанилерине тийиштүү, маанилеринин таблицасы бар (1-тиркемени кара) $\varphi(x)$ функциясы жуп болгондуктан $(\varphi(x)=\varphi(-x))$, x-тин терс маанилери үчүн ошол эле таблицадан пайдаланат. x-тин 4-төн чоң маанилеринде $\varphi(x)$ -тин маанилери нөлгө барабар.

Ошентип, A окуясынын n сыноодо k жолу аткарылыш ыктымалдыгы, жакындаштырылган түрдө

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

Бул формуланын тактыгы, n чоңойгон сайын чоңойгондуктан, ал асимптоталык формула деп аталат.

2-мисал. A окуясынын ар бир сыноодогу ыктымалдыгы $p=0,2$ болсо, анын 400 сыноодон туура 80 жолу аткарылыш ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Шарт боюнча $n=400$, $k=80$, $p=0,2$, $q=0,8$. Лапластын асимптоталык формуласы боюнча: $P_{400}(80)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}\varphi(x)=\frac{1}{8}\varphi(x)$.

x-тин маанисин табабыз. $x=\frac{80-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=\frac{0}{8}=0.$ 1 - тиркемедеги таблица боюнча $\varphi(0)=0,3989.$ Анда изделип жаткан ыктымалдык $P_{400}(80)=\frac{1}{8}0,3989=0,0498$.

Бернуллинин формуласы ушул эле жыйынтыкка алып келет (татаал болгондуктан эсептөөлөр келтирилген жок). $P_{400}(80)=0{,}0498$

<u>3-мисал.</u> Аткычтын бир атканда бутага тийгизүү ыктымалдыгы P = 0,75. ал 10 жолу атканда тура 8 жолу бутага тийгизиштин ыктымалдыгын тапкыла.

<u>Чыгаруу.</u>Шарт боюнча n=10, k=8, p=0,75, q=0,25. Ошондуктан, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{8-10\cdot 0{,}75}{\sqrt{10\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}\approx 0{,}36$ болот да, 1-тиркемедеги таблица боюнча $\varphi(x)=\varphi(0{,}36)=0{,}3739$. Демек, изделип жаткан ыктымалдык $P_{10}(8)=\frac{1}{\sqrt{10\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}\varphi(0{,}36)=0{,}273$

Бернуллинин формуласы боюнча $P_{10}(8)$=0,282. Жооптордун мындай айырмалынышы, бул мисалдагы n-дин мааниси кичине болгондугу менен түшүндүрүлөт (Лапластын формуласы n жетиштүү чоң болгон учурда гана жетиштүү жакындаштырылган маани берет).

§3 Лапластын интегралдык (көп маанилүүлүк) теоремасы

Кайрадан, n сыноосунун ар биринде A окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы туруктуу P санына (0<P<1) барабар деп эсептейбиз. A- нын n сыноодон k_1 ден кем эмес жана k_2 ден ашык эмес санда (кыскача, k_1 ден k_2 ге чейинки санда) аткарылыш ыктымалдыгын кантип табууга болот? Бул суроого Лапластын интегралдык теоремасы деп аталган төмөнкү теорема жооп берет (далилдөөсүз беребиз).

<u>2-теорема</u>. Эгерде ар бир сыноодогу A окуясынын ыктымалдыгы туруктуу P (0<P<1) болсо, анда n сыноодон A окуясы, k_1 ден k_2 ге чейинки санда аткарылыш ыктымалдыгы

$$P_{\text{n}}(k_1,\, k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x^2}e^{-Z^2/2}dz,\quad x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x_2=\frac{k_2-hp}{\sqrt{npq}} \tag{13}$$

болот.

$\int e^{-Z^2/2}dz$ интегралы элементардык функциялар аркылуу туюнтулбагандыктан, Лапластын интегралдык теоремасын колдонууда, атайын таблицадан пайдаланабыз. $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$

фукциясынын таблицасы китептин аягында келитирилген (2-тиркемени кара). Ал таблицада *Ф(х)* функциясынын маанилери оң x жана x=0 үчүн берилген; терс x үчүн (x<0) ошол эле таблицадан падаланышат *(Ф(х)*- так функция, б.а. *Ф(-х) = -Ф(х))* .

Таблицада функциянын маанилери $x \le 5$ үчүн берилген, себеби x>5 болсо, *Ф(х)*=0,5 деп алсак болот. *Ф(х)* функциясы Лапластын функциясы деп аталат. Лапластын функциясынын таблицасын пайдаланууга ыңгайлуу болуш үчүн (13) формуласын төмөндөгүдөй өзгөртөбүз: $P_n(k_1,k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{0} e^{-z^2/2}dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_2} e^{-z^2/2}dz = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ Ошентип, n сыноодо A окуясы k_1ден k_2ге чейинки санда аткарылыш ыктымалдыгы $P_n(\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ мында $Ф(х) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-z^2/2}dz$, $x_1 = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ *жана* $x_2 = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$ болот.

<u>4-мисал.</u> Тетик техникалык текшерүү бөлүмүнөн (ТТБ) өткөн жок, дегендин ыктымалдыгы P=0,2. Кокустан тандалып алынган 400 тетиктин ичинде, текшерилбеген тетиктердин саны 70-тен 100-гө чейин болуш ыктымалдыгын тапкыла.

<u>Чыгаруу.</u> Шарт боюнча n=400, k_1=70, k_2=100, p=0,2, q=0,8

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = 2,5$$

Анда,

$$P_{400}=(70;\ 100)=Ф(2,5)\text{-}Ф(-1,25)=Ф(2,5)+Ф(1,25)$$

2-тиркемедеги таблицаны колдонуп, *Ф*(2,5)=0,4938; *Ф*(1,25)=0,3944 болорун табабыз. Изделип жаткан ыктымалдык

$$P_{400}(70;\ 100)=0,4938+0,3944=0,8882$$ болот.

<u>1-эскертүү.</u> Ар бириндеги A окуясынын ыктымалдыгы турактуу P санына барабар болгон n сыноодо, ал окуя m жолу аткарылсын. Эгерде

$k_1 \le m \le k_2$ *болсо, анда* $(m - np)/\sqrt{npq}$ бөлчөгү $(k_1 - np)/\sqrt{npq} = x_1 -$ *ден* $(k_2 - np)/\sqrt{npq} = x_2 -$ге чейин өзгөрөт. Демек, Лапластын интегралдык теормасын

$P(x_1 \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le x_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2}dz$ түрүндө жазууга болот.

Бул формула кийинки параграфда колдонулат.

§4 Көз каранды эмес сыноолордогу салыштырма жыштыктын, туруктуу ыктымалдыктан айырмалашынын ыктымалдыгы.

Дагы эле, көз каранды эмес n сыноонун ар биринде, A окуясынын ыктымалдыгы туруктуу P санына (0<P<1) барабар, деп эсептейбиз. m/n салыштырма жыштыктын туруктуу P ыктымалдыгынан айырмасы, абсалюттук чоңдугу боюнча берилген кичине ε>0 санынан ашпастыгынын ыктымалдыгын табалы. Башкача айтканда,

$$\left|\frac{m}{n}-P\right|\le\varepsilon \qquad (14)$$

барабарсыздыгынын ыктымаылдыгын табалы. Бул ыктымалодыкты

$P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|\le\varepsilon\right)$ түрүндө белгилейбиз. (14) барабарсыздыгын ага тең күчтөгү $-\varepsilon\le\frac{m}{n}-P\le\varepsilon$ барабарсыздыктары менен алмаштырабыз.

Бул кош барабарсыздыкты $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ оң санына көбөйтүп, ага тең күчтөгү $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ барабарсыздыктарын алабыз.

Лапластын интегралдык теоремасын 1-эскертүүдө (§3 кара) көрсөтүлгөн түрдө пайдаланабыз. $x_1=-\varepsilon\sqrt{n/pq}$ *жана* $x_2=\varepsilon\sqrt{n/pq}$ деп алсак $P(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{npq}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{n/pq}}^{2\sqrt{n/pq}}e^{-z^2/2}dz=2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/pq})$ болот.

Эми, кашанын ичиндеги барабарсыздыктарды, тең күчтөгү баштапкы барабарсыздыктар менен алмаштырсак $P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|\le\varepsilon\right)\approx2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/pq})$ келип чыгат.

Ошентип, $|m/n-P|\le\varepsilon$ барабарсыздыгынын аткарылуу ыктымалдыгы, жакындаштырылган түрдө, Лапластын функциясынын $x=\varepsilon\sqrt{n/pq}$ болгондогу эки эселенген маанисине барабар.

5-мисал. Тетиктин стандарттуу эместигинин ыктымалдыгы P=0,1. Кокустан тандалып алынган 400 тетиктен, стандарттуу эмес тетик чыгыштын салыштырма жыштыгы, P=0,1 ыктымалдыгынан, абсолюттук чоңдугу боюнча, 0,03-төн ашык эмес айырмаланышынын ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Шарт боюнча n=400, p=0,1; q=0,9; ε=0,03. $P(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le 0{,}03)$ ыктымалдыгын табуу талап кылыпат. $P(|m/n-P|\le\varepsilon)\approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/pq})$ формуласын пайдаланып $P(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le 0{,}03)\approx 2\Phi(0{,}03\sqrt{400/0{,}1\cdot 0{,}9})=2\Phi(2)$ болорун табабыз.

2-тикемедеги таблицадан Φ(2)=0,4772 экиндигин таап, изделип жаткан ыктымалдык 0,9544 болорун эсептеп чыгабыз.

6-мисал. Тетиктин стандарттуу эместигинин ыктымалдыгы P=0,1. Тандалып алынган тетиктерден стандарттуу эмес тетиктер чыгышынын салыштырма жыштыгы, турактуу P=0,1 ыктымалдыгынан, абсолюттук чоңдугу боюнча, 0,03-төн чоң эмес санга айырмаланат деп, 0,9544-кө барабар ыктымалдыкта айтууга мүмкүн болуш үчүн канча тетик тандап алынышы керек?

Чыгаруу. Шарт боюнча P_1=0,1; q=0,9; ε=0,03 $P(\left|\frac{m}{n}-0{,}1\right|\le 0{,}03)\le 0{,}9544$. n-ди табу талап кылынат. $P(\left|\frac{m}{n}-P\right|\le\varepsilon)\approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$ формуласын пайдаланабыз. Шарт боюнча

$$2\Phi(0{,}03\sqrt{n/0{,}1\cdot 0{,}9})=0{,}9544 \quad \text{же} \quad \Phi(0{,}1\sqrt{n})=0{,}4772$$

2-тиркемедеги таблица боюнча $0{,}1\sqrt{n}=2$. Мындан n=400 келип чыгат.

Алынган жыйынтыктын мааниси мындай: эгерде, ар биринде 400 тетик тандалып алына турган, жетишерлик көп сандагы сыноо жүргүзсөк, анда бул сыноолордун болжол менен 95,44%-инде стандарттуу эмес тетик чыгуунун салыштырма жыштыгынын, турактуу P=0,1 ыктымалдыктан айырмасы, абсолюттук чоңдугу боюнча, 0,03-төн чоң эмес болот, б.а. салыштырма жыштык

0,07- ден (0,1 - 0,03 = 0,07) 0,03- кө (0,1+ 0,03 = 0,13) чейинки чектерде камалган болот. Бул, сыноолордун 95,44%-инде стандарттуу эмес тетиктердин саны 28 ден (400- дүн 7%и) 52ге (400- дүн 13%и) чейин болот дегенди түшүндүрөт. Эгерде, 400 тетиктен турган бир гана сыноо жүргүзсөк, анда бул сыноодогу стандарттуу эмес тетиктердин саны 28-ден аз эмес жана 52-ден көп эмес деп, чоң ишеним менен айтсак болот. Стандарттуу тетиктеридин саны 28-ден аз, 52-ден көп болуп калышы, эң аз ыктымалдыкта болсо дагы, мүмкүн.

МАСЕЛЕЛЕР

1. Цехтеги 6 мотордун ар биринин убакыттын берилген учурунда иштеп жатыш ыктымалдыгы 0,8-ге барабар. Берилген учурда: а) 4 мотор иштеп жатышынын; б) бардык моторлор иштебей турушунун ыктымалдыктарын тапкыла.

Жообу: а) $P_6(4)=0,246$; б) $P_6(0)=0,000064$

2. Эгерде ар бир сыноодогу A ыктымалдыгы 0,3 болсо, 5 көз каранды эмес сыноодо A экиден кем эмес жолу аткарылышынын ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: $P=1-[P_5(0)+P_5(1)]=0,472$

3. Эгерде, A окуясы экиден кем эмес жолу аткарылса, B окуясы аткарылат. A-нын ар бир сыноодогу ыктымалдыгы 0,4 барабар болсо, 6 көз каранды эмес сыноодо B-нын аткарылуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: $P=1-[P_6(0)+P_6(1)]=0,767$

4. A окуясынын ар бир сыноодогу аткарылуу ыктымалдыгы 0,1ге барабар болгон, көз каранды эмес 8 сыноо жүргүзүлгөн. Aнын жок дегенде эки жолу аткарылыш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: $P=1-[P_8(0)+P_8(1)]=0,19$

5. Тыйын алты жолу ташталганда: а)экиден аз жолу; б)экиден кем эмес жолу; герб түшүштүн ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: $P=P_6(0)+P_6(1)]=7/64$; б)$P=1-[P_6(0)+P_6(1)]=57/64$

6. Мылтыктан бир жолу атканда бутага тийүү ыктымалдыгы $P=0,9$. k жолу ($k>1$) тийгенде бутанын талкалануу ыктымалдыгы $1-q^k$. Эки жолу атканда бутанын талкаланыш ыктымалдыгын тапкыла.

Көрсөтмө. Бернуллинин жана толук ыктымалдыктын формуласын пайдаланыш керек.

Жообу: 0,9639

7. Эгер ар бир сыноодо окуянын ыктымалдыгы 0,2 болсо, 400 сыноодон окуя тура 104 жолу аткарылыш ыктымалдгын жакындаштырып тапкыла.

Жообу: $P_{400}(104)=0{,}0006$

8. Аткычтын бир атканда бутага тийгизүү ыктымалдыгы 0,75. 100 жолу атканда бута: а) 70-тен кем эмес жана 80-ден көп эмес жолу; б) 70-тен көп эмес жолу; тийгизүү ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: а) $P_{100}=(70;\ 80)=2\Phi(1{,}15)=0{,}7498$; б) $P_{100}=(0;\ 70)=0{,}1251$

9. 10000 көз каранды эмес сыноонун ар бириндеги окуянын аткарылуу ыктымалдыгы $P=0{,}75$. Окуянын салыштырма жыштыгы анын ыктымалдыгынан, абсолюттук чоңдугу боюнча, 0,001 чоң эмес айырмаланыш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: $P=2\Phi(0{,}23)=0{,}182$

10. Көз каранды эмес ар бир сыноодо окуянын аткарылуу ыктымалдыгы 0,2-ге барабар. 5000 сыноодогу окуянын салыштырма жыштыгы, анын ыктымалдыгынан айырмалануу ыктымалдыгы 0,9128 болсо, ал айырманын чоңдугун кандай деп күтүүгө болот?

Жообу: $\varepsilon=0{,}00967$

11. Тыйынды таштаганда, герб түшүүнүн салыштырма жыштыгы, анын $P=0{,}5$ ыктымалдыгынан, абсолюттук чоңдугу боюнча 0,01-ден чоң эмес айырмаланыш үчүн, тыйынды канча жолу ташташ керек?

Жообу: $n=1764$

Т ө р т ү н ч ү   г л а в а

КОКУС ЧОҢДУКТАР

§1 Кокус чоңдуктардын аныктамасы

Буга чейинки главаларда, тигил же бул сандын келип чыгышын түшүндүргөн окуялар каралган. Мисалы, кумар ойноочу сөөкчөнү таштаганда 1,2,3,4,5 жана 6 деген сандар чыгышы мүмкүн. Бул сандардын кайсынысы алдын ала чыгарын билүүгө болбойт, анткени ага эң көп сандагы кокус себептер таасир этет жана алардын таасирин толук эсепке алууга мүмкүн эмес.

1-мисал. Белгилүү бир сабака катышып жаткан студенттеридин саны, кокус чоңдук болот. Эгерде группада 25 студент болсо, бул кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери: 0; 1; 2; 3, ….25.

2-мисал. Замбиректен атылган снаряд учуп өтүүчү аралык кокус чоңдук болот. Чындыгында, ал аралыка көп себептер (кароолдун коюлушу, шамалдын күчү, багыты, температура ж.б.) таасир этет. Алардын таасирин толук эсепке алуу мүмүкүн эмес. Бул чоңдуктун мүмүкүн болгон маанилери кандайдыр бир (a, b) интервалында жатат. Кокус чоңдуктар X, Y, Z ..... чоң тамгалары менен, ал эми алардын мүмкүн болгон маанилери, тиешелүү түрдө, x, y, z …. кичине тамгалары менен белгиленет. Мисалы, X чоңдугунун үч мүмкүн болгон мааниси болсо, алар x_1, x_2, x_3 аркылуу белгиленет.

Жогоруда келтирилген биринчи мисалдагы кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери 1; 2; 3, ….25 бири биринен обочо жайланышкан жекече маанилер болуп эсептелет. Ал эми экинчи мисалда болсо, кокус чоңдук (a, b) интервалындагы бардык анык мааниге ээ болушу мүмкүн. Бул учурда, кокус чоңдуктун удаалаш эки мааниси бири биринен обочолонбойт. Кокус чоңдуктарды мүмкүн болгон маанилерине карап эки түргө бөлүүгө болот.

2-аныктама. Бири биринен обочолонгон жекече маанилерге, белгилүү бир ыктымалдыкта, ээ болуучу кокус чоңдук дискреттүү (үзгүлтүктүү) чоңдук деп аталат.

Биринчи мисалдагы X чоңдугу- үзгүлтүктүү кокус чоңдук болот. Үзгүлтүктүү кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилеринин саны чексиз болушу да мүмкүн.

3-аныктама. Мүмкүн болгон маанилеринин көптүгү кандайдыр бир чектүү же чексиз интервалды түзгөн кокус чоңдук, үзгүлтүксүз кокус чондук деп аталат.

Экинчи мисалдагы $У$ чоңдугу үзгүлтүксүз кокус чоңдук. Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилеринин саны дайыма чексиз болору түшүнүктүү.

§2 Үзгүлтүктүү кокус чоңдуктун ыктымалдыктарынын бөлүштүрүү закондору.

Бир караганда дискреттүү чоңдуктун бардык мүмкүн болгон маанилери берилсе, ал чоңдукту белгилүү деп айтууга жетиштүүдөй сезилет. Чындыгында андай эмес. Кокус чоңдуктардын маанилери бирдей, бирок алардын ыктымалдыктары ар түрдүү да болушу мүмкүн. Ошондуктан, үзгүлтүктүү кокус чоңдукту толук белгилүү деш үчүн, анын мүмкүн болгон маанилери менен катар, алардын тиешелүү ыктымалдыктары да белгилүү болуш керек.

4-аныктама. Үзгүлтүктүү кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери жана алардын тиешелүү ыктымалдыктары, ал чоңдуктун ыктымалдыктарынын бөлүштүрүү закону деп аталат.

Бөлүштүрүү закону: а) таблица түрүндө;

б) график түрүндө;

в) аналитикалык түрдө (формула түрүндө)

берилиши мүмкүн. Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү закону таблица түрүндө төмөндөгүдөй берилет:

$$\begin{array}{ll} X & x_1, x_2, \ldots, x_n \\ P & p_1, p_2, \ldots, p_n \end{array}$$

Кокус чоңдуктун бир сыноодо бир гана мүмкүн болгон мааниге ээ болорун эске алсак, анда $X=x_1$, $X=x_2$, ….$X=x_n$ окуялары ($X=x_i$ окуясы–X кокус чоңдугу x_i маанисине ээ болот деген окуя) толук группа түзөрү түшүнүктүү. Ошондуктан, $P_1+P_2+\ldots.+P_n=1$.

Эгерде X–тин мүмкүн болгон маанилери чексиз болсо, анда $P_1+P_2+\ldots.+P_n+\ldots..$ сан катары жыйналуучу болот жана анын суммасы бирге барабар.

3-мисал. Тыйын үч жолу ташталган. Үзгүлтүктүү X кокус чоңдугу-«герб» түшүүнүн саны болсо, анын бөлүштүрүү законун тапкыла.

Чыгаруу. X-тин мүмкүн болгон маанилери: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$. Бул маанилердин ыктымалдыктары

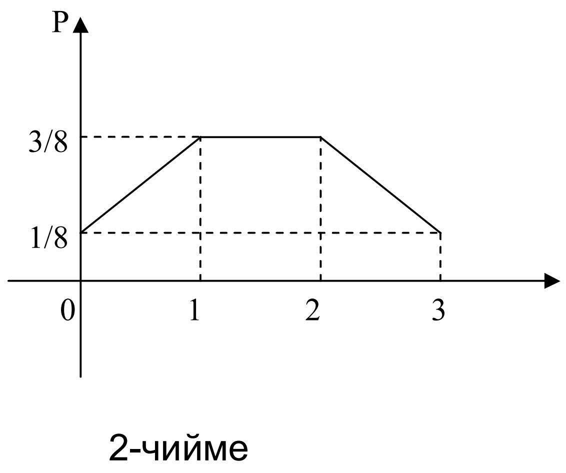
$$P_1=\left(\frac{1}{2}\right)^3, P_2=3\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}, P_3=C_3^2pg^2=\frac{3}{8}, P_4=\frac{1}{8}$$

Анда, X-тин бүлүштүрүү закону

$$\begin{cases} X & 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ P & \frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8} \end{cases}$$

Текшерүү: $P_1+P_2+P_3+P_4=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$

Үзгүлтүктүү кокус чоңдуктун бөлүштүрүү законун график түрүндө бериш үчүн, тик бурчтуу координата системасында (x_i; p_i) чекиттерин таап, аларды кесиндилер менен удаалаш туташтырып коюш керек. Пайда болгон фигура бөлүштүрүү көп бурчтугу деп аталат. Үчүнчү мисалдагы кокус чоңдуктун бөлүштүүрүү көп бурчтугу 2-чиймеде көрсөтүлгөн.



2-чийме

Бөлүштүрүү закондун аналитикалык берилиши формулардын түрүнө жараша ар түрдүү болот. Алардын ичинен биз:

1) Биномдук,
2) Пауссондук,
3)Геометриялык бөлүштүрүү-лөрдү карайбыз.

Булардын ар бирине токтололу.

1. Биномдук бөлүштүрүү. Ар бир сыноодо A окуясы белгилүү бир p туруктуу ыктымалдыгы менен чыга турган (q=1-p ыктымалдыгы

менен чыкпай турган) көз каранды эмес n сыноо жүргүзүлсүн. Бул n сыноодо А окуясынын чыгуу санын X үзгүлтүктүү кокус чоңдугу деп эсептеп, анын бөлүштүрүш законун табалы. n сыноодо A окуясы такыр чыкпашы, бир жолу, эки жолу, ж.б. n жолу чыгышы мүмкүн. Демек, Х-тин мүмкүн болгон маанилери $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, …. $x_n=n$. Бул окуялардын ыктымалдыктарын табыш үчүн Бернуллинин

$$P_n(K) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (15)$$

формуласын пайдаланабыз, мында $k=0$; 1; 2; …..n. (15) формуласы изделип жаткан закондун аналитикалык берилиши болот.

<u>5-аныктама</u>. Ыктымалдыктары Бернуллинин формуласы менен аныкталуучу бөлүштүрүү, биномдук бөлүштүрүү деп аталат.

(15) формуласынын оң жагын Ньютондун

$$(p+q)^n = C_n^n P^n q^0 + C_n^{n-1} P^{n-1} q + ... + C_n^n P^k q^{n-k} + ... + C_n^0 P^0 q^n$$

биномунун жалпы мүчөсү катары кароого болгондуктан, бул закон биномдук бөлүштүрүү деп аталганы түшүнүктүү. Биномдук бөлүштүрүүнү таблица түрүндө төмөндөгүдөй

$$\begin{array}{llllll} X & n & n\text{-}1 \ldots\ldots\ldots\ldots & k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ P & p^n & np^{n-1}q \ldots\ldots & C_n^k p^k q^{n-k} \ldots\ldots & .q^n \end{array}$$

жазсак болот.

3-мисалда табылган бөлүштүрүү биномдук бөлүштүрүү болору түшүнүктүү.

2. <u>Пауссондун бөлүштүрүүсү</u>. Жогорудагыдай эле ар бир сыноодо A окуясы P ыктымалдыгы менен чыга турган көз каранды эмес n сыноо жүргүзүлсүн. A-нын k жолу чыгуу ыктымалдыгы Бернуллинин $P_n(k) = \dfrac{n(n-1)(n-2)....(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot k} P^k (1-p)^{n-k}$ формуласы боюнча аныкталаарын билебиз. Эгерде n чоңойгон сайын, p кичирейип $n \cdot p = \lambda$ дайыма турактуу сан болсо, б.а. сыноолордун ар түрдүү серияларында, окуянын чыгуусунун орточо саны, n-дин ар түрдүү маанилеринде өзгөрбөстөн кала берсе, Бернуллинин формуласын $P_n(k) = \dfrac{n(n-1)(n-2)....(n-(k-1))}{k!} \left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$ түрдө жаза алабыз, мында $P = \dfrac{\lambda}{n}$. Эгер n өтө чоң сан болсо $P_n(k)$-ны жакындаштырган түрдө $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k)$ менен алмаштырсак

$$P_n(k) \approx \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)....(n-(k-1))}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda}{k!}e^{-\lambda}$$

$$P(k) = \frac{\lambda}{\kappa!}e^{-\lambda} \qquad (16)$$

болот.

(16) формуласы Пауссондун формуласы деп аталат. k жана λ белгилүү болсо, $P_n(k)$ны аныктай турган таблицалар бар.

6-аныктама. Ыктымалдыктары Пауссондун формуласы менен аныкталуучу бөлүштүрүү Пауссондун бөлүштүрүүсү деп аталат.

4-мисал. Завод базага 5000 сапаттуу буюм жиберди. Жолдон буюмдун бузулуп калу ыктымалдыгы 0,0002. Базага 3 жараксыз буюм келиштин ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Шарт боюнча n=5000, P=0,0002, k=3. Анда $\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$. (16) формуласы боюнча изделип жаткан ыктымалдык, жакындаштырылган түрдө

$$P_{5000}(3) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06$$ болот.

3. Геометриялык бөлүштүрүү. Ар бир сыноодо A окуясынын чыгуу ыктымалдыгы p болгон, көз каранды эмес сыноолор жүргүзүлсүн. A окуясы чыкса эле сыноо токтотулат. Анда, эгер A окуясы k-нчы сыноодо чыкса, андан мурдакы (k-1) сыноодо ал чыкпаган болот.

X аркылуу, A окуясы биринчи жолу чыкканга чейинки окуялардын санын түшүндүргөн, үзгүлтүктүү кокус чоңдукту белгилейбиз. Анда, анын мүмкүн болгон маанилери x_1=1, x_2=2, … натуралдык сандар болору түшүнүктүү. A окуясы k-нчы сыноодо биринчи жолу аткарылсын. Көз каранды эмес окуялардын ыктымалдыктарын кошуу теоремасы боюнча

$$P(X = k) = q^{k-1}p \qquad (17)$$

(17) формуласын ар түрдүү k үчүн жазып, биринчи мүчөсү p жана бөлүмү q болгон геометриялык прогрессияны алабыз:

$$p,\ pq,\ pq^2, ... pq^{k-1}, ... \qquad (18)$$

Ошондуктан, (17) бөлүштүрүүсү геометриялык бөлүштүрүү деп аталат. (18) катары жыйналуучу катар болору жана анын суммасы бирге барабар экендиги түшүнүктүү. Чындыгында эле $\frac{P}{1-q}=\frac{P}{P}=1.$

5-мисал. Мылтыктан, бутага биринчи жолу тийгенге чейин, ок атылды. Ар бир атылган октун бутага тийүү ыктымалдыгы p=0,6 «Ок бутага үчүнчү жолу атылганда тийет» деген окуянын ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Шарт боюнча p=0,6; q=0,4; k=3 богондуктан, (17) формуласы боюнча, изделип жаткан ыктымалдык

$$p=q^{k-1}p=0{,}4^2\cdot 0{,}6=0{,}096.$$

§3 Окуянын жөнөкөй агымы

Убакыттын кокустан алынган учурларында болуучу окуяларды карайлы.

7-аныктама. Убакыттын кокустан алынган учурларында болуучу окуялардын удаалаштыгы окуялардын жөнөкөй агымы деп, аталат.

Жөнөкөй агымдын мисалдары: медициналык тез жардам берүүчү пунктка келип түшкөн телефондук чакыруулар; самолеттордун аэропортко келип конуулары; тейлөө ишканалырана келген адамдар; элементтердин иштен чыгуу удаалаштыктары жана башкалар боло алат.

Жөнөкөй агымдын касиеттеринин ичинин негизги үчөөнү көрсөтөбүз.

1. Узактыгы t болгон убакытта k окуяын аткарылыш ыктымалдыгы t менен k- га гана көз каранды функция болот да, ал t убактысынын башталыш учуруна көз каранды эмес. Мында, убакыттын аралыктары өз ара кесилишпейт деп эсептелет. Мисалы, убакыттын узактыгы 6-га барабар: (3;9), (12;18), (T,T+6) аралыктарында окуялардын аткарылуу ыктымалдыктары өз ара барабар. Бул касиет агымдын стационардык (турактуулук) касиети деп аталат.
2. Убакыттын өз ара кесилишпеген аралыктарында тигил же бул сандагы окуялардын аткарылышы, бири-бирине көз каранды эмес, б.а. убакыттын белгилүү бир аралыгында окуялардын

аткарылуу ыктымалдыктары, убакыттын андан мурдакы аралыгында окуялардын аткарылгандыгына же аткарылбагандыгына көз каранды эмес. Муну башкача сөз менен: убакыттын ар кандай аралыгында k окуянын аткарылыш шарттуу ыктымалдыктары (каралып жаткан убакыт аралыгынын башталышына чейинки убакытта, окуялардын аткарылышы тууралуу каалагандай шарттагы), алардын шартсыз ыктымалдыктарына барабар деп түшүндүрсөк болот.

Бул касиет агымдын соңку таасир жоктук касиети болот.

3. Агымдын жекечелүүлүк касиети. Бул касиет боюнча убакыттын эң кыска аралыгында бир гана окуя аткарылышы мүмкүн, б.а.убакыттын эң кыска аралыгында бирден көп окуя аткарылат дегендин ыктымалдыгы, бир гана окуя аткарылат дегендин ыктымалдыгына караганда, өтө кичине.

Ушул үч касиетке ээ болгон агым жөнөкөй агым (Пуассондун агымы) деп аталат.

<u>1-эскертүү.</u> Иш жүзүндө, көпчүлүк учурда, агым айтылган касиеттерге ээ болорун же болбостугун текшериш кыйын. Ошондуктан, агымдын жөнөкөй же ага жакын болушунун башка шарттары табылган. Мисалы, эгерде агым, ар биринин бардык суммага тийгизген таасири өтө кичине болгон, эң көп сандагы агымдардын суммасы болуп эсептелсе, анда ал агым жөнөкөй агымга жакын болот.

<u>8-аныктама.</u> Убакыттын бир бирдигинин ичинде аткарылуучу окуялардын орточо саны λ агымдын ургаалдуулугу (тездиги, интенсивдүүлүгү) деп аталат.

Эгерде агымдын ургаалдуулугу λ белгилүү болсо, анда убакыттын узундугу t болгон аралыгында, жөнөкөй агымдын k окуясынын аткарылыш ыктымалдыгы Пуассондун

$$P_t(k) = (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t} / k!$$

формуласы боюнча аныкталарын далидөөгө болот. Бул формула жөнөкөй агымдын бардык касиеттерин чагылдырат. Чындыгында эле, t убакыттын ичинде k окуянын аткарылыш ыктымалдыгы k жана t-дан функция экендиги (ургаалдуулук берилсе), формуладан көрүнүп турат. Бул болсо, агым стационардык касиетке ээ экендигин түшүндүрөт.

Формулада, убакыттын каралып жаткан аралыгынан мурдакы учурда, окуянын аткарылышы жөнүндөгү түшүнүк пайдаланылбайт. Бул, агымдын учурдан кийинки убакка таасир жоктук касиетин түшүндүрөт.

Эми бул формула агымдын жекечелүүлүк касиетин да чагылдыраарын көрсөтөбүз. k=o, k=1 деп алып, бир дагы окуя аткарылбастыктын жана бир гана окуя аткарылыштын ыктымалдыктарын табабыз:

$$P_t(0) = e^{-\lambda t}, \qquad P_t(1) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Анда, бирден көп окуя аткарылыш ыктымалдыгы

$$P_t(k>1) = 1 - [P_t(0) + P_t(1)] = 1 - [e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}]$$ болот.

$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \ldots$ -ажыратылышын эске алып жана жөнөкөй өзгөртүүлөрдү жүргүзүп $P_t(k>1) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \ldots$ барабардыгын алабыз. $P_t(1)$ жана $P_t(k>1)$ыктымалдыктарын салыштырып t эң кичине болгондо $P_t(k>1)$ ыктымалдыгы $P_t(1)$ ыктымалдыгына караганда, өтө кичине экендигин көрөбүз. Демек, агым жекечелүүлүк касиетке ээ. Ошентип, Пуассондун формуласын жөнөкөй агымдын математикалык модели катары кароого болот.

<u>6-мисал</u>. АТС-ке бир минутада келип түшүүчү чакырыктардын орточо саны экиге барабар. 5 минутада: а) 2 чакырык; б) экиден аз чакырык; в) экиден кем эмес чакырык келип түшүштүн ыктымалдыктарын тапкыла. Чакырыктардын агымдары жөнөкөй деп болжолдонот.

<u>Чыгаруу.</u> Шарт боюнча $\lambda = 2,\ t = 5,\ k = 2$ Пуассондун $P_t(k) = (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t} / k!$ формуласын пайдаланабыз.

а) 5 минутада 2 чакырык түшүү ыктымалдыгы $P_5(2) = 10^2 e^{-10} / 2! = 100 \cdot 0{,}000045 / 2 = 0{,}0025$ Бул окуя иш жүзүндө аткарылбайт.

б) «Бир чакырык түштү», «бир да чакырык түшкөн жок» деген окуялар бирикпейт. Кошуунун теормемасы боюнча

$$P_5(k<2) = P_5(0) + P_5(1) = e^{-10} + 10e^{-10} / 1! = 0{,}000495$$

Бул окуя да иш жүзүндө аткарылбайт.

в) «Экиден кем чакырык түштү», «экиден кем эмес чакырык түштү» деген окуялар карама-каршы. Анда,

$$P_5(k \geq 2) = 1 - P_5(k < 2) = 1 - 0{,}000495 = 0{,}999505$$

Бул окуя иш жүзүндө шексиз окуя болот.

МАСЕЛЕЛЕР.

1. Эгерде ар бир сыноодо A окуясынын ыктымалдыгы P=0,7 болсо, көз каранды эмес үч сыноодо, A окуясынын аткарылыш санынын бөлүштүрүү законун тапкыла.

Жообу:

x	0	1	2	3
P	0,027	0,189	0,441	0,343

2. Кокус чоңдуктун мүмкүн болуучу маанилери $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=8$. Биринчи эки маанинин ыктымалдыктары $P_1=0{,}6$, $P_2=0{,}2$. x_3 түн ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P_3=0,2

3. Кумар ойноочу сөөк үч жолу ташталган. 6 упай чыгыштын бөлүштүрүү законун жазгыла.

Жообу:

x	3	2	1	0
P	1/216	15/216	75/216	125/216

4. Эгерде бир беттеги кол жазмада жок дегенде бир ката болу ыктымалдыгы 0,95 болсо, анда ал беттеги каталардын орточо санын тапкыла. Каталардын саны Пуассондун закону боюнча бөлүштүрүлгөн деп болжолдонот.

   Көрсөтмө. $e^{-\lambda} = 0{,}05$ теңдемесинен λ-ны табуу керек.

Жообу: 3

5. Фабрикадагы жип ийрүүчү аял 1000 ийикти тейлейт. Бир минутанын ичинде бир ийиктеги жиптин үзүлүү ыктымалдыгы 0,004. Бир минуттун ичинде 5 ийиктеги жип үзүлөрүнүн ыктымалыгын тапкыла.

Жообу: $P_{1000}(5)$=0,1562

6. Машинка менен жазылган 1000 барактуу кол жазмада 1000 ката бар. Кокустан алынган баракта: а) жок дегенде бир ката; б) туура 2 ката; в) экиден кем эмес ката; болу ыктымалдыктарын тапкыла. Каталардын саны Пуассондун закону боюнча бөлүштүрүлгөн деп болжолдонот.

Жообу: а) $P=1-e^{-1} = 0{,}6321$ б) $P_{1000}(2)=0{,}18395$ в) P=0,2642

7. Мекеменин коммутатору 100 абонентти тейлейт. Бир мүнөттүн ичинде абоненттин коммутаторго телефон чалуу ыктымалдыгы

0,02 барабар. 1 мүнөттүн ичинде 3 абонент телефон чалат деген окуя менен 4 абонент телефон чалат деген окуянын кайсынысы ыктымалдуурак.

Жообу: $P_{100}(3)=0{,}18$, $P_{100}(4)=0{,}09$

8. 1 мүнөттүн ичинде АТСке келип түшкөн чакыруулардын орточо саны 5-ке барабар. Эки мүнөттүн ичинде: а) эки чакыруу; б) экиден аз чакыруу; в) экиден кем эмес чакыруу; келип түшөөрүнүн ыктымалдыктарын тапкыла.

Көрсөтмө. $e^{-10}=0{,}000045$

Жообу: а) 0,00225 б) 0,000495 в) 0,999505

9. Кумар ойноочу сөөкчө, 6 упай бир жолу чыккыча ташталган. Сөөкчө экинчи ташталганда, 6 упай биринчи жолу чыгаарынын ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: $P(X=2)=5/36$

10. 12 тетиктен турган топто 8 стандарттуу тетик бар. Кокустан алынган 3 тетиктин стандарттуу болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: $P(X=3)=14/33$

Б е ш и н ч и   г л а в а

ҮЗГҮЛТҮКТҮҮ КОКУС ЧОҢДУКТАРДЫН САНДЫК МҮНӨЗДӨМӨЛӨРҮ

§1 Үзгүлтүктүү кокус чоңдуктардын математикалык күтүүсү.

1. Математикалык күтүүнүн аныктамасы.

Биринчи главада биз үзгүлтүктүү кокус чоңдуктун бөлүштүрүү закону аны толук мүнөздөрүн билдик. Бирок көпчүлүк учурда бөлүштүрүү закону белгисиз болуп, ал чоңдук жөнүндөгү азыраак түшүнүктөр менен чектелүүгө тура келет.

Кээде кайра, кокус чоңдукту жалпы түрдө мүнөздөчү сандарды билүү ыңгайлуу. Мындай сандар кокус чоңдуктун сандык мүнөздөмөлөрү деп аталат. Кокус чоңдуктун сандык мүнөздөмөлөрү болуп математикалык күтүү, дисперсия, квадраттык орто кыйшайуу(четтөө) жана теориялык моменттер эсептелет. Бул параграфта математикалык күтүүнү карайбыз.

Математикалык күтүү, жакындаштырылган түрдө, кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилеринин орто маанисине барабар экендигин кийинчерээк көрсөтөбүз. Көптөгөн маселелерди чыгырыш үчүн математикалык күтүүнү билүү жетиштүү. Мисалы, эгерде эки аткычтын биринин, бута атканда топтоочу упайынын математикалык күтүүсү, экинчисиникине караганда чоң болсо, анда ал орто эсеп менен экинчисиникине караганда жакшы аткан болот.

<u>1-аныктама</u>. Үзгүлтүктүү кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери менен алардын тиешелүү ыктымалдыктарынын көбөйтүндүлөрүнүн суммасы, кокус чоңдуктун математикалык күтүүсү деп аталат.

X кокус чоңдугунун бөлүштүрүлүш закону

X	x_1	x_2	....	x_n
P	p_1	p_2	....	p_n

болсо, анда анын математикалык күтүүсү $M(x)$, аныктама боюнча,

$$M(x)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$$

болот.

Эгерде X мүмкүн болгон маанилери саналуучу көптүк болсо,

анда $$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \ .$$

Барабардыктын оң жагындагы катар абсолюттук түрдө жыйналса, анда $M(X)$ аныкталат (бар болот).

Аныктамадан, дискреттүү кокус чоңдуктун математикалык күтүүсү кокус чоңдук эмес, турактуу сан болору көрүнүп турат. Бул мындан ары көп колдонулат.

1-мисал. Бөлүштүрүү закону

X	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

болгон X дискреттүү кокус чоңдугунун математикалык күтүүсүн тапкыла.

Чыгаруу. Аныктама боюнча, изделип жаткан математикалык күтүү $M(X)=3\cdot0,1+5\cdot0,6+2\cdot0,3=3,9$.

2-мисал. A окуясынын ыктымалдыгы P болсо, анын бир сыноодогу аткарылуу санынын математикалык күтүүсүн тапкыла.

Чыгаруу. A окуясынын бир сыноодо чыгуу саны болгон X кокус чоңдугунун мүмкүн болгон маанилери экөө гана: ыктымалдыгы P болгон $x_1=1$ (A-чыкты) жана ыктымалдыгы $g=1-P$ болгон $x_2=0$ (A-чыккан жок). Изделип жаткан математикалык күтүү $M(X)=1\cdot P+0\cdot(1-P)=P$

Ошентип, окуянын бир сыноодогу чыгуу санынын математикалык күтүүсү, ал окуянын ыктымалдыгына барабар. Бул жыйынтык мындан ары колдонулат.

2. Математикалык күтүүнүн ыктымалдык мааниси.

X кокус чоңдугу n сыноодо m_1 жолу x_1, m_2 жолу x_2 ,...., m_k жолу x_k маанилерине ээ болсун. Мында, $n = x_1+ x_2+......+ x_k$.

Ошондуктан, X ээ болгон маанилердин суммасы

$$x_1m_1+x_2m_2+....+x_km_k$$ болот.

X кокус чоңдугу ээ болгон маанилердин арифметикалык орто $\overline{X}$ чоңдугун табабыз: $\overline{X}=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2+...+x_km_k}{n}$ же

$$\overline{X}=x_1(m_1/n)+x_2(m_2/n)+...+x_k(m_k/n) \quad (19)$$

Бул жерде $\frac{m_1}{n}=W_1$, $\frac{m_2}{n}=W_2,...,\frac{m_k}{n}=W_k$ тиешелүү түрдө, X-тин мүмкүн болгон x_1, x_2,....,x_n маанилеринин салыштырма жыштыктары экендигин эске алып (19) барабардыгын

$$\overline{X}=x_1W+x_2W_2+...+x_kW_k \tag{20}$$

түрүндө жаза алабыз.

Сыноонун саны жетишерлик көп деп болжолдойлу. Анда, салыштырма жыштык, жакындаштырылган түрдө, окуянын ыктымалдыыгына барабар $W_1\cong P_1; W_2\cong P_2;...W_k\cong P_k$

Математикалык күтүүнүн аныктамасын эске алсак, (20) барабардыгы жакындаштырылган түрдө

$$\overline{X}\approx M(x)$$

түрүндө жазылат. Демек, математикалык күтүү, жакындаштырылган түрдө (канчалык сыноонун саны көп болсо, ошончолук чоң тактыкта), кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилеринин орто арифметикалык маанисине барабар.

1-эскертүү. Математикалык күтүү мүмкүн болгон маанилердин кичинесинен чоң, чоңунан кичине болору түшүнүктүү (арифметикалык орто маани). Башкача айтканда, мүмүкүн болгон маанилер, математикалык күтүүнүн сол жана оң жактарында (тегерегинде) жайгашкан. Ушул себептен математикалык күтүү бөлүштүрүүнүн жайгашышын мүнөздөйт деп, айтсак болот жана математикалык күтүүнү бөлүштүрүүнүн борбору деп аташат.

2-эскертүү. «Математикалык күтүү» termininin келип чыгышы ыктымалдыктар теориясынын кумар оюндарына гана колдонулган баштапкы учурларына тийиштүү (XYI-XYIIкк). Оюнчуну, күтүлүп жаткан утуштун орто мааниси, б.а. утуштун математикалык күтүүсү кызыктырган.

3. Математикалык күтүүнүн касиеттери.

1-касиет. Турактуу сандын математикалык күтүүсү ал турактуу сандын өзүнө барабар, б.а. $M(C)=C$

Далилдөө. Турактуу C санын, бир эле мүмкүн болгон мааниге P=1 ыктымалдыкта ээ болгон, үзгүлтүктүү кокус чоңдук түрүндө карасак болот. Анда

$$M(C)=C\cdot 1=C.$$

Кийинки касиеттен мурда, X үзгүлтүктүү кокус чоңдугунун турактуу C санына болгон көбөйтүндүсү CX- үзгүлтүктүү чоңдук болорун эскерте кетели. Чындыгында эле, Xтин мүмкүн болгон маанилери x_i жана алардын ыктымалдыктары P_i болсо, CX чоңдугунун мүмкүн болгон маанилери Cx_i жана алардын ыктымалдыктары, баякы эле P_i болот (мисалы X чоңдугу P_1 ыктымалдыкта x_1 маанисине ээ болсо, CX ошол эле ыктымалдыкта Cx_1 маанисине ээ болот).

2-касиет. Турактуу санды математикалык күтүүнүн белгисинин алдына чыгарсак болот:

$$M(CX)=CM(X)$$

Далилдөө. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүш закону

X	x_1	x_2	....	x_n
P	p_1	p_2	....	p_n

болсун.

Анда CX чоңдугунун бөлүштүрүү закону

CX	Cx_1	Cx_2	....	Cx_n
P	p_1	p_2	....	p_n

болот.

Демек $M(CX)= Cx_1P_1+Cx_2P_2+\ldots Cx_nP_n=C(x_1P_1+x_2P_2+\ldots x_nP_n)$ же

$$M(CX)=CM(X)$$

3-эскертүү. Кийинки касиетке өтүүдөн мурда чоңдуктардын көз каранды эместик түшүнүгүн киргизе кетели. Эгерде кокус чоңдуктун биринин бөлүштүрүү закону, экинчиси кандай мүмкүн болгон маанилерди алгандыгына байланышпаса, анда ал эки чоңдук көз каранды эмес чоңдуктар деп аталат. Буга карама-каршы болгон учурда алар көз каранды болушат. Эгерде бир нече чоңдуктардын каалагандай санынын бөлүштүрүү закондору, калгандарынын, мүмкүн болгон маанилердин кайсыларын, алгандыгына байланышпаса, анда ал чоңдуктар өз ара көз каранды эмес болушат.

4-эскертүү. X жана Y чоңдуктарынын көбөйтүндүсү деп, мүмкүн болгон маанилери X-тин мүмкүн болгон ар бир маанисин, Y-тин мүмкүн болгон ар бир маанисине көбөйткөн көбөйтүндүлөрүнө барабар болгон XY чоңдугун айтабыз; XY-тин мүмкүн болгон маанилеринин ыктымалдыктары X менен Y-тин мүмкүн болгон маанилеринин ыктымалдыктарынын көбөйтүндүсүнө барабар.

Мисалы, эгер мүмкүн болгон x_1 маанисинин ыктымалдыгы p_1, y_1 -дики g_1 болсо, анда мүмкүн болгон $x_1 \cdot y_1$ маанинин ыктымалдыгы $p_1 \cdot g_1$ болот.

Мүмкүн болгон $x_i \cdot y_i$ маанилеринин кээ бирлери, барабар болуп калышы мүмкүн. Бул учурда, көбөйтүндүнүн мүмкүн болгон маанисинин ыктымалдыгы, тийиштүү ыктымалдыктардын суммасына барабар болот. Мисалы, эгер $x_1 y_2 = x_3 y_5$ болсо, анда $x_1 y_2$-нин ($x_3 y_5$-тики болсо деле бары бир) ыктымалдыгы $p_1 g_2 + p_3 g_5$ болот.

<u>3-касиет.</u> Эки көз каранды эмес кокус чоңдуктун көбөйтүндүсүнүн математикалык күтүүсү,алардын ар биринин математикалык күтүүлөрүнүн көбөйтүндүсүнө барабар: $M(XУ)=M(X)M(Y)$

<u>Далилдөө.</u> X жана Y чоңдуктарынын бөлүштүрүү закондору

X	x_1	x_2	жана	Y	y_1	y_2
P	p_1	p_2		G	g_1	g_2 болсун.

XY чоңдугу кабыл ала турган бардык маанилерди түзөбүз. Ал үчүн X-тин мүмкүн болгон бардык маанилерин Y-тин ар бир мүмкүн болгон маанилерине көбөйтөбүз:

$$x_1 y_1, \quad x_1 y_2, \quad x_2 y_1, \quad x_2 y_2,$$

5-эскертүүнү пайдаланып жана $XУ$ бардык маанилери ар түрдүү деп эсептеп (эгерде барабар маанилер да бар болсо, далилдөө ушул сыяктуу эле жүргүзүлөт), анын бөлүштүрүү законун жазабыз:

X	$x_1 y_1$	$x_2 y_1$	$x_1 y_2$	$x_2 y_2$
P	$p_1 g_1$	$p_2 g_1$	$p_1 g_2$	$p_2 g_2$.

Анда, $M(XУ)=x_1 y_1 . p_1 g_1 + x_2 y_1 . p_2 g_1 + x_1 y_2 . p_1 g_2 + x_1 y_2 . p_2 g_2 =$

$=y_1 g_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2) + y_2 g_2 (x_1 p_1 + x_2 p_2) = (x_1 p_1 + x_2 p_2)(y_1 g_1 + y_2 g_2) = M(x)M(y)$ же

$$M(X\,Y)=M(X)M(Y).$$

X, Y -тин мааанилери экиден көп болгон учурда далилдөө ушул сыяктуу эле болот.

<u>1-натыйжа</u>.Өз ара көз каранды эмес бир нече үзгүлтүктүү кокус чоңдуктардын көбөйтүндүсүнүн математикалык күтүүсү, алардын ар биринин математикалык күтүүлөрүнүн көбөйтүндүсүнө барабар.

Мисалы, үч чоңдук үчүн

$$M(XYZ)=M(XY)M(Z)=M(X)M(Y)M(Z).$$

Каалагандай сандагы чоңдуктар үчүн, далилдөө математикалык индукция методы менен жүргүзүлөт.

3-мисал. Көз каранды эмес X жана $У$ кокус чоңдуктарынын бөлүштүрүү законтору берилген:

X	5	2	4 ;	Y	7	9
P	0,6	0,1	0,3 ;	G	0,8	0,2.

$X\,Y$-тин математикалык күтүүсүн тапкыла.

Чыгаруу. $M(X)=5\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}3=4{,}4$

$M(Y)=7\cdot 0{,}8+9\cdot 0{,}2=7{,}4$

X жана $У$ көз каранды болушпагандыктан, (3) касиеттин негизинде

$$M(X\,Y)=M(X)M(Y)=4{,}4\cdot 7{,}4=32{,}56$$

6-эскертүү. X жана Y чоңдуктарынын суммасы деп, мүмкүн болгон маанилери, X-тин ар бир мааниси менен Y-тин ар бир маанилеринин суммаларынан турган $X+Y$ кокус чоңдугун айтабыз. Көз каранды эмес чоңдуктар үчүн, $Y+X$тин мүмкүн болгон маанилеринин ыктымалдыктары, X менен Yтин тиешелүү маанилеринин ыктымалдыктарынын көбөйтүндүсүнө барабар. Мисалы, Х= x_1дин ыктымалдыгы p_1, У= y_1дин ыктымалдыгы g_1 болсо Х+У=x_1+y_1дин ыктымалдыгы p_1g_1. Көз каранды чоңдуктар үчүн сумманын ыктымалдыгы, алардын биринин ыктымалдыгын, экинчисинин шарттуу ыктымалдыгына көбөйткөнгө барабар. Мисалы, x_1-дин ыктымалдыгы p_1,y_1-дин x_1 аткарылгандагы ыктымалдыгы $P_{x_1}(y_1)$ болсо, x_1+y_1-дин ыктымалдыгы $P_1\cdot P_{x_1}(y_1)$ болот. x_i+y_i суммаларынын кээ бирлери, өз ара барабар болуп калышы мүмкүн. Анда, сумманын мүмкүн болгон маанилеринин ыктымалдыгы, тиешелүү ыктымалдыктардын суммасына барабар. Мисалы, $x_1+y_2=x_3+y_5$ жана x_1+y_2-дин ыктымалдыгы P_{12}, x_3+y_5-тики P_{35} болсо, анда x_1+y_2-нин же x_3+y_5-тин биринин (экинчиси эсепке алынбагандыгы) ыктымалдыгы $P_{12}+P_{35}$ болот.

Көз каранды чоңдуктар үчүн да, көз каранды эмес чоңдуктар үчүн да төмөнкү касиет аткарылат.

4-касиет. Эки чоңдуктун суммасынын математикалык күтүүсү, алардын ар биринин математикалык күтүүлөрүнүн суммасына барабар: $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$

Далилдөө. Жөнөкөйрөөк болуш үчүн, мүмкүн болгон маанилери экөө эле болгон X жана Y чоңдуктарын алалы, алардын бөлүштүрүү законду

$$\begin{array}{ccc} X & x_1 & x_2 \\ P & p_1 & p_2 \end{array} \quad \text{жана} \quad \begin{array}{ccc} Y & y_1 & y_2 \\ G & g_1 & g_2 \end{array}$$

болсун.

Анда $X+Y$ чоңдугунун мүмкүн болгон маанилери

$$X_1+Y_1,\quad X_1+Y_2,\quad X_2+Y_1,\quad X_2+Y_2$$ болот.

Бул маанилерди ар түрдүү деп эсептейбиз (эгерде кээ бирлери барабар болсо, далилдөө ошондой эле жүргүзүлөт) да, алардын ар биринин ыктымалдыктарын, тиешелүү түрдө: $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ аркылуу белгилебиз.

Анда, аныктама боюнча

$$M(X+Y)=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+(x_2+y_2)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22}$$, же

$$M(X+Y)=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22}).$$

$p_1=p_{11}+p_{12}$ болорун далилдейли. X чоңдугу x_1 маасинин кабыл алат деген окуя (ушул окуянын ыктымалдыгы p_1) , $X+Y$ чоңдугу же x_1+y_1 же x_1+y_2 маанилерин кабыл алат деген окуя (кошуунун теоремасы боюнча бул окуянын ыктымалдыгы $p_{11}+p_{12}$) менен бирдей, жана тескерисинче да болот. Ошондуктан, $p_1=p_{11}+p_{12}$. Ушул сыяктуу эле $p_{11}+p_{12}=p_2$, $p_{11}+p_{12}=g_1$, $p_{11}+p_{12}=g_2$

Анда жогорку барабардыктан $M(X+Y)=x_1p_1+x_2p_2+y_1g_1+y_2g_2$ же

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)$$

келип чыгат.

2-натыйжа. Бир нече чоңдуктун суммасынын математикалык күтүүсү, алардын ар биринин математикалык күтүүлөрүнүн суммасына барабар.

Мисалы, үч чүңдук болгон учурда

$$M(X+Y+Z)=M[(X+Y)+Z]=M(X+Y)+M(Z)=M(X)+M(Y)+M(Z)$$

Жалпы учурда (n окуянын математикалык күтүүсү)математикалык индукция методу менен далилденет.

<u>4-мисал</u>. Ар бир жолу бутага тийүү ыктымалдыктары $p_1=0{,}4$; $p_2=0{,}3$ жана $p_3=0{,}6$ болгон 3 жолу ок атылган. Бутага тийгизилген октордун жалпы санынын математикалык күтүүсүн тапкыла.

<u>Чыгаруу.</u> Биринчи жолу атылган октун бутага тийүү саны кокус чоңдук болот. Аны X_1 деп белгилесек, анын мүмкүн болгон маанилери 1 (ыктымалдыгы $p_2=0{,}4$) же 0 (ыктымалдыгы $g=1-$

0,4=0,6) болот (биринчи атылган ок бутага тиет же тибейт). Демек, $M(X_1)$=0,4 (2-мисалды кара). Ушул сыяктуу эле экинчи жана үчүнчү жолу атылган октордун бутага тийиш санынын математикалык күтүүсү $M(X_2)$=0,3; $M(X_3)$=0,6 болот. Бутага тийген октордун жалпы санын X кокус чоңдугу аркылуу белгилесек $X=X_1+X_2+X_3$ болот. Анда изделип жаткан математикалык күтүү

$$M(X)=M(X_1+X_2+X_3)=M(X_1)+M(X_2)+M(X_3)=0{,}4+0{,}3+0{,}6=1{,}3$$

5-мисал. Кумар ойноочу эки сөөкчөнү бир жолу таштаганда чыгуучу упайлардын санынын математикалык күтүүсүн тапкыла.

Чыгаруу. X аркылуу биринчи сөөкчөдө чыгуучу упайдын санын, $У$ аркылуу экинчи сөөкчөдө чыгуучу упайдын санын белгилейли. Бул чоңдуктардын мүмкүн болгон маанилери 1,2,3,4,5 жана 6. Булардын ар биринин ыктымалдыгы $\frac{1}{6}$. Анда

$$M(X+У)=1\frac{1}{6}+2\frac{1}{6}+3\frac{1}{6}+4\frac{1}{6}+5\frac{1}{6}+6\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$ ушул сыяктуу эле

$$M(Y)=\frac{7}{2}$$

Демек, $$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$$

Ар биринде A окуянын болуу ыктымалдыгы p -га барабар болгон көз каранды эмес n сыноо жүргүзүлсүн. Ушул сыноолордогу A окуясынын болушунун орточо саны (математикалык күтүүсү) канчага барабар? Бул суроого төмөндөгү касиет жооп берет.

5-касиет. Көз каранды эмес n сыноодогу A окуясынын болушунун орточо саны, сыноолордун жалпы санын ар бир сыноодогу A окуясынын болуш ыктымалдыгына көбөйткөнгө барабар: $$M(X)=np$$

Далилдөө. n сыноодогу A окуясынын болуш санын X үзгүлтүктүү кокус окуясы аркылуу белгилейбиз. Бул сыноолордо A окуясы аткарылышынын жалпы саны, анын ар бир сыноолордогу аткарылышынан турары түшүнүктүү. Ошондуктан, эгерде X_i- i-нчи, $i=\overline{1,n}$, сыноодогу A окуясынын болуш саны болсо, анда

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n.$$

Математикалык күтүүнүн 3-касиети боюнча

$$M(X)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)$$

Бир сыноодогу окуянын болуш санынын математикалык күтүүсү, окуянын ыктымалдыгына барабар болгондуктан (2-мисалды кара)

$$M(X_1)=M(X_2)=\ldots=M(X_n)=p \quad \text{болот.}$$

Анда $M(X)=np$ келип чыгат.

7-эскертүү. X чоңдугу биномдук закон боюнча бөлүштүрүлгөндүктөн, далилденген касиетти төмөндөгүдөй айтсак болот: параметрлери n жана p болгон биномдук бөлүштүрүүнүн математикалык күтүүсү np көбөйтүндүсүнө барабар.

6-мисал. Замбиректен атылган октун бутага тийүү ыктымалдыгы P=0,6. Эгерде бутаны көздөй 10 жолу ок атылса, бутага тийген октордун жалпы санынын математикалык күтүүсүн тапкыла.

Чыгаруу. Ар бир атканда бутага тийгизүү, башка жолку атуунун жыйынтыгына (бутага тийгенине же тийбегенине) байланышпайт. Ошондуктан, каралып жаткан окуялар көз каранды эмес. Демек, $M(X)=np=10\cdot 0,6=6$ болорун табабыз.

§2 Үзгүлтүктүү кокус чоңдуктун дисперсиясы

1.Кокус чоңдуктун чачылуусун мүнөздөөчү санды киргизүүнүн пайдалуулугу

Математикалык күтүүлөрү бирдей, бирок мүмкүн болгон маанилери ар түрдүү кокус чоңдуктарды жеңил эле көрсөтүүгө болот. Мисалы, үзгүлтүктүү X жана Y кокус чоңдуктарынын бөлүштүрүлүш закондору

X	-0,01	0,01	жана	Y	-100	100
P	0,5	0,5		P	0,5	0,5

болсун. Алардын математикалык күтүүлөрү нөлгө барабар:

$$M(X)=-0,01\cdot 0,5+0,01\cdot 0,5=0; \qquad M(Y)=-100\cdot 0,5+100\cdot 0,5=0.$$

Xтин мүмкүн болгон маанилери, анын математикалык күтүүсүнө жакын Yтики болсо $M(Y)$тен алыс. Ошентип, математикалык күтүүлөрдү гана билип, кокус чоңдуктар кандай мүмкүн болгон маанилерге ээ болорун, алар математикалык күтүүлөрдүн тегерегинде кандай чачырашкандыгын билүүгө болбойт. Бир сөз менен айтканда, математикалык күтүү кокус чоңдукту толук мүнөздөбөйт.

Ушул себептүү, математикалык күтүү менен бирге, андан башка да сандык мүнөздөөлөр киргизилет. Мисалы, кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери анын математикалык күтүүсүнүн тегерегинде кандай чачылгандыгын билиш үчүн, дисперсия деп аталган сандык мүнөздөмө пайдаланылат. Дисперсия түшүнүгүн киргизүүдөн мурун, кокус чоңдуктун математикалык күтүүсүнөн кыйшайуу(четтөө) түшүнүгүн киргизебиз.

2.Кокус чоңдуктун анын математикалык күтүүсүнөн кыйшаусу.

X кокус чоңдук, $M(X)$ - анын математикаылык күтүүсү болсун. Анда $X- M(X)$ дагы кокус чоңдук болот.

2-аныктама. Кокус чоңдук менен анын математикалык күтүүсүнүн айырмасы $X-M(X)$ кыйшайуу деп аталат.

X-тин бөлүштүрүү закону

X	x_1	x_2	....	x_n
P	p_1	p_2	....	p_n

белгилүү болсун. Кыйшайуунун бөлүштүрүү закондорун жазалы. Кышайуу x_i-$M(x)$, $i=\overline{1,n}$ маанисине ээ болуш үчүн, X чоңдугу x_i маанисине ээ болушу жетиштүү. x_i -нин ыктымалдыгы p_i болгондуктан x_i - $M(X)$тин ыктымапдыгы да p_i болот.

Ошентип, кыйшайуунун бөлүштүрүү закону

X-$M(X)$	x_1-$M(X)$	x_2-$M(X)$	...	x_n- $M(X)$
P	P_1	P_2	....	P_n

түрүндө жазылат.

Кыйшайуунун, кийин пайдаланыла турган, маанилүү касиетин келтиребиз.

1-теорема. Кыйшайуунун математикалык күтүүсү нөлгө барабар:

$$M[X-M(X)]=0$$

Далилдөө. $M(X)$ турактуу чоңдук экендигин жана математикалык күтүүнүн касиеттерин эске алып

$M[X-M(X)]=M(X)-M[M(X)]=M(X)-M(X)=о$ болорун табабыз.

7-мисал. Дисреттик X кокус чоңдугунун бөлүштүрү закону берилген:

X	1	2
P	0,2	0,8

Кыйшайуунун математикалык күтүүсү нөлгө барабар экендигин текшергиле.

Чыгаруу. $M(X)$ табабыз: $M(X)=1\cdot 0,2+2\cdot 0,8=1,8$

Анда, кыйшайуунун бөлүштүрүү закону

$x\text{-}M(X)$	-0,8	0,2
P	0,2	0,8

болот. Демек, $M(X)=-0,8\cdot 0,2+0,2\cdot 0,8=0$

«Кыйшайуу» термини менен катар «борбордоштурулган чоңдук» терминин пайдалынышат.

3-аныктама. Борбордоштурулган $\dot{X}$ кокус чоңдугу деп, X кокус чоңдугу менен анын $M(X)$ математикалык күтүүсүнүн айырмасы $\dot{X} = X\text{-}\ M(X)$ аталат.

«Борбордоштурулган чоңдук» деп аталгандыгынын себеби, математикалык күтүү бөлүштүрүүнүн борбору болгондугунда жатат (1-эскертүүнү кара).

3.Үзгүлтүктүү кокус чоңдуктун дисперсиясынын аныктамасы.

Көпчүлүк учурда, кокус чоңдуктардын маанилери анын орто маанисинин тегерегинде кандай чачылганын чамалоо керек болот. Мисалы, артилерияда снараддар бутанын жанына канчалык чогуу түшкөнүн билүү маанилүү.

Бир караганда чачылууну байкаш үчүн, кыйшайуунун бардык мүмкүн болгон маанилерин таап, анан анын орто маанисин табу керектей көрүнөт. Бирок, бул жол эч нерсе бербейт, себеби бардык кокус чоңдуктар үчүн, кыйшайуунун орто мааниси, б.а. $M[X\text{-}M(X)]$ нөлгө барабар. Бул касиет мурунку пункта далилденген жана ал кээ бир кыйшайуулар оң, кээ бир кыйшалуулар терс болуп, өз ара жоюшуп кеткендиги менен түшүндүрүлөт. Ошондуктан, кыйшалууларды абсалюттук чоңдуктары боюнча же квадраттары менен алуу керектиги келип чыгат. Абсалюттук чоңдугу менен алынган учурда, амалдарды жүргүзүүдө бир топ кыйынчылык туулат. Ошондуктан, чачылууну чамалаш үчүн, кыйшайуунун квадратынын орто маанисин алышат.

4-аныктама. Үзгүлтүктүү кокус чоңдуктун дисперсиясы (чачылуусу) деп кыйшайуунун квадратынын математикалык күтүүсү аталат.

Дисперсия $D(X)$ түрүндө белгиленилет. Аныктама боюнча $D(X)=M[X-M(X)]^2$.

Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү закону

X	x_1	x_2	....	x_n
P	p_1	p_2	....	p_n

болсун. Анда, кыйшайуунун квадратынын бөлүштүрүү закону

$[X-M(X)]^2$	$[x_1-M(X)]^2$	.....	$[x_n-M(X)]^2$
P	P_1	......	P_n

болот. Дисперциянын аныктамасы боюнча

$$D(X)=[x_1-M(X)]^2p_1+[x_2-M(X)]^2p_2+...+[x_n-M(X)]^2p_n$$

Ошентип, дисперсияны табыш үчүн кыйшайуунун квадраттарын, анын тиешелүү ыктымалдыктарынына көбөйтүп туруп, кошуп коюу керек.

8-эскертүү. Аныктамадан, үзгүлтүктүү кокус чоңдуктун дисперсиясы кокус чоңдук эмес турактуу чоңдук болору көрүнүп турат. Кийин үзгүлтүктсүз кокус чоңдуктун дисперциясы дагы турактуу болорун көрөбүз.

8-мисал. Бөлүштүрүү закону

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

болгон дискреттик кокус чоңдуктун дисперциясын тапкыла.

Чыгаруу. Математикалык күтүнүү табабыз

$$M(X)=1\cdot 0,3+2\cdot 0,5+5\cdot 0,2=2,3$$

Кыйшайуунун квадраттарын табабыз:

$$[x_1-M(X)]^2=(1-2,3)^2=1,69$$

$$[x_2-M(X)]^2=(2-2,3)^2=0,09$$

$$[x_3-M(X)]^2=(5-2,3)^2=7,29$$

кыйшайуунун квадраттарынын бөлүштүрүш закону

$[x_1-M(X)]^2$	1,69	0,09	7,29
P	0,3	0,5	0,2

Анда $D(X)=1,69\cdot 0,3+0,09\cdot 0,5+7,29\cdot 0,2=2,01$

Аныктама боюнча дисперсияны чыгаруу татаал эсептөөлөргө алып келет. Ошондуктан, дисперсияны жөнөкөйрөөк чыгара турган формуланы беребиз.

3. Дисперсияны чыгаруунун формуласы.

Дисперсияны төмөнкү теормеманы пайдаланып чыгаруу жеңил болот.

2-теорема. Дисперсия кокус чоңдуктун квадратынын математикалык күтүүсүнөн, ал чоңдуктун өзүнүн математикалык күтүүсүнүн квадратын алып таштаганга барабар:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)$$

Далилдөө. $M(X)$ турактуу сан болгондуктан $2M(X)$ жана $M^2(X)$ да турактуу болушат. Ошондуктан, математикалык күтүүнүн касиеттерин эске алып, дисперсиянын формуласын жөнөкөйлөтөбүз:

$D(X)=M[X-M(X)]^2 = M[X^2-2XM(X)+M^2(X)]=M(X^2)-2M(X)M(X)+M^2(X)=M(X^2)-2M^2(X)+M^2(X)=M(X^2)-M^2(X).$

Ошентип $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$.

9-мисал. X бөлүштүрүү закону

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

болсо, анын дисперсиясын тапкыла.

Чыгаруу. Математикалык күтүүнү табабыз

$$M(X)=2\cdot 0,1+3\cdot 0,6+5\cdot 0,3=3,5$$

X^2 бөлүштүрүү закону

4	9	25
0,1	0,6	0,3

болгондуктан

$$M(X^2)=4\cdot 0,1+9\cdot 0,6+25\cdot 0,3=0,4+5,4+7,5=13,3$$

Анда, изделип жаткан дисперсия

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=13,3-(3,5)^2=1,05$$ болот.

9-эскертүү. Эгерде X жана Y чоңдуктарынын мүмкүн болгон маанилери жана математикалык күтүүлөрү бирдей болсо, алардын дисперсиялары да бирдей деген жыйынтык тура эмес. Себеби, дисперсияга, алардан башка да, мүмкүн болгон маанилердин ыктымалдыктары таасир этет. Буга мисал келтиребиз.

10-мисал. Бөлүштүрүү закондору

X	-1	1	2	3
P	0,48	0,01	0,09	0,42

Y	-1	1	2	3
P	0,19	0,51	0,25	0,05

болгон X жана Y чоңдуктарынын дисперсиясын аныктагыла.

Чыгаруу. $M(X)=M(Y)=0{,}97;\quad D(X)\approx 3{,}69;\quad D(Y)=1{,}21$ экендигин жеңил эле чыгарууга болот. Ошентип, бул чоңдуктардын мүмкүн болгон маанилери жана математикалык күтүүлөрү барабар, бирок дисперсиялары барабар эмес. Тагыраак айтканда $D(X)>D(Y)$. Себеби, Xтин математикалык күтүүсүнөн алыс жаткан маанилеринин ыктымалдыктары чоң, ал эми Y тики болсо кичине. Ушул себептүү $D(X)>D(Y)$ болорун, бөлүштүрүү закондорду көрүп туруп эле айтсак болмок.

5. Дисперсиянын касиеттери.

1-касиет. Турактуу сандын дисперсиясы нөлгө барабар $D(C)=0$.

Далилдөө. Математикалык күтүүнүн касиеттерин жана дисперсиянын аныктамасын пайдаланып

$$D(C)=M(C-M(C))^2=M(C-C)=M(0)=0$$

болорун табабыз.

Демек, $D(C)=0$.

Бул касиет, турактуу чоңдук бир гана мааниге ээ болгондуктан, анын чачылышы нөлгө барбар болорун эске алсак, түшүнүктүү болот.

2-касиет. Турактуу көбөйтүчүнү Дисперсиянын сыртына квадраты менен чыгарууга болот:

$$D(CX)=C^2D(X)$$

Далилдөө. Дисперсиянын аныктамасы боюнча

$$D(CX)=M[\,(CX-M(CX))^2]$$

Математикалык күтүүнүн касиеттерин колдонсок

$$D(CX)=M[C^2(X-M(X))^2]=C^2M\{[(X-M(X)]^2\}=C^2D(X) \text{ же } D(CX)=C^2D(X).$$

Мындан, эгерде $|C|<1$ болсо, $D(CX)=C^2D(X)<D(X)$, ал эми $|C|>1$ болсо, $D(CX)>D(X)$ келип чыгат.

Бул барабарсыздыктар, биринчи учурда CX чоңдугу X чоңдугуна караганда азыраак чачыларын, экинчи учурда CX чоңдугу X-тен чоңураак чачыларын, дагы бир жолу көрсөтүп турат.

3-касиет. Эки көз каранды эмес кокус чоңдуктардын суммасынын дисперсиясы алардын ар биринин дисперсияларынын суммасына барабар: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

Далилдөө. Дисперсияны чыгаруунун формуласы боюнча

$$D(X+У)=M[(X+Y)^2-[M(X+Y)]^2]$$

Кашаларды ачып жана математикалык күтүүнүн касиеттерин пайдаланып

$D(X+Y)=M(X^2+2XY+Y^2)-[M(X)+M(Y)]^2= +M^2(X)+2M(X)\cdot M(Y)+M(Y^2)-- M^2(X)-2M(X)\cdot M(Y)-M^2(Y)=$

$=\{M(X^2)-[M(X)]^2\}+\{M(Y^2)-M^2(Y)\}=D(X)+D(Y)$

же $D(X+Y)= D(X)+D(Y)$ болорун табабыз.

3-натыйжа. Өз ара көз каранды болбогон бир нече кокус чоңдуктардын суммасынын дисперсиясы алардын ар биринин дисперсияларынын суммасына барабар.

Мисалы, үч чоңдук үчүн

$$D(X+Y+Z)=D[X+(Y+Z)]=D(X)+D(Y+Z)=D(X)+ D(Y)+D(Z)$$

Каалагандай сандагы чоңдуктар үчүн далилдөө математикалык индукция методу менен жүргүзүлөт.

4-натыйжа. X кокус чоңдугу менен туруктуу C санынын суммасынын дисперсиясы X чоңдугунун дисперсиясына барабар:

$$D(C+X)=D(X)$$

Далилдөө. C жана X көз каранды болбогондуктан, 3-касиеттин негизинде $D(C+X)= D(C)+D(X)$. 1-касиет боюнча $D(C)=0$ болорун эске алсак, $D(C+X)=D(X)$ болот. Бул касиет, C+X жана X чоңдуктары эсептөөнүн башталышынан гана айырмалангандыктан, алар өздөрүнүн математикалык күтүүлөрүнүн тегерегинде бирдей чачылгандыгын эске алсак, түшүнүктүү болот.

4-касиет. Эки чоңдуктун айырмасынын дисперсиясы, ал чоңдуктарынын дисперсияларынын суммасына барабар:

$$D(X-Y)= D(X)+D(Y)$$

Далилдөө. 3-касиеттин негизинде $D(X-Y)= D(X)+D(-Y)$. Экинчи касиет боюнча $D(-Y)= (-1)^2D(Y)=D(Y)$ болгондуктан,

$$D(X-Y)= D(X)+D(Y)$$ келип чыгат.

Ар биринде, A окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы турктуу p санына барабар болгон көз каранды эмес n сыноо жүргүзүлсүн. Бул сыноолордогу A окуясынын аткарылуу санынын дисперсиясы эмнеге барабар? Бул суроого дисперсиянын 5-касиети жооп берет.

5-касиет. Ар биринде A окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы туруктуу p санына барабар болгон, көз каранды эмес n сыноогу A окуясынын аткарылыш санынын дисперсиясы, сыноолордун саны менен окуянын аткарылыш жана аткарылбастык ыктымалдыктарынын көбөйтүндүсүнө барабар: $D(X)=npg$

Далилдөө. Көз каранды эмес n сынодогу A окуясынын аткарылыш саны- X чоңдугу болсун.

Окуя аткарылышынын жалпы саны, ар бир сыноодогу окуянын аткарылыш сандарынын суммасына барабар:

$X=x_1+x_2+...+x_n$,мында $x_i(i=1,2,3,\ldots n)$ i-сыноодогу окуянын аткарылыш саны.

x_1 , x_2 , ... , x_n окуялары өз ара көз каранды эмес, себеби ар бир сыноонун натыйжасы калган сыноолордун натыйжаларына байланышпайт. Ошондуктан, 3-натыйжанын негизинде

$$D(X)=D(x_1)+D(x_2)+\ldots+D(x_n).$$

x_i чоңдугунун дисперсиясын $D(x_i)=M(x_i^2)-M^2(x_i)$, $i=\overline{1.n}$ формуласы боюнча табабыз.

x_i чоңдугу А окуясынын i-сыноодогу аткарылыш саны болгондуктан $M(x_i)=p$ (2-мисалды кара).

x_1^2 чоңдугу 1^2 жана 0^2 маанилерине тиешелүү түрдө p жана g ыктымалдыктары менен ээ болот. Ошондуктан $M(x_1^2)=1^2p+0^2q=p$.

Буларды $D(x_i)$ формуласына койсок $D(x_i)=p-p^2=p(1-p)=pq$ келип чыгат. Анда, $D(X)=npq$ болорун табабыз.

10-эскертүү. Х чоңдугу биномдук закон боюнча бөлүшкөндүрүлгөндүктөн, далилденген теормеманы төмөндөгүдөй түзсөк болот: параметрлери n жана p болгон биномдук бөлүштүрүүнүн дисперсиясы npg көбөйтүндүсүнө барабар.

Мисал. Ар бириндеги аткарылыш ыктамалдыгы 0,6-га барабар болгон окуянын көз каранды эмес 10 сыноодогу аткарылыш санынын дисперсиясын тапкыла.

Чыгаруу. Шарт боюнча $n=10$; $p=0,6$; $q=1-0,6=0,4$. Изделип жаткан дисперсия $D(X)=npq=10\cdot0,6\cdot0,4=2,4$

§3 Квадраттык ортто кыйшайуу.

Кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилеринин, анын орто маанисинин тегерегиндеги чачылышын мүнөздөө үчүн, дисперсиядан бөлөк дагы, кээ бир башка мүнөздөөчүлөрдү пайдалансак болот. Алардын бири болуп квадраттык орто кыйшайуу эсептелет.

5-аныктама. Кокус чоңдуктун квадраттык орто кыйшайуусу деп, анын дисперсиясынан алынган квадраттык тамырды айтабыз:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Дисперсиянын өлчөмү кокус чоңдуктун өлчөмүнүн квадратына барабар экендигин жеңил эле көрсөтүүгө болот.

Квадраттык орто кыйшайуу дисперсиянын квадраттык тамырына барабар болгондуктан, анын өлчөмү кокус чоңдуктун өлчөмү менен дал келет. Ошондуктан, чачылуунун өлчөмүн кокус чоңдутун өлчөмү менен алыш керек болгон учурларда, дисперсияны эмес квадраттык орто кыйшайууну чыгарышат. Мисалы, эгер X метр менен ченелсе σ(X) дагы метр менен ченелет, ал эми D(X)-квадрат метр менен ченелет.

2-мисал. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү закону

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

болсо, анын квадраттык орто кыйшайуусун тапкыла.

Чыгаруу. Алдын ала математикалык күтүүнү жана дисперсияны табабыз: $M(X)=2\cdot0{,}1+3\cdot0{,}4+10\cdot0{,}5=6{,}4$;

$$M(X^2)=2^2\cdot0{,}1+3^2\cdot0{,}4+10^2\cdot0{,}5=54;$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=54-(6{,}4)^2=13{,}04$$

Демек, изделип жаткан квадраттык орто кыйшайуу

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{13{,}04}\approx 3.61.$$

Өз ара көз каранды эмес бир нече кокус чоңдуктардын квадраттык орто кыйшайуулары белгилүү болсун. Бул чоңдуктардын суммасынын квадраттык орто чоңдугун кантип табууга болот? Бул суроого төмөнкү теорема жооп берет.

3-теорема. Өз ара көз каранды эмес бир нече кокус чоңдуктун суммасынын квадраттык орто кыйшайуусу, ал чоңдуктардын квадраттык орто кыйшайууларынын квадраттарынын суммасынан алынган квадраттык тамырга барабар: $\sigma(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\ldots+\sigma^2(X_n)}$

Далилдөө. X аркылуу өз ара көз каранды эмес чоңдуктардын суммасын белгилейбиз: $X = X_1+X_2+\ldots+X_n$.

Өз ара көз каранды эмес бир нече кокус чоңдуктун суммасынын дисперсиясы, ал чоңдуктардын дисперсияларынын суммасына барабар болгондуктан (3-натыйжаны кара)

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)$$ болот .

Мындан, $$D(X)=\sqrt{D(x_1)+D(x_2)+\ldots+D(x_n)}$$

же $$\sigma(X)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\ldots+\sigma^2(X_n)}.$$

§4 Бирдей бөлүштүрүлгөн өз ара көз каранды

эмес кокус чоңдуктар.

Берилген бөлүштүрүү закону боюнча, кокус чоңдуктун сандык мүнөздөмөлөрүн табууга болорун билдик. Мындан, эгерде бир нече кокус чоңдуктардын бөлүштүрүү закондору бирдей болсо, алардын сандык мүнөздөмөлөрү дагы бирдей болору келип чыгат.

Өз ара көз каранды эмес n кокус $X_1, X_2, \ldots, X_n$ чоңдуктарынын бөлүштүрүү закондору бирдей болсун жана ошол себептүү, алардын сандык мүнөздөмөлөрү (математикалык күтүү, дисперсия ж.б.) дагы бирдей болсун. Бул чоңдуктардын арифметикалык орто чоңдугунун сандык мүнөздөмөлөрүн билүү керек болот. Бул параграфта ошону үйрөнөбүз.

Каралып жаткан чоңдуктардын орто чоңдугун $\overline{X}$ аркылуу белгилейбиз: $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$

Төмөндөгү теоремалар $\overline{X}$ тин сандык мүнөздөмөлөрү менен $X_1, X_2, \ldots, X_n$ чоңдуктарынын байланышын көрсөтөт.

4-теорема. Өз ара көз каранды эмес, бирдей бөлүштүрүлгөн кокус чоңдуктардын арифметикалык орто чоңдугунун математикалык күтүүсү, ар бир чоңдуктун математикалык күтүүсүнө барабар: $M(\overline{X}) = a$, *мында* $a = M(X_i)$

Далилдөө. Математикалык күтүүнүн касиеттерин пайдаланып $M(\overline{X}) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}[M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)] = \frac{1}{n} na = a$ болорун табабыз.

5-теорема. Өз ара көз каранды эмес, бирдей бөлүштүрүлгөн n кокус чоңдуктардын арифметикадык орто чоңдугунун дисперсиясы, ар бир чоңдуктун дисперсияснан n эсе кичине:

$$D(\overline{X}) = \frac{1}{n} D, \text{ мында } D = D(X_i).$$

Далилдөө. Диспресиянын касиеттерин пайдаланып $D(\overline{X}) = D\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D(x_1) + D(x_2) + \ldots + D(x_n)) = \frac{1}{n^2}(Dn) = D/n$ болорун табабыз. Теорема далилденди.

6-теорема. Өз ара көз каранды эмес бирдей бөлүштүрүлгөн n кокус чоңдуктардын арифметикадык орто чоңдугунун квадраттык орто кышайуусу, ар бир чоңдутун квадраттык орто кышайуусу σ дан $\sqrt{n}$ эсе кичине: $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Далилдөө.

$$D(\overline{X}) = D/n \quad \text{болгондуктан} \quad \sigma(\overline{X}) = \sqrt{D(\overline{X})} = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Теорема дилиденди.

Арифметикалык орто чоңдуктун дисперсиясынын жана квадраттык орто кыйшайуусунун формулаларынан, төмөндөгүдөй жалпы жыйынтык чыгарууга болот: дисперсия жана квадраттык орто кыйшайуу кокус чоңдуктун чачылуу ченин түшүндүргөндүктөн, жетишерлик сандагы өз ара көз каранды эмес кокус чоңдуктардын арифметикалык орто чоңдугунун чачылышы, ар бир чоңдуктун чачылышынан көп кичине. Бул жыйынтыктын тажрыйбадагы маанисин түшүндүрүүчү мисалды келтиребиз.

12-мисал. Кандайдыр бир физикалык чоңдукту ченөө үчүн, бир нече ченөө жүргүзүп туруп, алардын арифметикалык орто чоңдугун таап, аны ченелип жаткан чорңдуктун жакындаштырылган мааниси үчүн кабыл алышкан.

Ченөөлөр бирдей шартта жүргүзүлөт деп эсептеп:

а) арифметикалык орто чоңдуктун ар бир жекече ченөөлөргө караганда ишеништүү жыйынтык берерин;

б) ченөөнүн санын көбөйткөн сайын жыйынтыктын ишенүмдүүлүгү арта баштарын далилдегиле.

Чыгаруу. а) Ар бир жекече ченөөлөрдө, ченелип жаткан чоңдуктун маанилери ар түрдүү болору белгилүү. Ар бир ченөөнүн жыйынтыгы, алдын ала эсепке алууга мүмкүн болбогон, көп сандаган кокустан болуучу себептерге (температуранын өзгөрүшү, аспаптын термелүүсү ж.б.) байланыштуу.

Ошондуктан, ар бир n жекече ченөөлөрдүн жыйынтыктарын X_1 ,X_2 ..., X_n кокус чоңдуктары катары карасак болот. Мында X_i чоңдугу i-чи ченөөнүн жыйынтыгы. Бул чоңдуктардын бөлүштүрүү закондору бирдей (ченөөлөр бир эле аспап, бирдей жол менен жүргүзүлөт), ошол себептүү, алардын сандык мүнөздөмөлөрү да бирдей; андан бшка дагы алар өз ара көз каранды эмес (ар бир ченөөнүн жыйынтыгы башкасы менен байланышпайт).

Биз мындай чоңдуктардын арифметикалык орто чоңдугунун чачылышы, ар бир чоңдуктукунан кичине болорун билебиз. Башкача айтканда, арифметикалык орто чоңдук, ар бир жекече ченөөнүн натыйжаларына караганда, өлчөлүп жаткан чоңдуктун чыныгы маанисине жакын болорун билебиз. Бул болсо, бир нече ченөөнүн арифметикалык орто чоңдугу, ар бир жекече ченөөлөргө караганда ишенүмдүү жыйынтык берерин түшүндүрөт.

б) жеке кокус чоңдуктардын саны өскөн сайын, арифметикалык орто чоңдуктун чачылышы кичирейери бизге белгилүү. Бул болсо, ченөөнүн саны өскөн сайын, алардын арифметикалык орто чоңдугу ченелип жаткан чоңдуктун чыныгы маанисинен улам азыраак айырмаланаарын түшүндүрөт.

Ошентип, ченөөнүн санын көбөйткөн сайын улам ишенимдүүрөк жыйынтык алынат.

Мисалы, жекече ченөөнүн квадраттык орточо кыйшайуусу σ =6м. болсо жана n=36 ченөө жүргүзүлсө, анда арифметикалык орто чоңдуктун квалраттык орто кыйшайуусу 1 гана метрге барабар болуп калат. Чындыгында эле, $\sigma\,(\overline{X}) = 6/\sqrt{36} = 1$.

Демек, биз күткөндөй эле, бир нече ченөөнүн арифметикалык орточо чоңдугу, ар бир жекече ченөөнүн жыйынтыктарына караганда, ченелип жаткан чоңдуктун чыныгы маанисине жакын экен (чачылуусу кичине болгондуктан).

§5 Баштапкы жана борбордук теориялык моменттер.

Бөлүштүрүү закону

X	1	2	5	100
P	0,6	0,2	0,19	0,01

болгон үзгүлтүктүү X кокус чоңдугун карайбыз. Анын математикалык күтүүсү M(X)=1·0,6+2·0,2+5·0,19+100·0,01=2,95.

X^2 -тын бөлүштүрүү законун табабыз

X	1	4	2 5	10000
P	0,6	0,2	0,19	0,01

Анда $M(X)=1\cdot 0,6+4\cdot 0,2+25\cdot 0,19+10000\cdot 0,01=106,15$ болот да, $M(X^2)$ менен M(X) айырмасы чоң экенин көрөбүз. Бул болсо, X-тин $X=100$ болгон маанисине X^2-тын тиешелүү мааниси 10000 болуп, өтө чоңойуп кеткендиги менен түшүндүрүлөт. Бул маанинин ыктымалдыгы кичине (0,01).

Ошентип, M(X)тен $M(X^2)$ өтүү, кокус чоңдуктун ыктымалдыгы кичине, бирок өзү чоң маанисинин таасирин эсепке алууга мүмкүндүк берди. Эгерде X чоңдугу кичине ыктымалдыктагы бир нече чоң маниге ээ болсо, анда X^2 чоңдугуна, анан дагы X^3, X^4 ж.б.чоңдуктарына өтүү бул маанилердин таасирин күчөтмөк. Ошондуктан, кокус чоңдуктардын (үзгүлтүктүү же үзгүлтүксүз) бүтүн оң даражаларынын математикалык күтүүлөрүн кароо пайдалуу.

6-аныктама. Кокус X чоңдугунун к-тартиптеги баштапкы моменти $\nu_к$ деп, $X^к$ нын математикаылк күтүүсү аталат: $\nu_к=M(X^к)$.

Жекече учурда $\nu_1=M(X)$, $\nu_2=M(X^2)$ Бул формуланы пайдаланып

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\nu_2-\nu_1^2$ же $D(X)=\nu_2-\nu_1^2$

болорун табабыз.

Хтин моментеринен башка дагы(X-M(X))-тин моментерин кароо пайдалуу. Хтин к-тартиптеги борбордук моменти μ_k деп, $(X-M(X))^к$ нын математикалык күтүүсү атлат:

$$\mu_k=M\{[X-M(X)]^к\}$$

Жекече учурда $\mu_1=M[X-M(X)]=0$, $\mu_2=M\{[X-M(X)]^2\}=D(X)$

Баштапкы жана борбордук моментерди байланыштырган формулаларды жеңил эле алууга болот:

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2$$

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^3$$

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4$$

Төрттөн чоң даражадагы моментер аз пайдаланылат.

10-эскертүү. Бул жерде, каралып жаткан моменттер теориялык моменттер деп аталат. Мындан башка дагы, байкоо жүргүзүүнүн негизинде аныкталуучу моменттер эмпирикалык моменттер деп аталат да, алар математикалык статистикада каралат.

МАСЕЛЕЛЕР

1. Дискреттик X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү закону

X	6	3	1
P	0,2	0,3	0,5

болсо, анын математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 2,6

2. Ыктымалдыктары $P_1=0,6$; $P_2=0,4$; $P_3=0,5$ жана $P_4=0,7$ болгон, 4 жолу бутага атуу жүргүзүлгөн. Бутага тийүүнүн жалпы санынын математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 2,2

4. Дискреттик X жана У кокус чоңдуктарынын бөлүштүрүү закондору берилген:

X	1	2
P	0,2	0,8

Y	0,5	1
G	0,3	0,7

X Y көбөйтүндүсүнүн математикалык күтүүсүн төмөнкү эки жол менен тапкыла:

а) X Y бөлүштүрүү законун түзүп;

б) 3-касиетти пайдаланып.

Жообу: 1,53

5. Үзгүлтүктүү кокус X жана Y чоңдуктары 3-мисалдагыдай бөлүштүрүү закондору боюнча берилген. X+ Y суммасынын математикалык күтүүсүн эки жол менен тапкыла:

а) X+ Y бөлүштүрүү законун түзүп;

б) 4-касиетти пайдаланып.

Жообу: 2,65

6. Ишенимдүүлүккө сынап жаткан убакыттын ичинде, тетиктин иштен чыгуу ыктымалдыгы 0,2 барабар болгон. Эгерде сыноого 10 тетик алынса, иштен чыккан тетиктердин жалпы санынын математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 2 тетик

7. Кумар ойноочу эки сөөкчөнү таштаганда, түшүүгө мүмкүн болгон упайлардын көбөйтүндүсүнүн математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 12,25 упай

8. Ар биринин утуу ыктымалдыктары 0,3 болгон 20 лотереялык билет алынган болсо, ута турган билеттердин санынын математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 6 билет

9. Көз каранды эмес эки кокус чоңдуктун дисперсиялары берилген D(X)=4, D(Y)=3

Бул эки чоңдуктун суммасынын дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 7

10. X кокус чоңдугунун дисперсиясы 5-ке барабар. Төмөндөгү чоңдуктардын дисперсияларын тапкыла: а) X-1 б) -2X в) 3X+6

Жообу: а)5; б)20; в)45

11. X кокус чоңдугу C жана -C деген эки гана маанинин ар бирине 0,5 ыктымалдыкта ээ болот. Бул чоңдуктун дисперсиясын тапкыла.

Жообу: C^2

12. X чоңдугунун бөлүштүрү закону

X	0,1	2	10	20
P	0,4	0,2	0,15	0,25

болсо, анын дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 67,6404

13. X кокус чоңдугу мүмкүн болгон эки мааниге ээ болот: 0,3 ыктымалдыгы менен x_1 жана 0,7 ыктымалдыгы менен x_2. Эгерде $x_1<x_2$, M(X)=2,7 жана D(X)=0,21 болсо, бул маанилерди (x_1 жана x_2) тапкыла.

Жообу: $x_1=2$, $x_2=3$

14. Көз каранды эмес эки сыноодогу A окуясынын аткарылыш саны-X чоңдугу болсо жана M(X)=0,8 болсо, D(X)-ти тапкыла.

Көрсөтмө. Көз каранды эмес эки сыноодогу A окуясынын аткарылыш санынын, ыктымалдыктарынын бөлүштүрүлүшүнүн биномдук законун жазгыла.

Жообу: 0,48

15. Бири бирине байланышпай өз алдынча иштөөчү 4 аспаптан турган жабдык сыналат. Аспаптардын иштен чыгуу ыктымалдыктары: $P_1=0,3$; $P_2=0,4$; $P_3=0,5$; $P_4=0,6$. Иштен чыккан аспаптардын санынын математикалык күтүүсүн жана дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 1,8; 0,94

16. Ар бир сыноодо аткарылуу ыктымалдыгы 0,7 болгон окуянын көз каранды эмес 100 сыноодогу аткарылыш санынын (X чоңдугу) дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 21

17. Кокус чоңдуктун дисперсиясы D(X)=6,25. Квадраттык орто кыйшайууну

(σ(X)) тапкыла.
Жообу:2,5
18. Кокус чоңдуктун бөлүштүрү закону берилген:

X	2	4	8
P	0,1	0,5	0,4

Бул чоңдуктун квадраттык орто кыйшайуусун тапкыла.
Жообу: 2,2
19. Бирдей бөлүштүрүлгөн көз каранды эмес 9 кокус чоңдуктун ар биринин дисперсиясы 36-га барабар. Бул чоңдуктардын арифметикалык орто чоңдугунун дисперсиясын тапкыла.
Жообу: 4.
20. Бирдей бүлүштүрүлгөн көз каранды эмес 16 кокус чоңдуктун ар биринин квадраттык орто кыйшайуусу 10 . Бул чоңдуктардын арифметикалык орто чоңдугунун квадраттык орто кыйшайуусун тапкыла.
Жообу: 2,5

А л т ы н ч ы   г л а в а

ЧОҢ САНДАРДЫН ЗАКОНУ

§1. Алдын ала эскертүүлөр. Чебышевдин барабарсыздыгы.

Жогоруда биз, кокус чоңдук бир сыноодо бир гана мүмкүн болгон мааниге ээ болуучу чоңдук экендигин, ал маанини алдын ала билүүгө мүмкүн эместигин (толук эсепке алууга мүмүкүн болбогон көптөгөн себептер таасир эткендиктен) билгенбиз. Ар бир кокус чоңдук жөнүндө аз гана маалыматты билгендиктен жана анын кандай мааниге ээ болорун айтып бере албагандыктан, алардын жетишерлик көп сандагы суммасы туралуу дагы эч нерсе айтаалбоочудай, ал сумма эч кандай закон ченемдүүлүккө баш ийбечүдөй сезилет. Чындыгында андай эмес. Кандайдыр бир шарттар аткарылса, жетишерлик көп сандагы кокус окуялардын суммасы, кокус мүнөзүн жоготуп, закон ченемдүүлүк касиетке ээ болуп калат экен.

Тажрыйба жүзүндө кандай шарттар аткарылган учурда, жетишерлик көп сандагы кокус чоңдуктардын суммасы, закон ченемдүүлүк касиетке ээ болуп каларын билүү өтө маанилүү. Бул шарттар чоң сандардын закондору деп аталган теоремаларда көрсөтүлгөн. Аларга Чыбышевдын жана Бернуллинин теоремасы кирет (башка теоремалар да бар, бирок алар бул китепте каралбайт). Чыбышевдин теоремасы чоң сандардын закондору туралуу жалпы теорема болуп эсептелет, ал эми Бернуллиники — жекече теорема. Чыбышевдин теоремасы дискреттик жана үзгүлтүксүз кокус чоңдуктар үчүн аткарылат. Жөнөкөй болуш үчүн, аны дискреттик чоңдуктар үчүн далилдөө менен гана чектелебиз. Бул теоремаларды далилдеш үчүн Чыбышевдин барабарсыздыгын пайдаланабыз.

Дискереттик X кокус чоңдугунун бөлүштүрү закону берилсин:

X	x_1	x_2	x_n
P	p_1	p_2	p_n

Бул чоңдуктун, анын математикалык күтүүсүнөн кыйшайуусу абсалюттук чоңдугу боюнча, берилген ε оң санынан чоң эмес болуу ыктымалдыгын чамалайбыз. Эгерде ε эң кичине болсо , анда биз X чоңдугу өзүнүн математикалык күтүүсүнө эң жакын болуу ыктымалдыгын чамалаган болобуз.

Чыбышевдин барабарсыздыгы. X чоңдугунун өзүнүн математикалык күтүүсүнөн кыйшайуусу, абсалюттук чоңдугу боюнча ε оң санынан кичине болуу ыктымалдыгы 1-D(X)/ε^2 санынан кем эмес: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2$.

Далилдөө. $|X - M(X)| < \varepsilon$ жана $|X - M(X)| \geq \varepsilon$ барабарсыздыктарынын аткарылышынан турган эки окуя карам-каршы болгондуктан

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) = 1 - P(|X - M(X)| \geq \varepsilon\ ) \qquad (21)$$

болот. Ошентип, маселе $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon$ ыктымалдыгын табууга келтирелди.

Дисперсиянын аныктамасы боюнча

$$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 P_1 + [x_2 - M(X)]^2 P_2 + ... + [x_n - M(X)]^2 P_n .$$

Бул сумманын ар бир кошулуучусу терс эмес сан экендиги түшүнүктүү. $|x - M(X)| < \varepsilon$ болгон кошулуучуларды алып таштасак, барабарсыздыктын оң жагында $|x_j - M(X)| \geq \varepsilon$ болгон кошулуучулар гана калат да, сумма кичирейет. Анугыраак болсун үчүн, биринчи к кошулуучу алынып ташталды дейли (жалпылыгын бузбастан эле, мүмкүн болгон маанилер биринчи к маани үчүн $|x_i - M(X)| < \varepsilon$ болгондой номерленген деп эсептесек болот). Анда

$$D(X) \geq [x_{k+1} - M(X)]^2 P_{k+1} + [x_{k+2} - M(X)]^2 P_{k+2} + ... + [x_n - M(X)]^2 P_n$$

барабарсыздыгы келип чыгат. $|x_j - M(X)| \geq \varepsilon$, j$= \overline{k+1, n}$ барабарсыздыгынын эки жагы тең оң сан болгондуктан $|x_j - M(X)|^2 \geq \varepsilon^2$ болот. Ушуну эске алып, акыркы барабарсыздыкты күчөтүп,

$$D(X) \geq \varepsilon^2 (P_{k+1} + P_{k+2} + ... + P_n) \qquad (22)$$

түрүндө жазсак болот.

Кошуунун теоремасы боюнча, X чоңдугунун $|x_j - M(X)| \geq \varepsilon$ барабарсыздыгын канаттандырган, мүмкүн болгон $x_{к+1}$, $x_{к+2}$,...x_n маанилеринин кайсынысы болсо да бирин алыш ыктымалдыгы $(P_{k+1} + P_{k+2} + ... + P_n)$ болот:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = (P_{k+1} + P_{k+2} + ... + P_n)$$

Анда (22) барабарсыздыгы $D(X) \ge \varepsilon^2 P\,(|X - M(X)| \ge \varepsilon)$ же Р($|X - M(X)| \ge \varepsilon) \le D(X)/\varepsilon^2$ түрүнө келет. Бул формуланы (21) формуласына коюп

$$\text{Р}(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - D(X)/\varepsilon^2$$

барабарсыздыгын алабыз. Ушул барабарсыздыкты далилдөө талап кылынган.

1-эскертүү. Чебышевдин барабарсыздыгы практика жүзүндө анча деле маанилүү эмес. Себеби, көпчүлүк учурда маселе чыгарууга жетишсиз, кээде ансыз да түшүнүктүү чамалоону берет. Мисалы, $D(X) > \varepsilon^2$ жана ошондуктан $D(X)/\varepsilon^2 > 1$ болсо, анда $1 - D(X)/\varepsilon^2 < 0$ болот да Чебышевдин барабарсыздыгы кышайуунун ыктымалдыгы терс эмес сан дегенди гана түшүндүрүп калат, ал болсо ансыз деле түшүнүктүү (ар кандай ыктымалдык терс эмес сан). Бирок, Чебышыевдин барабарсыздыгынын теориялык мааниси зор. Ал Чебышевдин теоремасын длилдөөгө пайдаланылат.

§2. Чебышевдин теоремасы.

1-теорема. (Чебышевдин теоремасы). Эгерде $X_1, X_2 \ldots X_n$ эки экиден көз каранды эмес кокус чоңдуктар жана алардын дисперсиялары бир калыпта чектелген болсо (кандайдыр турактуу С санынан чоң болсо) , анда каалагандай кичине ε оң саны үчүн

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon$$

же $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

же $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - \overline{M(X)}\right| < \varepsilon\right) = 1$$ мында,

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \quad \overline{M(X)} = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}$$

орто арифметикалык чоңдуктар.

Ошентип, Чебышевдин теоремасын төмөндөгүдөй түшүнсөк болот. Эгерде жетишерлик көп сандагы кокус чоңдуктардын дисперсиялары чектүү болсо, анда алардын арифметикалык орто чоңдугунун, алардын математикалык күтүүлөрүнүн арифметикалык орто чоңдугунан айырмасы, абсалюттук чоңдугу боюнча каалагандай кичине болот, б.а. аны шексиз окуя деп эсептесек болот.

Далилдөө. $\overline{X}$-тин математикалык күтүүсү жана дисперсиясы

$$M(\overline{X}) = M(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n},$$

$$D(\overline{X}) = D(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}) = \frac{D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)}{n^2},$$

Шарт боюнча $D(X_i) \le C, i = \overline{1,n}$ болгондуктан $D(\overline{X}) \le \frac{Cn}{n^2} = \frac{C}{n}$ болот. Ушуларды эске алып $\overline{X}$ чоңдугуна Чебышевдин барабарсыздыгын колдонобуз.

$$P(\left|\overline{X} - \overline{M(X)}\right| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

Мындан $n \to \infty$ учурда пределге өтсөк $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - \overline{M(X)}\right| < \varepsilon\right) \ge 1$ келип чыгат. Ар кандай ыктымалдык бирден чоң болбостугун эске алсак $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - \overline{M(X)}\right| < \varepsilon\right) = 1$ же

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

келип чыгат. Теорема далилденди.

Чебышевдин теоремасында, кокус чоңдуктардын математикалык күтүүлөрү ар түрдүү деп эсептегенбиз. Тажрыйбада кокус чоңдуктар бир эле математикалык күтүүгө ээ болуп калган көп учурлар кездешет. Эгерде бул чоңдуктардын дисперсиялары чектелген болушса, Чебышевдин теоремасын колдонууга болот.

Ар бир кокус чоңдуктардын математикалык күтүүлөрү бир эле а санына барабар болсун жана алардын дисперсиялары чектелүү болсун. Бул учурда $M(\overline{X}) = \frac{a + a + ... + a}{n} = a$, б.а. арифметикалык орто чоңдуктун математикалык күтүүсү да а болуп, Чебышевдин теоремасы төмөндөгүдөй айтылат:

эгерде $X_1, X_2, \ldots, X_n$ —эки экиден көз каранды эмес кокус чоңдуктар болсо жана алардын математикалык күтүүлөрү барабар, дисперсиялары бир калыпта чектелген болсо, анда каалагандай ε оң саны үчүн, $\left|\frac{X_1 + X_2 + ...X_n}{n} - a\right| < \varepsilon$ же $\left|\overline{X} - a\right| < \varepsilon$ барабарсыздыгынын ыктымалдыгы, n жетишерлик чоӊ болгондо, бирге каалагандай жакын болот.

Башкача айтканда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}-a\right|<\varepsilon\right)=\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1$$

Далилденген теореманын мааниси мындай: көз каранды эмес жетишерлик көп сандагы кокус чоӊдуктардын ар бири, өздөрүнүн математикалык күтүүсүнөн алыс маанилерди алса дагы, алардын арифметикалык орто чоӊдугу эӊ чоӊ ыктымалдык менен белгилүү бир санга, тагыраак айтканда $\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}$ санына (жекече учурда *а* санына) жакын мааниге ээ болот. Башкача айтканда, кокус чоӊдуктардын чачылышы чоӊ болушу мүмкүн, ал эми алардын арифметикалык орто чоӊдугу аз чачылат.

Ошентип, ар бир кокус чоӊдук кандай мааниге ээ болорун алдын ала билүүгө болбойт, бирок алардын арифметикалык орто чоӊдугу кандай мааниге ээ болорун алдын ала билүүгө болот.

Демек, жетишерлик көп сандагы, дисперсиялары бир калыпта чектүү болгон, кокус чоӊдуктардын арифметикалык орто чоӊдугу кокустан болуучулук мүнөзүн жоготот. Бул болсо, ар бир кокус чоӊдуктун өзүнүн математиккалык күтүүсүнөн кыйшайуусу оӊ дагы терс дагы болушу мүмкүн болуп, арифметикалык орто чоӊдукта алар өз ара жоюшуп кетүү мүмкүнчүлүгү менен түшүндүрүлөт.

Чебышевдин теоремасы дискреттик кокус чоӊдуктар үчүн дагы үзгүлтүксүз чоӊдуктар үчүн дагы аткарылат. Бул теорема, диалектикалык материализмдин кокустук менен зарылдыктын байланышы жөнүндөгү окуусунун ачык мисалы боло алат.

§3. Чебышевдин теоремасынын практикалык мааниси.

Чебышевдин теоремасын колдонуп практикалык маселелерди чыгарууга мисалдарды келтиребиз.

Демейде кандайдыр бир физикалык чоӊдукту өлчөө үчүн, бир нече өлчөө жүргүзүлүп туруп, алардын арифметикалык орто чоӊдугун, өлчөнүп жаткан чоӊдуктун чени катары кабыл алышат.

Кандай шарттарда өлчөөнүн жолун тура деп табууга болот? Бул суроого жоопту Чебышевдин теоремасы (анын жекече түрү) берет.

Чындыгында эле, ар бир өлчөөнүн жыйынтыгын $X_1, X_2, \ldots, X_n$ кокус чоңдуктары катары карайбыз. Бул чоңдуктар:

1) эки экиден көз каранды эмес болушса;

2) бир эле математикалык күтүүгө ээ болушса;

3) дисперсиялары бир калыпта чектелген болсо,

анда, аларга Чебышевдин теоремасын колдонууга болору түшүнүктүү.

Эгерде ар бир өлчөөнүн жыйынтыгы башка өлчөөлөрдүн жыйынтыктары менен байланышпаса, биринчи шарт аткарылат. Ал эми өлчөө дайыма бир түрдүү ката кетирилбестен жүргүзүлсө экинчи шарт аткарылат. Бул учурда бардык чоңдуктардын математикалык күтүүлөрү бирдей болот да, ал өлчөнүп жаткан чоңдуктун чыныгы a ченине барабар болот. Аспап ченөнүүн белгилүү бир тактыгын камсыз кылса, анда үчүнчү шарт аткарылат. Бул учурда ар бир өлчөөнүн жыйынтыгы ар түрдүү болсо дагы, алардын чачылышы чектүү болот. Эгерде көрсөтүлгөн шарттардын баары аткарылса, өлчөөнүн жыйынтыгына Чебышевдин теоремасын колдоно алабыз: жетишерлик чоң n үчүн

$$\left|\left(X_1 + X_2 + \ldots + Xn\right)/n - a\right| < \varepsilon$$

барабарсыздыгынын ыктымалдыгы бирге каалагандай жакын. Башкача айтканда, жетишерлик көп сандагы өлчөөлөрдүн арифметикалык орточо чоңдугунун, өлчөнүп жаткан чоңдуктун чыныгы маанисинен кыйшайуусу(четтөөсү) эң кичине экендиги шексиз. Ошентип, Чебышевдин теоремасы өлчөөнүн жогоруда айтылган жолун кайсыл учурда колдонууга болор шартын көрсөтөт. Бирок, өлчөөнүн санын көбөйтө берип, каалагандай чоң тактыкка жетишүүгө болот деген ой тура эмес. Себеби, аспаптын өзү өлчөөнү кандайдыр бир $\pm a$ тактыгында көрсөтөт; демек ар бир өлчөөнүн жыйынтыгы, ошондуктан, алардын арифметикалык орто чоңдугу белгилүү бир, аспаптын тактыгынан ашпаган тактыкта гана алынат.

Математикалык статистикада кеңири колдонула турган тандоо методу Чебышевдин теоремасына негизделген. Ал методдун маңызы, салыштырмалуу аз эле тандалып алынгандар боюнча, жалпы топко карата жыйынтык чыгарууга болгондугунда жатат. Мисалы, бир үймөк пахтанын сапаты туралуу, үймөктүн ар кандай жеринен тандалып алынган, салыштырмалуу аз эле пахта буласынын сапаты боюнча, жыйынтык чыгарылат.

Тандалып алынган пахта анча көп болбогону менен андагы пахта булары жетишерлик көп.

Экинчи мисал катары, тандалып алынган буудайлар аркылуу бардык будайлардын сапаты жөнүндө жыйынтык чыгарууну келтирсек болот. Буудайдын жалпы санына караганда тандалып алынган буудай аз эле болгон менен, ал буудайларды өзүнчө алганда көп эле болот. Келтирилген мисалдардан Чебышевдин теоремасынын практикалык мааниси чоң экени көрүнүп турат.

§4. Бернуллинин теоремасы.

Ар биринде А окуясынын аткарылыш ыктымалдыгы Р болгон көз каранды эмес n сыноо жүргүзүлсүн. А окуясы аткарылышынын салыштырма жыштыгы кандай болорун алдын ала бүлүүгө болобу? Бул суроого оң жооп Якоб Бернулли тарабынан далилденген (1713 жылы жарык көргөн) теорема берет. Бул теорема «Чоң сандардын закону» деп аталып калган жана ыктымалдыктар теориясынын илим катары негиздилишинин башталышы болгон. Бернуллинин далилдөөсү татаал болгон; анын жөнөкөй далилдениши П.Л. Чебышев тарабынан 1846 ж. берилген.

2-теорема (Бернуллинин теоремасы). Ар биринде А окуясынын аткарылыш ыктымалдыгы Р болгон, жетишерлик көп сандагы көз каранды эмес n сыноо жүргүзүлсүн. Анда, А окуясынын салыштырма жыштыгынын Р ыктымалдыгынан кыйшайуусу, абсолюттук чоңдугу боюнча каалагандай кичине болуш ыктымалдыгы, бирге каалагандай жакын болот.

Башкача атканда, эгер ε-каалагандай кичине сан болсо, анда теореманын шарттары сакталганда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|<\varepsilon\right)=1$$

барабардыгы аткарылат.

Далилдөө. X_i, $i=\overline{1,n}$ аркылуу i-сыноодогу окуянын аткарылыш саны болгон кокус чоңдукту белгилебиз. X_i эки гана мааниге ээ болушу мүмкүн: 1 (р ыктымалдыгы менен i-сыноодо А аткарылды) жана 0 (g=1-p ыктымалдыгы менен A аткарылган жок). Каралып жаткан чоңдуктар үчүн Чебышыевдин теоремасын колдонууга болобу? Эгерде, кокус окуялар эки- экиден көз каранды эмес болушса жана алардын дисперсиялары чектелген болсо, колдонууга болот. Бул эки шарт тең аткарылат. Чындыгында эле, сыноолор көз каранды эмес болгондуктан $X_1, X_2, \dots, X_n$ чоңдуктары эки- экиден көз каранды эмес. X_i-нин , $i=\overline{1,n}$ дисперсиясы $p_i g_i$ болору белгилүү; $p_i+g_i=1$, болгондуктан $p_i g_i$ көбөйтүндүсү i-нин бардык маанилеринде $\frac{1}{4}$-ден ашпайт. Себеби, турактуу болгон эки сандын көбөйтүндүсү, көбөйтүүчүлөр бири бирине барабар болгон учурда эң чоң мааниге ээ болору белгилүү. Биздин учурда $p_i+g_i=1$, демек $p_i = g_i = \frac{1}{2}$ болгондо $g_i p_i$ эң чоң мааниге ээ болот, б. а.

$$g_i p_i \le \frac{1}{4}.$$

Ошондуктан, бардык Xi чоңдуктарынын дисперсиялары $C = \frac{1}{4}$ саны менен чектелген.

Каралып жаткан чоңдуктарга Чебышевдин теоремасын (жекече учур) колдонуп

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n - a\right| < \varepsilon) = 1$$

барабардыгын алабыз.

Бир сыноодогу окуянын аткарылыш саны, анын ыктымалдыгына барабар болгондуктан $M(X_i) = a = p$ болот да, жогорку барабардык $\lim_{n\to\infty} P(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - P\right| < \varepsilon) = 1$ түрүнө келет.

$(X_1+X_2+\dots+X_n)/n$ бөлчөгү A окуясынын m/n жыштыгы болорун көрсөтүү гана калды. Эгерде сыноолордо A окуясы аткарылса $X_1, X_2, X_3 \dots, X_n$ чоңдуктарынын ар бири 1-ге барабар, A аткарылбаса бул чоңдуктар нөлгө барабар. Демек, n сыноодо A окуясы m жолу аткарылса $X_1+X_2+\dots+X_n = m$ болот. Анда $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{m}{n}$ салыштырма жыштык болот. Муну эске алсак, далилдөө талап кылынган $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon\right) = 1$ барабардыгын алабыз.

2-эскертүү. Бернуллинин теоремасынан, сыноонун саны чексиз көбөйгөн сайын салыштырма жыштык, ыктымалдыка чексиз жакындайт деген жыйынтык чыгарууга болот, б.а.теоремадан $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=P$ барабардыгы келип чыгат. Теоремада сөз n чексиз көбөйгөн сайын $\frac{m}{n}$ салыштырма жыштыгы P ыктымалдыгына жакындашынын ыктымалдыгы чоңое тургандыгы гана жөнүндө болуп жатат.

Ошентип, салыштырма жыштыктын ($\frac{m}{n}$) ыктымалдыка жыйналуусу, анализдеги кадимки жыйналуудан айырмаланат. Муну белгилеш үчүн «ыктымалдык боюнча жыйналуу» түшүнүгүн киргизебиз. Эгерде ар кандай $0<\varepsilon$ үчүн $|X_n - X|<\varepsilon$ барабарсыздыгынын ыктымалдыгы $n\to\infty$ учурда бирге умтулса, анда $X_1, X_2, \ldots X_n$ кокус чоңдуктарынын удалаштыгы X чоңдугуна ыктымалдыгы боюнча жыйналат деп айтылат. Тагыраак айтканда , бул эки түрдөгү жыйналуулардын айырмасы төмөндөгүдөй: эгерде $n\to\infty$ учурда $\frac{m}{n}$ салыштырма жыштыгы P-га анализдагидей умтулса, анда каалагандай бир чоң n=N-ден баштап, андан аркы бардык n үчүн, $\left|\frac{m}{n}-P\right|<\varepsilon$ барабарсыздыгы сөзсүз аткарылат; ал эми $\frac{m}{n}$ жыштыгы $n\to\infty$ учурда P-га ыктымалдыгы боюнча умтулса, анда $\left|\frac{m}{n}-P\right|<\varepsilon$ барабарсыздыгы кээ бир n үчүн аткарылбашы да мүмкүн.

Ошентип, Бернуллинин теоремасы $n\to\infty$ учурда салыштырма жыштык, ыктымалдык боюнча P-га умтуларын ырастайт. Кыскача айтканда Бернуллинин теоремасын

$$\frac{m}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{ыкт}P$$

түрүндө жазышат.

Биз көрүп тургандай, Бернуллинин теоремасы, жетишерлик көп сандагы сыноолордо салыштырма жыштык эмне үчүн туруктуулук касиетке ээ болорун түшүндүрүп турат.

МАСЕЛЕЛЕР

1. «Ыктымалдык боюнча жыйналуу» түшүнүгүн колдонуп, Чебышевдин теоремасын жазгыла.
2. Эгерде D(X)=0,001 болсо, Чебышевдин барабарсыздыгын колдонуп, $|X - M(X)| < 0,1$ барабарсыздыгынын ыктымалдыгын чамалагыла.

Жообу: $P \geq 0,9$

3. Эгерде D(X)=0,04; $P\left(|X - M(X)| < \varepsilon\right) > 0,9$ болсо, Чебышевдин барабарсыздыгын пайдаланып ε ду тапкыла .

Жообу: 0,2

Ж е т и н ч и   г л а в а

КОКУС ЧОҢДУКТУН ЫКТЫМАЛДЫКТАРЫН БӨЛҮШТҮРҮҮ ФУНКЦИЯСЫ ЖАНА БӨЛҮШТҮРҮҮ ТЫГЫЗДЫГЫ

§1. Бөлүштүрүү функциясы

Дикреттик кокус чоңдукту, анын мүмкүн болгон маанилерин жана алардын ыктмалдыктарын тизмелөө аркылуу берүүгө мүмкүн экендигин белгилүү. Бөлүштүрүү законду мындай жол менен берүү жалпы боло албайт, мисалы, аны үзгүлтүксүз чоңдуктар үчүн колдонуууга болбойт.

Чындыгында эле, X үзгүлтүксүз кокус чоңдугунун мүмкүн болгон маанилери (а, в) интервалын толук толтурсун. Анын бардык маанилеринин тизмесин түзүш мүмкүнбү? Мүмкүн эместиги түшүнүктүү. Бул мисалдан кийин, ар кандай кокус чоңдукту жалпы түрдө берүүгө мүмкүн болгон жолду табууга болобу деген суроо туулат. Ушул максатта, кокус чоңдуктардын ыктымалдыктарын бөлүштүрүү функциясын киргизебиз. х-каалагандай анык сан болсун. X чоңдугу х тен кичине мааниге ээ булуш ыктымалдыгын, б.а. X<x окуясынын ыктымалдыгын, F(x) аркылуу белгилейбиз.

x өзгөргөндө F(x) өзгөрөрү тшүнүктүү, б.а. F(x) x тен функция.

<u>1-аныктама</u>. Сыноонун натыйжасында, X чоңдугу x тен кичине мааниге ээ болу ыктымалдыгын аныктоочу F(x) функциясы, кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы деп аталат, б.а.

$$F(x) = P(X < x).$$

Бул барабардыкты геометриялык түрдө төмөндөгүдөй түшүндүрсөк болот: F(x) функциясы, кокус чоңдук сан огунда x чекитинен сол жакта жаткан маанилерге ээ болу ыктымалдыгын түшүндүрөт. Кээде «бөлүштүрүү функциясы» деген терминдин ордуна «интегралдык функция» деген терминди колдонушат. Себеби, F(x) функциясы интеграл түрүндө туюнтулат. Ал жөнүндө кийинчерээк сөз болот.

Эми үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун так аныктамасын берсек болот: эгерде кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы үзгүлтүксүз, бөлүктүү-дифференцирленүүчү функция жана анын туундусу үзгүлтүксүз болсо, анда ал кокус чоңдук үзгүлтүксүз кокус чоңдук деп аталат.

Бөлүштүрүү функциясы төмөндөгү касиеттерге ээ болот.

1-касиет. Бөлүштүрүү функциясынын маанилери [0;1] кесиндисинде жатат: $0 \le F(X) \le 1$.

Далилдөө. Бул касиет F(x) функциясы, аныктама боюнча, ыктымалдыкты түшүндөргөнүнөн келип чыгат: ар кандай P ыктымалдыгы $0 \le P \le 1$ барабарсыздыгын канааттандырары белгилүү.

2-касиет. F(x)-кемибөөчү функция, б.а. эгерде $x_1<x_2$ болсо $F(X_1) \le F(X_2)$.

Далилдөө. $x_1<x_2$ болсун. X чоңдугу x_2-ден кичине мааниге ээ болот деген окуяны, төмөндөгүдөй, бирикпөөчү эки окуяга бөлсөк болот:

1. X чоңдугу x_1-ден кичине мааниге $P(X<x_1)$ ыктымалдыгы менен ээ болот;
2. X чоңдугу $x_1 \le X < x_2$ барабардыгын канааттандырган маанилерге $P(x_1 \le X < x_2)$ ыктымалдыгы менен ээ болот.

Кошуунун теоремасы боюнча $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$

Мындан
$$P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$$
$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$$

Ар кандай ыктымалдык терс эмес сан болгондуктан $F(x_2) - F(x_1) \ge 0 \quad же \quad F(x_1) \le F(x_2)$ болот. 2-касиет далилденди.

1-натыйжа. Кокус чоңдуктун (а, в) интервалында жаткан маанилерге ээ болу ыктымалдыгы, анын бөлүштүрүү функциясынын ушул интервалындагы өсүндүсүнө барабар:

$$P(a \le X < в) = F(в) - F(a) \tag{23}$$

1-мисал. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы

берилген: $F(x) = \begin{cases} 0 & эгер \quad x \le -1 \\ x/4 + 1/4 & эгер \quad -1 < x \le 3 \\ 1 & эгер \quad x > 3 \end{cases}$

Сыноонун натыйжасында X-тин (0, 2) интервалында жаткан маанилерге ээ болу ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. (23) формуласы боюнча

$$P(0 \le x < 2) = F(2) - F(0)$$

(0, 2) интервалында $F(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}$ болгондуктан

$$F(2) - F(0) = \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{0}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Демек $P(0 \le x < 2) = 1/2.$

2-натыйжа. Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугунун белгилүү бир мааниге ээ болу ыктымалдыгы нөлгө барабар.

Чындыгында эле, (23) формуласында а=x_1, в=$x_1+\Delta$x болсо $P(x_1 \le x < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$ болот. F(x) функциясы x_1 чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан $\Delta x \to 0$ учурда $F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$ айырмасы дагы нөлгө умтулат, ошондуктан P(x=x_1)=0.

Бул касиеттин негизинде

$$P(a \le x < в) = P(a < x < в) = P(a < x \le в) = P(a \le x \le в)$$

болору түшүнүктүү.

Мисалы, $P(a \le x < в) = P(a < x < в)$ барабардыгы төмөндөгүдөй далилденет:

$$P(a < x \le в) = P(a < x < в) + P(x = в) = P(a \le x \le в).$$

Ошентип, үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун белгилүү бир мааниге ээ болушунун ыктымалдыгы жөнүндө сөз кылуунун кереги жок, бирок анын маанилеринин, эң кичине болсо дагы, кандайдыр бир интервалда жатуу ыктымалдыгы жөнүндө сөз кылууга болот. Бул болсо, практикалык маселелердин суроолоруна толук жооп берет. Мисалы, практика жүзүндө тетиктин өлчөмдөрү белгилүү бир чектерден ашпоо ыктымалдыгы талап кылынат. Тетиктин өлчөмдөрү, долбоордогу өлчөм менен дал келиш ыктымалдыгынын практикада кереги жок, себеби бул ыктымалдык эң кичине.

$\mathrm{P}(X = x_1)$ ыктымалдыгы нөлгө барабар болушунан $(X = x_1)$ окуясы мүмкүн эмес окуя деген жыйынтык чыгарууга болбостугун эскерте кетели (эгерде ыктымалдыктын классикалык аныктамасы менен чектелбесек). Чындыгында эле, сыноонун натыйжасында кокус чоңдук сөзсүз бир мааниге ээ болот, кээ бир учурда ал маани x_1 болуп калышы мүмкүн.

3-касиет. Эгерде кокус чоңдуктун маанилери (а,в) интервалында жатса, анда

1. эгер $x \le a$ болсо $F(x) = 0$;
2. эгер $x \ge в$ болсо $F(x) = 1$.

Далилдөө.I $x_1 < a$ болсун. Анда $X < x_1$ окуясы мүмкүн эмес окуя (шарт боюнча x_1-ден кичине маани жок) жана ошондуктан, анын ыктымалдыгы нөлгө барабар.

2. $x_2 \ge в$ болсун. Анда $X \le x_2$ окуясы шексиз окуя (шарт боюнча X-тин бардык маанилери x_2-ден кичине)жана ошондуктан, анын ыктымалдыгы бирге барабар.

3-натыйжа. Эгерде үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери бүткүл 0х огунда жатса, анда төмөндөгүдөй пределдик барабардыктар аткарылат:

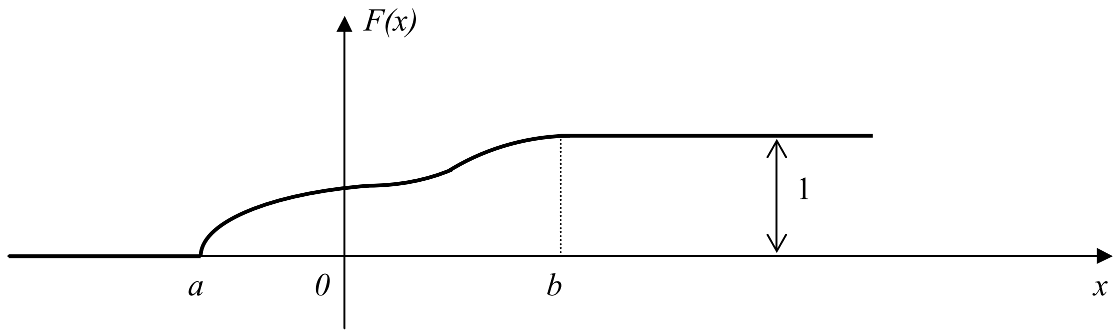
$$\lim_{n\to-\infty} F(x=0),\ \lim_{n\to\infty} F(x)=1.$$

§2 Бөлүштүрүү функциясынын графиги.

Далилденген касиеттер, үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун бөлүштүүрү функциясынын графигин чийүүгө мүмкүндүк берет.

График, $y=0$, $y=1$ түз сызыктары менен чектелген тилкеде жатат (биринчи касиет).

(а,в) интервалында F(x) өсүүчү функция болгондуктан (2-касиет) график, х өскөндө жогору карай көтөрүлөт. Графиктин ординаталары $x\le a$ болгондо нөлгө, $x\ge в$ болгондо бирге барабар (3-касиет). Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясынын графиги 2в-чиймеде көрсөтүлгөн.



2в-чийме

1-эскертүү. Дискреттик кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясынын графиги тепкич түрүндөгү функция. Буга мисал келтирип ишенсек болот.

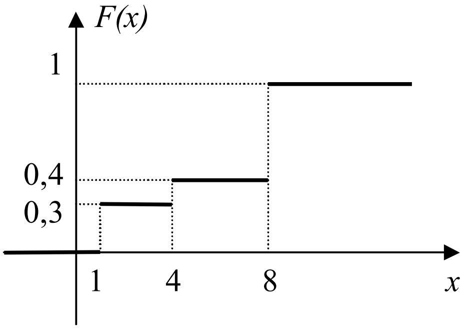
2-мисал. Дискреттүү Х чоңдугунун бөлүштүрүү закону

X	1	4	8
P	0,3	0,1	0,6

болсун. Анын бөлүштүрүү функциясын тапкыла жана графигин чийгиле.

Чыгаруу. Эгер $x<1$ болсо, анда $F(x)=0$ (3 касиет). Эгер $1\le x<4$ болсо, анда $F(x)=0{,}3$, себеби X бир гана 1 маанисин, 0,3 ыктымалдыгы менен алышы мүмкүн. Эгер $4\le x<8$ болсо, $F(x)=0{,}4$.

Чындыгында эле, эгерде x, $4\le x<8$ барабардыгын канааттандырса, анда ал 1 жана 4 деген маанилерге ээ болушу мүмкүн, алар бирикпөөчү окуялар $(x=1\ болсо\ x\ne 4)$. Кошуунун теоремасы боюнча $X<x$ окуясынын бул учурдагы ыктымалдыгы 0,3+0,1=0,4.



3-чийме

Эгер $x>8$ болсо, анда $F(x)=1$ себеби $x>8$ окуясы шексиз окуя, анын ыктамалдыгы бирге барабар. Ошентип, X-тин бөлүштүрүү функциясы

$$F(x)=\begin{cases} 0 & эгер\quad x\le 1 \\ 0{,}3 & эгер\ 1<x\le 4 \\ 0{,}4 & эгер\ 4<x\le 8 \\ 1 & эгер\quad x>8 \end{cases}$$

Бул функциянын графиги 3-чиймеде көрсөтүлгөн.

§3 Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун ыктымалдыктарынын бөлүштүрүү тыгыздыгы

Жогоруда, үзгүлтүксүз кокус чоңдукту анын бөлүштүрүү функциясы аркылуу берүүгө болорун билдик. Үзгүлтүксүз кокус чоңдукту, бөлүштүрүү тыгыздыгы же ыктымалдык тыгыздык деп, аталган функцияны пайдаланып, берүүгө да болот (ал функцияны кээде дифференциалдык функция деп аташат).

2-аныктама. Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугунун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү тыгыздыгы деп, бөлүштүрүү функциясынын биринчи туундусуна барарбар болгон f(x) функциясы аталат, б.а. $f(x)=F^1(x)$.

Бул аныктамадан бөлүштүрүү функциясы бөлүштүрүү тыгыздыгынын баштапкы функциясы болору түшүнүктүү. Дискреттик кокус чоңдуктардын бөлүштүрүү законторун бөлүштүрүү тыгыздык аркылуу берүүгө болбостугун эскерте кетели. Себеби, үзгүлтүктүү кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы тепкич түрүндөгү үзгүлтүктүү функция болгондуктан, анын туундусу аныкталбайт же нөлгө барабар.

§4 Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун белгилүү бир интервалга тийиштүү болуш ыктымалдыгы.

Бөлүштүрүү тыгыздыкты билсек, кокус чоңдуктун белгилүү бир интервалга тийиштүү болуш ыктымалдыгын табууга болот. Ал төмөндөгү теоремага негизделген.

1-теорема. Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугунун мүмкүн болгон маанилеринин (a,b) интервалында жатуу ыктымалдыгы, бөлүштүрүү тыгыздыгынан а дан в га чейинки алынган аныкталган интегралга барабар, б.а.

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (24)$$

Далилдөө. (23) формуласын пайдаланабыз:
$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$. Ньютон-Лейбництин формуласы боюнча

$$F(a) - F(b) = \int_a^b f(x)dx \quad , . \quad f(x) = F^1\ (x).$$

Анда, $P(a \le x < b) = P(a < x < b)$ барабардыгын эске алып

$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$ формуласын алабыз.

Алынган жыйынтыктын геометриялык мааниси төмөндөгүдөй: үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун маанилеринин (a,b) интервалында жатуу ыктымалдыгы, $f(x)$ ийри сызыгы, $x = a,\ x = b$ түз сызыктары жана Ox огу менен чектелген, ийри сызыктуу трапециянын аянтына барабар.

2-эскертүү. Эгерде $f(x)$ -жуп функция жана интервалдын четтери координата башталышына карата симметриялуу болсо, анда $P(-a \le x \le a) = P(|x| < a) = 2\int_0^a f(x)dx$ болот.

3-мисал. X кокус чоңдуктун ыктымалдыктар тыгыздыгы

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{эгер} \quad x \le 0.5 \\ 2x & \text{эгер} \quad 0,5 < x \le 1 \\ 0 & \text{эгер} \quad x > 1 \end{cases}$$

болсо, сыноонун натыйжасында анын маанилеринин (0,5; 1) интервалында жатуу ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Изделип жаткан ыктымалдык

$$P(0{,}5 < x < 1) = 2\int_{0,5}^{1} xdx = x^2 I_{0,5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75\,.$$

§5 Кокус чондуктун берилген бөлүштүрүү тыгыздыгы боюнча бөлүштүрүү функциясын табуу.

Бөлүштүрүү тыгыздык берилсе, ал аркылуу бөлүштүрүү функцияны $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ формуласы боюнча табуурга болот.

Чындыгында эле, аныктама боюнча $F(x) = P(X < x)$ болгондуктан, $X<x$ барабарсыздыгын $-\infty < X < x$ түрүндө жазсак $F(x) = P(-\infty < X < x)$ болот.

(24) формуласында $a = -\infty, b = x$ деп алсак $P = (-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

же $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ келип чыгат.

Ошентип, бөлүштүрүү тыгыздыкты билсек, бөлүштүрүү функциясын аныктай алабыз. Бөлүштүрүү функциясы белгилүү болсо, бөлүштүрүү тыгыздык $f(x) = F'(x)$ формуласы боюнча аныкталары түшүнүктүү.

4-мисал. X кокус чоңдугунун берилген бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{эгер} \quad x \le a \\ 1/(b-a) & \text{эгер} \quad a < x \le b \\ 0 & \text{эгер} \quad x > b \end{cases}$$

боюнча бөлүштүрүү функциясын тапкыла.

Чыгаруу. $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ формуласын пайдаланабыз. Эгер

$$x \le a \quad \textit{болсо, анда} \quad f(x) = 0, \quad \textit{ошондуктан} \quad F(x) = 0\,.$$

Эгер $a < x \le b \quad \textit{болсо, анда} \quad f(x) = 1/(b-a), \quad \textit{ошондуктан}$

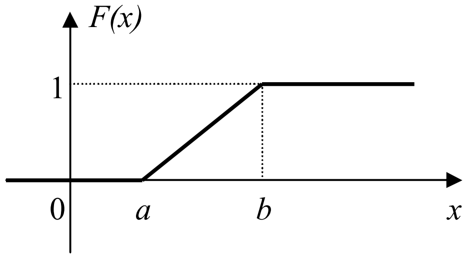
$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \frac{x-a}{b-a}$$

Эгер $x>b$ болсо, анда $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a}0dx+\int\limits_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dx+\int\limits_{b}^{x}0dx=\frac{b-a}{b-a}=1$

Ошентип, изделип жаткан бөлүштүрүү функциясы

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{эгер} \quad x\le a\\ (x-a)/(b-a) & \text{эгер} \quad a<x\le b\\ 1 & \text{эгер} \quad x>b\end{cases}$$

Бул функциянын графиги 4-чиймеде көрсөтүлгөн.



4 - чийме

§6 Бөлүштүрүү тыгыздыктын касиеттери.

1-касиет. Бөлүштүрүү тыгыздык терс эмес функция:

$$f(x)\ge 0$$

Далилдөө. Бөлүштүрүү функциясы кемибечүү функция болгондуктан, анын туундусу $F'(x)=f(x)$ терс эмес. Бул геометриялык түрдө, бөлүштүрүү тыгыздыгынын графиги $0x$ огонун жогору жагында же $0x$ огунун өзүндө жатарын билдирет.

Бөлүштүрүү тыгыздыктын графигин, бөлүштүрүү ийри сызыгы деп аташат.

2-касиет. Бөлүштүрүү тыгыздыгынан $(-\infty;\infty)$ интервалы боюнча алынган өздүк эмес интеграл бирге барабар:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$$

Далилдөө. Өздүк эмес $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ интегралы кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери $(-\infty;\infty)$ интервалында жатат деген окуянын ыктымалдыгын түшүндүрөт. Ал окуя болсо шексиз окуя экендиги түшүнүктүү, демек, анын ыктымалдыгы бирге барабар. Бул геометриялык түрдө $0x$, огу жана бөлүштүрүү ийри сызыгы менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын бардык аянты бирге барабар дегенди түшүндүрөт.

Жекече учурда, кокус чоңдуктун бардык маанилери (a,b) интервалында жатса, анда $\int_a^b f(x)dx = 1$ болот.

5-мисал. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы $f(x) = \frac{a}{e^{-x}+e^{x}}$.

Параметр a -ны тапкыла.

Чыгаруу. Бөлүштүрүү тыгыздык $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ барабардыгын канааттандырат, ошондуктан $a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = 1$ болуш керек.

Мындан, $a = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}}$ болот. Аныкталбаган интегралды таап алабыз:

$$\int \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = \int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx = arctge^{x}$$

Анда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = \lim_{\substack{b\to\infty \\ c\to\infty}} \int_b^c \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = \lim_{c\to\infty}(arctge^{c}) + \lim_{b\to\infty}(-arctge^{b}) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Ошентип, изделип жаткан параметр $a = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

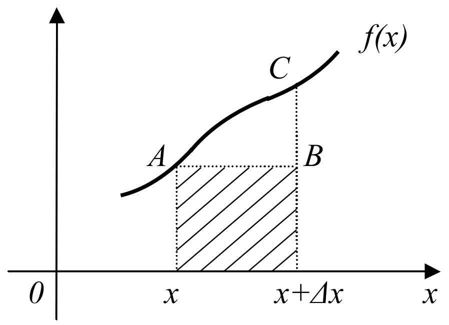
3-касиет (бөлүштүрүү тыгыздыкгын ыктымалдык мааниси). Узгүлтүксүз X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы $F(x)$ болсун. Аныктама боюнча X-тин бөлүштүрүү тыгыздыгы $f(x) = F'(x)$ же $f(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ болот.

$F(x+\Delta x)-F(x)$ айырмасы X чоңдугунун маанилери ($x,(x+\Delta x)$) интервалында жатыш ыктымалдыгын түшүндүрөрү белгилүү. Ошондуктан, $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ катышынын $\Delta x \to 0$ учурдагы предели, X кокус чоңдугунун x чекитиндеги бөлүштүрүү тыгыздыгына барабар болот.

Демек, $f(x)$ функциясы ар кандай x чекитиндеги ыктымалдыктардын бөлүштүрүү тыгыздыгын аныктайт.

Дифференциялык эсептөөлөрдөн $F(x+\Delta x)-F(x)\approx dF(x)=F'(x)dx$ болору белгилүү, $F'(x)=f(x), \Delta x = dx$ болгондуктан $F(x+\Delta x)-F(x)\approx f(x)dx$ келип чыгат.

Бул барабардыктын ыктымалдык мааниси төмөндөгүдөй: кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилеринин ($x,(x+\Delta x)$) интервалында жатуу ыктымалдыгы, жакындаштырылган түрдө, ыктымалдыктардын x чекитиндеги бөлүштүрүү тыгыздыгын, ал интервалдын узундугуна көбөйткөн көбөйтүндүсүнө барабар. Бул жыйынтыкты геометриялык түрдө төмөндөгүдөй талкууласак болот: кокус чоңдуктун маанилери ($x,(x+\Delta x)$) интервалында жатыш ыктымалдыгы, жакындаштырылган түрдө, негизи Δx, бийиктиги *f(x)* болгон тик бурчтуктун аянтына барабар.



5-чийме

Чындыгында эле, $f(x).\Delta x$; 5-чиймедеги боелгон тик бурчтуктун аянтына барабар болот да, ал ийри сызыктуу трапециянын аянтына барабар болгон $\int_{x}^{x+\Delta x} f(x)dx$ интегралы менен аныкталган чыныгы ыктымалдыкка, жакындаштырылган гана түрдө барабар болору көрүнүп турат. Бул учурда кетирилген ката ийри сызыктуу АВС үч бурчтугунун аянтына барабар.

МАСЕЛЕЛЕР

1. Х кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad эгер \quad x \le -1 \\ x/3+1/3 \quad эгер \quad -1 < x \le 2 \\ 1 \quad эгер \quad x > 2 \end{cases}$$

Сыноонун натыйжасында X-тин маанилери]0; 1[интервалында жатуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу:1/3

2. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы

$$F(x)=\begin{cases} 0 & эгер \quad x\le 2 \\ x/2-1 & эгер \quad 2<x\le 4 \\ 1 & эгер \quad x>4 \end{cases}$$

Сыноонун натыйжасында X-тин маанилери (2,3) интервалында жатуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу:1/2

3. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү закону

X	2	6	10
P	0,5	0,4	0,1

Бул чоңдуктун бөлүштүрүү функциясынын графигн түзгүлө.

4. Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү тыгыздыгы берилген:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & эгер \quad x\le -\Pi/2 \\ a\cos x & эгер \quad -\Pi/2<x\le \Pi/2 \\ 0 & эгер \quad x>\Pi/2 \end{cases}$$

a коэффицентин тапкыла.

Жообу: $a=1/2$

5. Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү жыштыгы берилген:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & эгер \quad x\le 0 \\ a\sin x/2 & эгер \quad 0<x\le \Pi \\ 0 & эгер \quad x>\Pi \end{cases}$$

Бул чоңдуктун: а)бөлүштүрүү функциясын;

б) сыноонун натыйжасында $(0;\Pi/4)$ интервалында жаткан маанилерге ээ болу ыктымалдыгын;

тапкыла.

Жообу: а) $$F(x)=\begin{cases} 0 & эгер \quad x\le 0 \\ (1-\cos x)/2 & эгер \quad 0<x\le \pi \\ 1 & эгер \quad x>\pi \end{cases}$$

б) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

6. Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы берилген:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & эгер \quad x\le 0 \\ x & эгер \quad 0<x\le 1 \\ 1 & эгер \quad x>1 \end{cases}$$

Анын бөлүштүрүү тыгыздыгын тапкыла.

Жообу: (0,1) интервалында $f(x)$=1; ал интервалдын сыртында $f(x)$=0

7. Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы берилген:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \textit{эгер} \quad x \le 0 \\ (1-\cos x)/2 & \textit{эгер} \quad 0 < x \le \pi \\ 1 & \textit{эгер} \quad x > \pi \end{cases}$$

Анын бөлүштүрүү тыгыздыгын тапкыла.

Жообу: $(0, \pi)$ интервалында $f(x)=\frac{\sin x}{2}$, бул интервалдындын сыртында $f(x)=0$.

С е г и з и н ч и г л а в а

КОКУС ЧОҢДУКТАРДЫН БӨЛҮШТҮРҮҮ ЗАКОНДОРУ

§1 Ыктымалдыктардын бир калыпта бөлүштүрүлүш закону.

Практикада, үзгүлтүксүз кокус чоңдуктардын бөлүштүрүшүнүн ар түрдүү формалары менен кездешүүгө туура келет. Үзгүлтүксүз чоңдуктардын бөлүштүрүү тыгыздыктарын дагы, б ө л ү ш т ү р ү ү з а к о н д о р деп аташат.

Мисалы, көпчүлүк учурда бир калыпта бөлүштүрүлгөн законду карайбыз. Нормальдык жана көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн закондор кийинки главада каралат.

1-аныктама. Эгерде кокус чоңдуктун мүмкүн болгон бардык маанилери жаткан интервалда, анын бөлүштүрүү тыгыздыгы турактуу мааниге ээ болсо, анда мындай бөлүштүрүү-ыктымалдыктардын бир калыпта бөлүштүрүүсү деп аталат.

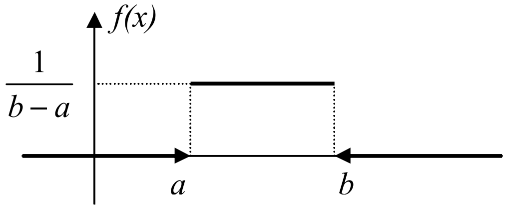
Буга мисал келтиребиз.

1-мисал. Өлчөөчү аспаптын шкаласы белгилүү бир бирдикте бөлүнгөн. Жакынкы бүтүн бөлүккө чейин тегеректеп алгандагы кетирилген катаны, ыктымалдыктар тыгыздыгы турактуу болуп, эки бүтүн бөлүктүн ортосундагы ар кандай мааниге ээ боло турган X кокус чоңдугу катары алсак болот. X кокус чоңдугунун бардык мүмкүн болгон маанилери $(a, в)$ интервалында жатат жана $f(x)$ функциясы турактуу маанисин сактайт деп эсептеп, бир калыпта бөлүштүрүүнүн $f(x)$ тыгыздыгын тапкыла.

Чыгаруу. Шарт боюнча X чоңдугу $(a,в)$ интервалында жатпаган маанилерге ээ болбогондуктан, $x<a$ жана $x>в$ болгондо $f(x)=0$ болот. Калган x-тер үчүн $f(x)=C$. X -тин маанилери $(a,в)$ интервалында жаткандыктан $\int_a^в f(x)dx=1$ же $\int_a^в Cdx=1$. Мындан, $C=\frac{1}{\int_a^в dx}=1/(в-a)$ келип чыгат. Ошентип, изделип жаткан ыктымалдыктар тыгыздыгы

$$f(x)=\begin{cases} 0 & эгер \quad x \le a \\ 1/(b-a) & эгер \quad a < x \le b \\ 0 & эгер \quad x > b \end{cases}$$

Бир калыпта бөлүштүрүлгөн тыгыздыктын графиги 6-чиймеде, а бөлүштүрүү функциясынын графиги 4-чиймеде көрсөтүлгөн.



6 - чийме

1-эскертүү. R аркылуу (0,1) интервалында бир калыпта бөлүштүрүлгөн үзгүлтүксүз кокус чоңдукту, ал эми r аркылуу анын мүмкүн болгон маанилерин белгилейбиз. R чоңдугунун (0,1) интервалынын ичиндеги (c,d) интервалында жатыш (сыноонун натыйжасында) ыктымалдыгы анын узундугуна барабар:

$$P(c<R<d)=d-c$$

Чындыгында эле, каралып жаткан бир калыпта бөлүштүрүлгөн тыгыздык $f(r)=1/(1-0)=1$

Демек, $$P(c<R<d)=\int_c^d f(r)dr=\int_c^d dr=d-c$$

§2 Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун сандык мүнөздөмөлөрү.

Кокус чошдуктардын сандык мүнөздөмөлөрүн үзгүлтүксүз чоңдуктар үчүн кеңейтебиз. Математикалык күтүүдөн баштайлы. Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы $f(x)$ берилсин жана X-тин мүмкүн болгон бардык маанилери $[a,в]$ кесиндисинде жатсын. Бул кесиндини, узундуктары $\Delta x_1, \Delta x_2 ..., \Delta x_n$ болгон п кичине кесиндилерге бөлөбүз да алардын ар биринен каалагандай $x_i (i=\overline{1,n})$ чекиттерин тандап алабыз. Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун математикалык күтүүсүн, дискреттик чоңдуктун математикалык күтүүсү сыяктуу аныктайбыз.

Мүмкүн болгон x_i маанилерин, алардын Δx_i интервалдарына тийиштүү болуш ыктымалдыктарына (бул ыктымалдыктар жакындаштырылган түрдө $f(x_i)\Delta x_i$ барабар) көбөйтүлгөн көбөйтүндүлөрдүн суммасын түзөбүз: $\sum_{i=1}^{n} x_i f(x)\Delta x_i$

Бул суммадан, Δx_i жекече интервалдарынын эң узуну нөлгө умтулган учурда пределге өтүп, $\int_a^в xf(x)dx$ аныкталган интегралын алабыз.

2-аныктама: Мүмкүн болгон маанилери *[а,в]* кесиндисинде жаткан үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун математикалык күтүүсү деп,

$$M(x) = \int_a^в xf(x)dx \qquad (25)$$

аныкталган интегралы аталат.

Эгерде *X*тин мүмүкүн болгон маанилери бүткүл *Ox* огунда жатса, анда $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

Кокус чоңдук чектүү математикалык күтүүгө ээ болсо, акыркы өздүк эмес интеграл абсалютттук түрдө жыйналат деп, б.а. аныкталат деп эсептелет.

Ушул сыяктуу эле, дискреттик кокус чоңдуктун дисперциясынын аныктамасынын негизинде, үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун дисперциясын аныктайбыз.

3-аныктама.Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун дисперциясы *D(x)* деп, кыйшайуунун квадратынын математикалык күтүүсү аталат.

Эгерде, *X*тин мүмкүн болгон маанилери *[а,в]* кесиндисинде жатса, анда $D(x) = \int_a^в [x - M(x)]^2 f(x)dx$

Эгерде мүмкүн болгон маанилер бүткүл Ох огунда жатса, анда

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(x)]^2 f(x)dx$$

Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун орто квадраттык кыйшайуусу, дискреттик чоңдуктукундай эле, $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$ формуласы боюнча аныкталат.

2-эскертүү. Дисперсияны чыгаруунун ыңгайлуу

$$D(x) = \int_a^в x^2 f(x)dx - \{M[X]\}^2$$

же

$$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \{ M[X]\}^2 \qquad (26)$$

формулаларын жеңил эле алууга болот.

2-мисал. Бөлүштүрүү функциясы

$$F(x)=\begin{cases} 0 & эгер \quad x\le 0 \\ x & эгер \quad 0<x\le 1 \\ 1 & эгер \quad x>1 \end{cases}$$

болгон, X кокус чоңдугунун математикалык күтүүсүн жана дисперциясын тапкыла.

Чыгаруу. Бөлүштүрүү тыгыздыгын табабыз.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & эгер \quad x\le 0 \\ 1 & эгер \quad 0<x\le 1 \\ 0 & эгер \quad x>1 \end{cases}$$

(25) формуласы боюнча математикалык күтүүнү табабыз:

$$M(x)=\int_0^1 x1dx = x^2/2\Big|_0^1=1/2$$

(26) формуласы боюнча дисперцияны табабыз:

$$D(x)=\int_0^1 x^2 1dx-(1/2)^2 = x^3/3\Big|_0^1-1/4=1/12$$

3-мисал. *(а,в)* интервалында бир калыпта бөлүштүрүлгөн үзгүлтүксүз X кокус чоңдугунун математикалык күтүүсүн жана дисперциясын тапкыла.

Чыгаруу. Бир калыпта бөлүштүрүлгөн X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы $f(x)=1/(в-а)$ болорун эске алып математикалык күтүүнү (25) формуласы боюнча

$$M(x)=\int_a^в xf(x)dx=\frac{1}{в-a}\int_a^в xdx,$$ же жөнөкөйлөткөндөн кийин

$$M(x)=\frac{a+в}{2}$$ болорун табабыз.

X тин дисперциясын (26) формуласы боюнча табабыз:

$$D(x)=\int_a^в x^2 f(x)dx-[M(x)]^2=\frac{1}{в-a}\int_a^в x^2dx-\left[\frac{a+в}{2}\right]^2$$

$$D(x)=(в-а)^2/12$$

4-эскертүү. 3-мисалда а=0, в=1 деп алсак, $M(R)$=1/2, $D(R)$=1/12 келип чыгат. Ушул эле жыйынтыктарды, 2-мисалда R кокус чоңдугунун берилген бөлүштүрүү функциясы боюнча алганбыз.

§3 Нормалдуу (кадимки) бөлүштүрүү.

4-аныктама. Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун бөлүштүрүү тыгыздыгы $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$

формуласы боюнча аныкталса, анда ал чоңдук нормалдуу бөлүштүрүлгөн чоңдук деп аталат.

Кадимки бөлүштүрүү a жана σ эки параметрлери аркылуу аныкталары көрүнүп турат. Ал бөлүштүрүүнү белгилүү деш үчүн, ошол параметрлерди билүү жетиштүү. Бул параметрлердин ыктымалдык маанилери төмөндөгүдөй: a - кадимки бөлүштүрүүнүн математикалык күтүүсү, σ-орто квадраттык кыйшайуусу. Чындыгында эле:

а) Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун математикалык күтүүсүнүн аныктамасы боюнча $M(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-(x-a)^2/2\sigma^2}dx$

Жаңы өзгөрмөнү киргизебиз $z=(x-a)/\sigma$.

Мындан, $x=\sigma z+a,\ dx=\sigma dz$. Интегралдын жаңы интегралдоо пределдери эскилерге эле барабар болорун эске алсак:

$$M(x)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)e^{-z^2/2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma ze^{-z^2/2}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz$$

келип чыгат.

Биринчи кошуулучу, так функциядан симметриялуу пределдер боюнча алынган интеграл болгондуктан, нөлгө барабар. Экинчи кошулуучу болсо, $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz=\sqrt{2\pi}$ (Пуассондун интегралы), болгондуктан а параметрине барабар.

Ошентип, $M(X)=a$, б.а. кадимки бөлүштүрүүнүн математикалык күтүүсү a болот.

б) $M(X)=a$ экендигин эске алсак, дисперциянын аныктамасы боюнча

$$D(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}dx$$

болот.

Жогорудагыдай эле жаңы өзгөрмөнү киргизип $(z=(x-a)/\sigma,\ x=\sigma z+a,\ dx=\sigma dz)$ дисперсияны жөнөкөйлөтөбүз:

$$D(x)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z\cdot z\, e^{-z^2/2}dz .$$ Бул интегралды $u=z, dv=\ ze^{-z^2/2}dz$ деп алып, бөлүктөп интегралдасак D$(x)=\sigma^2$ келип чыгат. Демек:

$$\sigma\ (x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{\sigma^2}=\sigma$$

Ошентип, кадимки бөлүштүрүүнүн орто квадраттык кыйшайуусу σ параметрине барабар.

5-аныктама. Эгерде, a жана σ $(\sigma>0)$ параметрлери каалагандай сан болгон кадимки бөлүштүрүү, жалпы кадимки бөлүштүрүү деп аталат.

6-аныктама. Эгерде a=0 жана σ =1 болсо, кадимки бөлүштүрүү нормаланган (ченемдүү) бөлүштүрүү деп аталат.

Мисалы, эгер X нормалдуу бөлүштүрүлгөн чоңдук болсо, анда $V=(x\text{-}a)/\ \sigma$ чоңдугу ченемдүү кадимкидей чоңдук болот, б.а.

$$M(V)=0,\ \sigma\ (V)=1$$

Ченемдүү бөлүштүрүлгөн X чоңдугунун тыгыздыгы

$$\varphi(x)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

Бул функциянын таблицасы 1-тиркемеде берилген.

5-эскертүү. Жалпы кадимки бөлүштүрүлгөн X чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-(z-a)^2/2\sigma^2}dz ,$$

ал эми кадимки ченемдүү бөлүштүрүлгөн чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz .$$

$F_0(x)$ функциясынын таблицасы бар жана $F(x)=F_0((x-a/\sigma)$.

6-эскертүү. Ченемдүү кадимки X чоңдугунун (0, x) интервалына тийиштүү маанилерге ээ болу ыктымалдыгын, Лапластын Ф$(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$ функциясын пайдаланып тапсак болот.

Чындыгында эле

$$P(0\prec X\prec x)=\int_0^x \varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz=\Phi(x)$$

7-эскертүү. $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=1 \quad (7-гл., параграф\ 6,\ 2-касиет), \varphi(x)$ функциясы жуп функция болгондуктан $\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx=0,5\ же\ P(-\infty \prec x \prec 0)=0,5$.

Анда, $F_0(x)=0,5+\varphi(x)$ болорун жешил эле табууга болот. Чындыгында эле

$$F_0(x)=P(-\infty \prec X \prec x)=P(-\infty \prec X \prec 0)+P(0 \prec X \prec x)=0,5+\varphi(x).$$

§4 Кадимки (нормалдуу) ийри сызык.

7-аныктама. Нормалдуу бөлүштүрүүнүн тыгыздыгынын графиги нормалдык (кадимки) ийри сызык деп аталат (Гаусстун ийри сызыгы) .

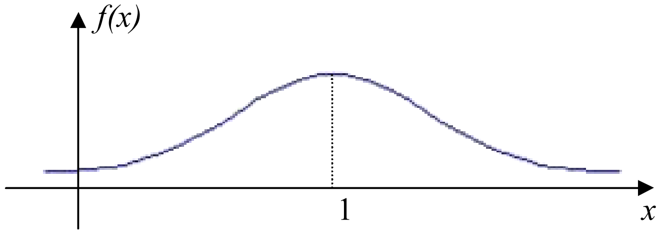
Гаусстун $y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$ функциясын дифференциалдык эсептөөлөрдүн негизинде изилдейбиз.

1. Бул функция Ох огунун бардык чекиттеринде аныкталган.
2. x тин бардык маанилеринде функция оң мааниге ээ, б.а. нормалдык ийри сызык Ох огунун үстүндө жатат.
3. x абсолюттук чоңдугу боюнча чексизге умтулганда функция нөлгө умтулат; $\lim_{|x|\to\infty} y=0$, б.а. Ох огу горизанталдык асимптота болот.
4. Функцияны экстремумдарга изилдейбиз. Биринчи туундуну табабыз: $y'=-\frac{x-a}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$

   $x=a$ болгондо $y'=0,\ x \prec a\ болгондо\ y' \succ 0\ x \succ a\ болгондо\ y' \prec 0$ болоорун жеңил эле көрүүгө болот. Демек, $x=a$ болгондо функция максимумга ээ болот. Ал максимум $1/\sigma\sqrt{2\pi}$.
5. x-a айырмасы, функцияга квадраты менен киргендиктен, функциянын графиги $x=a$ түз сызыгына карата симметриялуу.
6. Функцияны ийреңдөө чекиттерге изилдейбиз. Экинчи туундуну табабыз $y''=-\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\left[1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right]$

$x = a + \sigma$ *жана* $x = a - \sigma$ болгондо экинчи туунду нөлгө барабар болору түшүнүктүү. Бул чекиттерден өткөндө y'' белгисин өзгөртөт. Функциянын бул эки чекиттеги мааниси тең $\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}$ санына барабар. Ошентип, графиктин $(a-\sigma;1/\sigma\sqrt{2\pi})$ жана $(a+\sigma;1/\sigma\sqrt{2\pi})$ чекиттери ийреңдөө чекиттер болуп эсептелет.

7-чиймеде нормалдык ийри сызыктын графиги a=1 болгон учурда берилген.



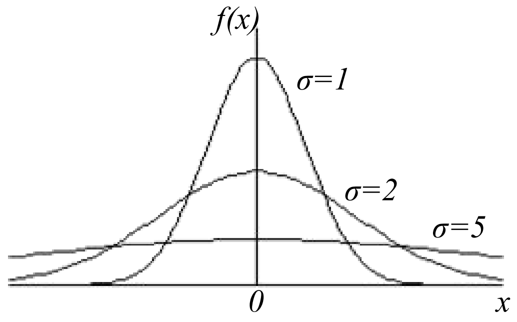
7 - чийме

§5 Нормалдуу (кадимки) бөлүштүрүүнүн параметрлеринин кадимки ийри сызыктын түрүнө тийгизген таасири.

a жана σ параметрлери нормалдык ийри сызыктын түрүнө кандай таасир тийгизерин байкайбыз. *f(x)* жана *f(x-a)* функцияларлынын графиктери окшош болору белгилүү: *f(x-a) граифги f(x)* графигин *Ox* огу боюнча a бирдике оңго (a>0 болсо) же солго (a<0 болсо) жылдырганда алынат. Демек, a (математикалык күтүү) өзгөргөндө графиктин түрү өзгөрбөйт; график *Ox* огу боюнча оңго (a чоңойсо) же солго (a кичирейсе) гана жылат.

σ параметри (орто квадраттык кыйшайуу) өзгөргөндө иш башка. Мурунку параграфта көрсөтүлгөндөй функциянын максимуму $1/\sigma\sqrt{2\pi}$. Мындан σ чоңойгондо максимумдун ординатасы кичирейери, жана функциянын графиги жалпагыраак болору, б.а. Оу огуна куушурулары көрүнүп турат; тескерисинче, σ кичирейгенде нормалдык ийри сызыктын максимуму *Oy* огунун оң багытын көздөй созулуп, функциянын графиги учтуу чокулуу болуп калат.

a менен σ-нын ар кандай маанилеринде, нормалдык ийри сызык жана Ox огу менен чектелген аянт дайыма бирге барабар бойдон кала берет (7-гл.,§6, тыгыздыктын 2-касиети).



8 - чийме

8-чиймеде нормалдык ийри сызык ар түрдүү σ жана a=0 болгон учурда сүрөттөлгөн. Бул чиймеде, σ параметринин өзгөрүшү, нормалдык ийри сызыктын түрүнө кандай таасир этери ачык көрсөтүлгөн.

$a=0, \quad \sigma=1$болгон учурда нормалдык ийри сызык $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$ нормаланган ийри сызык деп аталарын эскерте кетели.

§6 Кадимки кокус чоңдуктун берилген интервалга тийиштүү болуш ыктымалдыгы

Эгерде X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы $f(x)$ болсо, анда анын (α,β) интервалына тийиштүү болуу ыктымалдыгы $P(\alpha \prec X \prec \beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ формуласы менен аныкталары бизге белгилүү.

X-нормалдуу бөлүштүрүлгөн чоңдук болсун. Анда

$$P(\alpha \prec X \prec \beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}dx$$

Бул формуланы, даяр таблицадан пайдаланууга мүмкүн болгондой кылып, өзгөртөбүз. Ал үчүн жаңы $z=(x-a)/\sigma$ өзгөрүлмөсүн киргизебиз. Мындан $x=\sigma z+a, dx=\sigma dz.$ Эгер

$$x=\alpha \quad болсо \quad z=\frac{\alpha-a}{\sigma}, \quad x=\beta \quad болсо \quad z=\frac{\beta-a}{\sigma} \quad болот..$$

Ошентип,

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-\alpha}{\sigma}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-x^2/2} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-x^2/2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-x^2/2} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-x^2/2} dx.$$

Лапластын $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ функциясын пайдалансак

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda - a}{\sigma}\right) \qquad (27)$$

келип чыгат.

4-мисал. X чоңдугу нормалдуу закон менен бөлүштүрүлгөн. Бул чоңдуктун математикалык күтүүсү 30 жана орто квадраттык кыйшайуусу 10. X-тин (10, 50) интервалына тийиштүү болу ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. (27) формуласын пайдаланабыз. Шарт боюнча $\alpha = 30; \quad \sigma = 10; \ \lambda = 10; \ \beta = 50$ болгондуктан,

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{50 - 30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{10}\right) = 2\Phi(2)$$

Таблица боюнча (2-тиркеме) $\Phi(2) = 0{,}4772$ болгондуктан

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

§7 Берилген кыйшайуунун ыктымалдыгын чыгаруу.

Көпчүлүк учурда нормалдуу бөлүштүрүлгөн X кокус чоңдугунун кыйшайуусу, абсолюттук чоңдугу боюнча берилген σ санынан кичине болуш ыктымалдыгын,

б.а. $|x - a| < \sigma$ барабарсыздыгынын ыктымалдыгын, табуу үчүн керек болот.

Муну, ага тең күчтөгү, эки барабарсыздык менен алмаштырабыз: $-\delta \prec X - a \prec \delta \quad же \quad a - \delta \prec X \prec a + \delta$

(27) формуланы пайдалансак

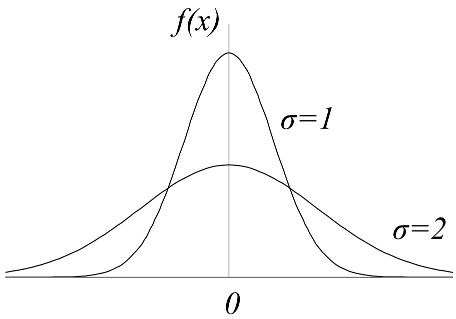
$$P(|X-a| \prec \delta) = P(a-\delta \prec X \prec a+\delta) = \Phi\left[\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

болот.

Лапластын функциясы так болгондуктан $\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = -\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ болот да, $P(|X-a| \prec \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ келип чыгат. Эгер a=0 болсо $P(|X| \prec \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

9-чиймеде эки кокус чоңдуктар нормалдуу бөлүштүрүлгөн жана $a=0$ болсо, анда алардын σ-сы кичине болгонунун ($-\delta, \delta$) интервалына тийиштүү болуш ыктымалдыгы чоң болору ачык көрсөтүлгөн. Бул факты σ параметринин ыктымалдык касиети менен толук байланышат (σ - кокус чоңдуктун, анын математикалык күтүүсүнүн тегерегиндеги чачылышын мүнөздөйт).

x



9 - чийме

8-эскертүү. $|X-a| \prec \delta$ *жана* $|X-a| \geq \delta$ барабарсыздыктарынын аткарылышынан турган окуялар карама каршы. Ошондуктан, $|X\text{-}a|<\delta$ барабарсыздыгынын ыктымалдыгы p болсо, $|X\text{-}a|\geq\delta$ барабарсыздыгыныкы $q=1-p$ болот.

5-мисал. X кокус чоңдугу нормалдуу бөлүштүрүлгөн. M(X)=20, $\sigma(X)=10$ болсо, $|X-20|<3$ барабарсыздыгынын ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. $P(|X-a| \prec \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ барабардыгын пайдаланабыз. Шарт боюнча $\delta = 3; \alpha = M(X) = 20; \sigma = 10$ болгондуктан,

$P(|X-20| \prec 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = 2\Phi(0{,}3)$. Таблица боюнча (2-тиркеме) $\Phi(0{,}3) = 0{,}1179$ болот. Анда, изделип жаткан ыктымалдык $P(|X-20| \prec 3) = 0{,}2358$.

§8 Үч сигманын эрежеси

Эгерде X кокус чоңдугу нормалдуу бөлүштүрүлгөн болсо,

§7-деги $P(|X-a|\prec\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ формуласынан, $\delta=3\sigma$ болгон учурда

$$P(|X-a|\prec 3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$$ келип чыгат.

Демек, кыйшайуунун үч эселенген орто квадраттык чоңдуктан кем болуш ыктымалдыгы 0,9973-кө барабар. Башка сөз менен айтканда, кыйшайуунун абсалюттук чоңдугу үч эселенген орто квадраттык чоңдуктан ашат деген окуянын ыктымалдыгы эң кичине, тактап айтканда 0,0027. Бул болсо, 0,27% учурларда гана ушундай болушу мүмкүн дегенге жатат. Мындай окуяларды, кичине ыктымалдуу окуялардын практика жүзүндө аткарылбастык принцибинин негизинде, мүмкүн эмес окуя деп эсептесек болот.

Үч сигма эрежеси: Эгерде кокус окуя нормалдуу бөлүштүрүлгөн болсо, анда анын математикалык күтүүдөн айырмасы абсалюттук чоңдугу боюнча үч эселенген орто квадраттык чоңдуктан ашпайт.

Практикада, үч сигма эрежеси төмөндөгүдөй колодонулат: эгерде кокус чоңдуктун бөлүштүрүүсү белгисиз болсо, бирок келтирилген эрежедеги шарт аткарылса ($|X-a|\prec 3\sigma$ болсо), анда ал чоңдукту нормалдуу закон боюнча бөлүштүрүлгөн деп эсептөөгө негиз бар; андай болбогон учурда ал нормалдуу бөлүштүрүлгөн эмес.

§9 Ляпуновдун теоремасы жөнүндө түшүнүк.

Борбордук пределдик теорема.

Нормалдуу бөлүштүрүлгөн чоңдуктар практикада кеңири кездешери белгилүү. Эмне себептен мындай? Бул суроого жооп улуу орус математиги А.М.Ляпунов тарабынан берилген (борбордук пределдик теорема): эгер X кокус чоңдугу өз ара көз каранды эмес өтө көп сандагы кокус чоңдуктардын суммасы болсо жана алардын ар биринин суммага болгон таасири кичине болсо, анда Хтин бөлүштүрүү закону нормалдууга жакын.

6-мисал. Кандайдыр бир физикалык чоңдук өлчөнүп жатат дели. Өлчөөнүн натыйжасына көптөгөн сандагы кокус себептер (температура, аспаптын термелүүсү, нымдуулук ж.б.) таасир эткендиктен, ченөө, өлчөнүп жаткан чоңдуктун маанисин, жакындаштырылган түрдө аныктайт. Бул себептердин ар бири өтө кичине «жекече катаны» берет. Бирок, ал себептердин саны өтө көп болгондуктан, алардын биргелешкен таасири билинерлик «сумма түрүндөгү катаны» туудурат.

Бул сумма түрүндөгү катаны, көптөгөн сандагы өз ара көз каранды эмес жекече катаралдын суммасы түрүндө карасак, анда аны кадимки бөлүштүрүүгө жакын бөлүштүрүлгөн десек болот. Мындай жыйынтыкты тажрыйба да ырастайт. Борбордук пределдик теореманын айтылышын келтиребиз. Бул теорема, көптөгөн сандагы өз ара көз каранды эмес кошуулуучулардын суммасы, кадимкиге жакын бөлүштүрүлүш үчүн кандай шарттар аткарылышы керек экендигин тактайт. $X_1, X_2, ..., X_n ...$-ар бири чектүү $M(X_k) = a_k$ математикалык күтүүсүнө жана $D(X_k) = в_k^2$ дисперциясына ээ болгон, көз каранды эмес кокус чоңдуктардын катары болсун.

Белгилөөлөрдү киргизебиз:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n, A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} в_к^2 .$$

Нормалданган сумманын бөлүштүрүү функциясын

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right)$$

аркылуу белгилейбиз.

Эгерде нормаланган сумма $n \to \infty$ учурда ар кандай х үчүн кадимки бөлүштүрүү функциясына умтулса:

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz ,$$

анда, $X_1, X_2, ... X_п$..... сан удаалаштыгына борбордук пределдик теореманы колдонууга болот деп айтышат.

Эгерде бардык $X_1, X_2, ..., X_n ...$ кокус чоңдуктары бирдей бөлүштүрүлсө жана алардын дисперциялары нөл эмес чектүү сан болсо, анда ал сан удаалаштыгына борбордук пределдик теореманы колдонууга болот.

§10 Теориялык бөлүштүрүүнүн кадимки бөлүштүрүүдөн кыйшайуусун чамалоо. Ассиметрия (симметриясыздык) жана эксцесс (чектен чыгуу).

8-аныктама. Салыштырма жыштыктын бөлүштүрүүсү эмпирикалык, ал эми ыктымалдыктардын бөлүштүрүүсү теориялык бөлүштүрүү деп аталат.

Кадимкидей бөлүштүрүүдөн башка бөлүштүрүүлөрдү үйрөнүүдө, алардын айырмасын сан түрүндө чамалоо зарылчылыгы туулат. Ушул максатта ассиметрия жана эксцесс деген атайын мүнөздөмөлөр киргизилет. Кадимки бөлүштүрүү үчүн бул мүнөздөмөлөр нөлгө барабар. Ошондуктан, эгерде кандайдыр бир бөлүштүрүүлөр үчүн асимметрия жана эксцесс кичине маанилерге ээ болсо, анда ал бөлүштүрүүлөрдү кадимкиге жакын деп эсептесек болот. Тескеричинче ассиметрия менен эксцесс чоң болсо, анда ал бөлүштүрүү кадимкиден алыс болуп эсептелинет.

Ассиметрияны (симметриясыздыкты) кантип чамалоого болот? Симметриялуу бөлүштүрүү үчүн (мындай бөлүштүрүүнүн графиги $x=M(X)$ түз сызыгына карата симметриялуу), ар бир так даражадагы борбордук моменттер нөлгө барабар экендигин далилдөөгө болот. Симметриясыз бөлүштүрүүлөр үчүн, ар бир так даражадагы борбордук моменттер нөлгө барабар эмес. Ошондуктан, бул моменттердин ар бири (ар кандай бөлүштүрүү үчүн дайыма нөлгө барабар болгон биринчи тартиптеги моменттен башка) аркылуу ассиметрияны чамалоого болот; алардын жөнөкөйрөгү болгон үчүнчү тартиптеги моментти (μ_3) тандап алуу керектиги түшүнүктүү. Бирок, бул момент кокус чоңдук өлчөлүүчү бирдикке көз каранды болгондуктан, аны ассиметрияны чамалоо үчүн колдонуу оңтойсуз. Бул оңтойсуздукту жоюш үчүн, μ_3-тү σ^3-ка бөлүп бирдиксиз чоңдук алышат.

9-аныктама. Теориялык бөлүштүрүүнүн асимметриясы деп, үчүнчү тартиптеги борбордук моменттин, орто квадраттык кыйшайуунун кубуна болгон катышы аталат:

$$A_3 = \mu_3 / \sigma^3$$

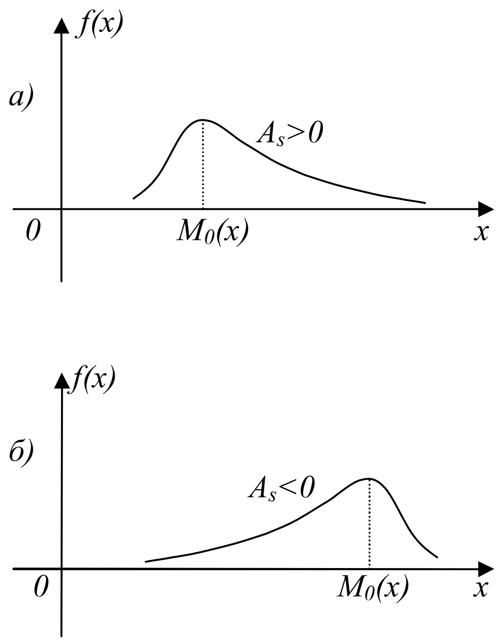
Эгерде бөлүштүрүү ийри сызыгынын «узун бөлүгү» математикалык күтүүнүн оң жагында жатса ассиметрия оң, сол жагында жатса ассиметрия терс болот. Практика жүзүндө ассиметриянын белгисин бөлүштүрүү ийри сызыгынын модага (бөлүштүрүү тыгыздыгынын максимум чекити) карата жайланышынан аныктайт: эгерде «узун бөлүк» модадан оң жагында жатса ассиметрия оң (10 а-чийме), сол жагында жатса ассиметрия терс (10 б-чийме).

Теориялык бөлүштүрүүнүн «тиктигин», б.а. нормалдуу ийри сызыкка караганда чоң же кичине көтөрүлө тургандыгын мүнөздөш үчүн, эксцесс түшүнүгү пайдаланылат.

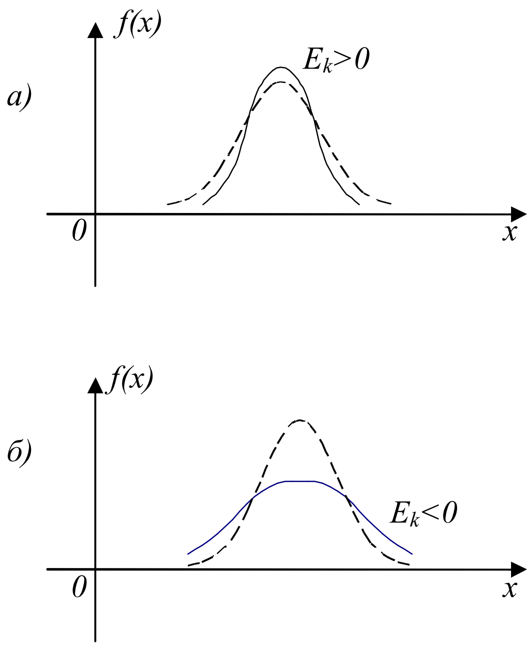
10-аныктама. Теориялык бөлүштүрүүнүн эксцесси (чектен чыгуусу) деп,

$$E_k = (\mu_4 / \sigma^4) - 3$$

барабардыгы менен аныкталган E_k чоңдугу аталат.



10 -чийме



11 - чийме

Кадимки бөлүштүрүү үчүн $(\mu_4 / \delta^4) = 3$; демек эксцесс (чектен чыгуу) нөлгө барабар. Ошондуктан, кандайдыр бир бөлүштүрүүнүн эксцесси нөлгө барабар эмес болсо, анда ал кадимки бөлүштүрүүдөн айырмаланат: эгерде эксцесс оң болсо, ийри сызык, кадимки ийри сызыкка караганда, бийигирек жана «учтуурак» чокуга ээ болот (11а-чийме); эгерде эксцесс (чектен чыгуу) терс болсо, анда каралып жаткан ийри сызык, кадимки сызыкка караганда, жапыз жана «жалпак» чокулуу болот (11б-чийме).

§11 Бир аргументтүү кокус функция жана анын бөлүштүрүүсү.

Мындан ары «ыктымалдыктардын бөлүштүрүү закону» дегендин ордуна кыкача эле «бөлүштүрүү» деп айтарыбызды эскерте кетели.

11-аныктама. Эгерде X кокус чоңдугунун ар бир мүмкүн болгон маанисине $У$ кокус чоңдугунун кандайдыр бир мүмүкүн болгон мааниси туура келсе, анда $У$ кокус аргументтүү функция деп аталат:

$$У = \Phi(X)$$

Эгерде Xтин бөлүштүрүүсү белгилүү болсо (X-дискреттүү же үзгүлтүксүз болушу мүмкүн), $У$ функциясынын бөлүштүрүүсү кантип табыларын көрсөтөбүз.

1. $У$тин X аргументи дискреттүү кокус чоңдук болсун.

а) Эгерде Xтин ар башка мүмкүн болгон маанилерине $У$тин ар башка маанилери тийиштүү болсо, анда X жана $У$тин тийиштүү маанилеринин ыктымалдыктары барабар болушат.

7-мисал. Дискреттүү X кокус чоңдугунун бөлүштүрүүсү

X	2	3
P	0,6	0,4

берилген. $У=X^2$ функциясынын бөлүштүрүүсүн тапкыла.

Чыгаруу. $У$-тин мүмкүн болгон маанилери $У_1=2^2=4$; $У_2=3^2=9$. Анда

$У$	4	9
P	0,6	0,4

б) Эгерде Xтин ар түрдүү маанилерине тийиштүү $У$-тин маанилеринин кээ бирлери барабар болсо, анда $У$-тин кайталанган маанилеринин ыктымалдыктарын кошу керек.

8-мисал. Дискреттүү X кокус чоңдугунун бөлүштүрүүсү берилген:

X	-2	2	3
P	0,4	0,5	0,1

$У=X^2$ функциясынын бөлүштүрүүсүн тапкыла.

Чыгаруу. $У$тин мүмкүн болгон $У_1=4$ маанисинин ыктымалдыгы, бирикпөөчү $X=-2$ жана $X=2$ окуяларынын ыктымалдыктарынын суммаына барабар, б.а. $0{,}4+0{,}5=0{,}9$. $У_2=9$ маанисинин ыктымалдыгы 0,1. Демек, У- тин бөлүштүрүү закону

$$\begin{array}{ccc} У & 2 & 9 \\ P & 0{,}9 & 0{,}1 \end{array}$$ болот.

2. Х-үзгүлтүксүз кокус чоңдук болсун. Хтин бөлүштүрүү тыгыздыгы f(x) берилсе, ал аркылуу У функциясынын бөлүштүрүү тыгыздыгын кантип табууга болот?

Эгерде $y=\varphi(x)$-дифференцирленүүчү, накта өсө турган же накта кемий турган функция болсо жана анын тескери функциясы $x=\phi(y)$ болсо, анда Утин бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$g(y)=f[\phi(y)]\phi'\ (y)$$

формуласы боюнча табылаары далилденген.

9-мисал. X кокус чоңдугу нормалдуу бөлүштүрүлгөн жана анын математикалык күтүүсү $a=0$ болсо,$У=X^3$ функциясынын бөлүштүрүүсүн тапкыла.

Чыгаруу. $y=x^3$ дифференцирленүүчү накта өсө турган функция болгондуктан жана ага тескери функция $x=y^{1/3}$ аныкталгандыктан, $g(y)=f[\phi(y)]\phi'(y)$ формуласын пайдалансак болот.

Шарт боюнча $$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Демек $$f(\phi(y))=f\left[y^{1/3}\right]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-y^{2/3}/2\sigma^2}.$$

Тескери функциянын туундусу $$\phi'\ (y)=(y^{1/3})'=\frac{1}{3y^{2/3}}.$$

Бул формулалардан изделип жаткан бөлүштүрүүнү табабыз:

$$g(y)=\frac{1}{3\sigma y^{2/3}\sqrt{2\pi}}e^{-y^{2/3}/2\sigma^2}$$

9-эскертүү. X агументи нормалдуу бөлүштүрүлгөн болсо, $У=AX+B$ сызыктуу функциясы дагы нормалдуу бөлүштүрүлөрүн $g(y)=f[\phi(y)]\phi'(y)$ формуласы боюнча далилдөөгө болот.

Утин математикалык күтүүсүн табыш үчүн, функциянын туюнтмасындагы Xтин ордуна, анын математикалык күтүүсү a ны коюш керек: $M(У)=Aa+B$

У-тин орто квадраттык кыйшайуусун табыш үчүн, Хтин квадраттык орто кыйшайуусун *У=АХ+В* барабардыгындагы Анын модулуна көбөйтүш керек: $\sigma\ (У) = |A|\sigma(X)$

<u>10-мисал</u>. Эгер X нормалдуу бөлүштүрүлгөн болсо жана $M(X)$=2, $\sigma(x) = 0{,}5$ *болсо*, $y = 3x + 1$ сызыктуу функциянын бөлүштүрүү тыгыздыгын аныктагыла.

<u>Чыгаруу.</u> Утин математикалык күтүүсүн жана $\sigma\ (У)$ ти табабыз:

$$M(У) = 3 \cdot 2 + 1 = 7 \qquad \sigma(У) = 3 \cdot 0{,}5 = 1.$$

Изделип жаткан тыгыздык $$g(y) = \frac{1}{1{,}5\sqrt{2\pi}} e^{-(y-7)^2/[2\cdot(1{,}5)^2]}.$$

§12. Бир кокус аргументтүү функциянын математикалык күтүүсү.

Аргументи X кокус чоңдугу болгон У$= \varphi(X)$ функциясы берилген. Хтин бөлүштүрүүсү белгилүү деп, Утин математикалык күтүүсүн табыш керек болсун.

1. Үзгүлтүктүү X кокус чоңдугунун мүмкүн болгон маанилери $x_1, x_2, ..., x_n$ жана алардын ыктымалдыктары, тиешелүү түрдө, $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ болсун. Анда $У = \varphi(X)$ дагы, мүмкүн болгон маанилери $У_1 = \varphi(x_1), У_2 = \varphi(x_2), ..., У_n = \varphi(x_n)$ болгон үзгүлтүктүү чоңдук болот. «X чоңдугу x_i мааниге ээ болду» деген окуядан «$У$ чоңдугу y_i маанисине ээ болду» деген окуя келип чыккандыктан, *У*-тин мүмкүн болгон маанилеринин ыктымалдыктары, тиешелүү түрдө, $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ болот. Демек $У$ функциясынын математикалык күтүүсү

$$M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i) P_i .$$

<u>11-мисал</u>. Үзгүлтүктүү X кокус чоңдугунун бөлүштүрүүсү берилген:

X	1	3	5
P	0,2	0,5	0,3

$У = \varphi(X) = x^2 + 1$ функияынын математикалык күтүүсүн тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. У-тин мүмкүн болгон маанилери $\varphi(1) = 1^2 + 1 = 2$; $\varphi(3) = 3^2 + 1 = 10$; $\varphi(5) = 5^2 + 1 = 26$ болгондуктан, изделип жаткан математикалык күтүү: $M(X^2 + 1) = 2 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}5 + 26 \cdot 0{,}3 = 13{,}2$.

2. Х үзгүлтүксүз кокус чоңдук болсун жана анын бөлүштүрүү жыштыгы *f(x)* берилсин. $У=\varphi(X)$ функциясынын математикалык күтүүсүн табыш үчүн, алдын ала Утин *g(У)* бөлүштүрүү функциясын таап туруп, андан кийин $M(У)=\int_{-\infty}^{\infty} yg(y)dy$ формуласын пайдаланабыз.

Бирок, эгерде *g(y)* функциясын табу кыйын болсо, анда $У=\varphi(X)$ функциясынын математикалык күтүүсүн түздөн түз

$$M[\varphi(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx$$

формуласы боюнча тапсак да болот.

X тин маанилери *(а,в)* интервалында жаткан жекече учурда

$$M[\varphi(x)]=\int_{a}^{в}\varphi(x)f(x)dx$$ болот.

Булардын далилдөөсүн келтирбей эле, эгерде суммалоону интегралдоо менен, ыктымалдыкты-ыктымалдыктын *f(x)* Δx элементи менен алмаштырсак, алар дискреттүү чоңдуктун математикалык күтүүсүнүн формуласындай эле далилденерин эскерте кетебиз.

12-мисал. Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугу $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $f(x)=\sin x$; ал интервалдын сыртында $f(x)=0$ болгон бөлүштүрүү тыгыздыгы аркылуу берилген.

$У=\varphi(x)=x^2$ функциясынын математикалык күтүүсүн тапкыла.

Чыгаруу. Үзгүлтүксүз чоңдуктун математикалык күтүүсүнүн формуласын колдонобуз. Шарт боюнча

$f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=x^2, a=0$, $в=\frac{\pi}{2}$.

Ошондуктан, $$M[\varphi(x)]=\int_{0}^{1/2}x^2\sin xdx .$$

Бөлүктөп интегралдап, изделип жаткан математикалык күтүү

$$M\left[x^2\right]=\pi-2$$

болорун табабыз.

§13 Эки кокус аргументтүү функция

<u>12-аныктама</u>. Эгерде X жана $У$ кокус чоңдуктарынын ар бир маанилерине Z чоңдугунун бир мааниси тура келсе, анда Z эки X жана $У$ кокус аргументтүү функция деп аталат:

$$Z = \varphi(X, У)$$

Кошулучулардын белгилүү бөлүштүрүүлөрү аркылуу $Z = X + У$ функциясынын бөлүштүрүүсүн табабыз. Мындай маселе практикада көп кездешет. Мисалы, эгер X-өлчөөчү аспаптын кетирген катасы (нормалдуу бөлүштүрүлгөн) болсо, $У$-өлчөөнү шкаланын жакынкы бөлүгүнө чейин тегеректегенде кетирилген ката (бир калыпта бөлүштүрүлгөн) болсо, анда бул каталардын суммасынын ($Z = X + У$) бөлүштүрүүсүн табуу маселеси туулат.

1. X жана $У$ дискреттүү көз каранды эмес кокус чоңдуктар болсун. $Z = X + У$ функциясынын бөлүштүрүүсүн табыш үчүн, анын бардык мүмкүн болгон маанилери жана алардын ыктымалдыктарын табыш керек.

<u>13-мисал.</u> Көз каранды эмес дискреттик Х жана У кокус чоңдуктары $\begin{array}{ccc} X & 1 & 2 \\ P & 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} У & 3 & 4 \\ P & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}$ бөлүштүрүүлөрү аркылуу берилген. Z = X+У тин мүмкүн болгон бардык маанилерин тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. Z-тин мүмкүн болгон бардык маанилери X менен $У$ тин мүмкүн болгон маанилеринин суммасына барабар: $Z_1 = 1+3 = 4, Z_2 = 1+4 = 5, Z_3 = 2+3 = 5, Z_4 = 2+4 = 6$.

Бул маанилердин ыктымалдыктарын табабыз. $Z = 4$ болуш үчүн, Xтин $X_1=1$ маанисине $У$тин $У_1=3$ маанисине ээ болушу жетиштүү. Бул маанилердин ыктымалдыктары, тиешелүү түрдө 0,4 жана 0,2.

X жана $У$ аргументтери көз каранды эмес, ошондуктан алардын биригип аткарылуу ыктымаллдыгы, б.а. $Z_1 = 1+3 = 4$ окуясынын ыктымалдыгы, көбөйтүүнүн теоремасы боюнча $0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$ болот. Ушул сыяктуу эле

$$P(Z_2 = 1+4 = 5) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$$
$$P(Z_3 = 2+3 = 5) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$$
$$P(Z_4 = 2+4 = 6) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$$

Биригишпөөчү $Z = Z_2$ жана $Z = Z_3$ окуяларынын ыктымалдыктарын кошуп алып (0,32+0,12+0,48), изделип жаткан бөлүштүрүүнү табабыз:

Z	4	5	6
P	0,08	0,44	0,48

Текшерүү: 0,08+0,44+0,48=1

2. X жана $У$-үзгүлтүксүз кокус чоңдуктар болсун: эгер X жана $У$ көз каранды эмес болсо, анда $Z = X + У$ суммасынын бөлүштүрүү тыгыздыгы (аргументтердин жок дегенде биринин тыгыздыгы (∞,∞) интервалында бир формула менен берилген болсо)

$$g(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(z-x)dx$$

формуласы менен, же ага тең күчтөгү $g(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) \cdot f_2(y)dy$

формуласы менен аныкталарын далилдөөгө болот, мында f_1, f_2-аргументтердин бөлүштүрүү тыгыздыктары.

Эгерде аргументтердин мүмкүн болгон маанилери терс эмес болсо, анда $g(Z)$ ти $g(Z) = \int_{0}^{z} f_1(x) \cdot f_2(z-x)dx$ же

$$g(Z) = \int_{0}^{z} f_1(z-y) \cdot f_2(y)dy$$

формуласы менен табууга болот.

13-аныктама. Көз каранды эмес кокус чоңдуктардын суммасынын бөлүштүрүү тыгыздыгы композиция деп аталат.

14-аныктама. Эгерде эки кокус чоңдуктар бирдей эле бөлүштүрүү законго ээ болсо жана ал закондорунун композициясы ошол эле аттуу закон боюнча бөлүштүрүлгөн (параметрлери менен айырмаланган) болсо, анда ал бөлүштүрүү туруктуу деп аталат.

Нормалдуу закон туруктуулук касиетке ээ, б.а. нормалдык закондордун композициясы дагы нормалдык бөлүштүрүүгө ээ (композициясынын математикалык күтүүсү жана дисперциясы, кошулуучулардын математикалык күтүүлөрүнүн жана дисперцияларынын суммасына барабар). Мисалы X жана $У$ көз каранды эмес нормалдуу бөлүштүрүлгөн кокус чоңдуктар болсо, жана математикалык күтүүлөрү менен дисперциялары; тиешелүү түрдө $a_1 = 3, a_2 = 4, D_1 = 1, D_2 = 0{,}5$ болсо, анда алардын композициясы(б.а. $Z=X+У$ суммасынын ыктымалдыктар тыгыздыгы) дагы нормалдуу бөлүштүрүлгөн жана анын математикалык күтүүсү жана дисперциясы, тиешелүү түрдө $a = 3 + 4 = 7,\ D = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$ болот.

14-мисал. Көз каранды эмес X жана $У$ чоңдуктары

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{-x/3}(0 \le x < \infty)$$
$$f(y) = \frac{1}{4}e^{-y/4}(0 \le y < \infty)$$

бөлүштүрүү тыгыздыктары аркылуу берилген.

Бул закондордун композициясын, б.а. $Z=X+У$ суммасынын бөлүштүрүү тыгыздыгын тапкыла.

Чыгаруу. Аргументтердин мүмкүн болгон маанилери терс эмес, ошондуктан ,төмөнкү формуланы пайдаланабыз

$$g(z) = \int_0^z f_1(x) \cdot f_2(z-x)dx = \int_0^z \frac{1}{3}e^{-x/3} \cdot \frac{1}{4}e^{-(x-z)/4}dx = \frac{1}{12}e^{-z/4}\int_0^z e^{-x/12}dx = e^{z/4}(1 - e^{-z/12})$$

Шарт боюнча X жана $У$ мүмкүн болгон маанилери терс эмес жана $Z=X+У$ болгондуктан $Z \ge 0$ болот. Муну текшерүү үчүн окуучуга $\int_0^\infty g(z)dz = 1$ болорун текшерүүнү сунуш кылабыз.

§14 "χ^2 (хи квадрат)" бөлүштүрүүсү.

$X_i\,(i = \overline{1,n})$-көз каранды эмес кадимки кокус чоңдуктар болсун жана алардын ар биринин математикалык күтүүсү нөлгө жана орто квадраттык кыйшайуусу бирге барабар болсун. Анда алардын квадраттарынын суммасы $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

χ^2 («хи квадрат») закону боюнча бөлүштүрүлгөн болот жана анын эркиндик даражасы $к = n$. Эгерде бул чоңдуктар бир сызыктуу туюнтма менен, мисалы $\sum X_i = n\overline{X}$, байланышкан болсо, анда эркиндик даражасы $к=n-1$ болот.

Бул бөлүштүрүүнүн тыгыздыгы $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ эгер } x = 0 \\ \dfrac{1}{2^{к/2}\Gamma^{к/2}} e^{-x/2}x^{(к/2)-1} \text{ эгер } x > 0 \end{cases}$

мында $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ -гамма-функция; жекече учурда $\Gamma(n+1)=n!$

χ^2 бөлүштүрүүсү бир параметр - эркиндик даражасынын саны $к = n$-1 менен аныкталары көрүнүп турат.

Эркиндик даражасы көбөйгөн сайын «хи вадрат» бөлүштүрүүсү кадимки бөлүштүрүүгө акырындап жакындай баштайт.

§15 Көрсөткүчтүү бөлүштүрүү.

15-аныктама. Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугунун ыктыамлдыгынын көрсөткүчтүү (экспоненциалдык) бөлүштүрүүсү деп, тыгыздыгы

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ эгер } x<0 \text{ болсо} \\ \lambda e^{-\lambda ч} \text{ эгер } x\geq 0 \text{ болсо}, \lambda - \text{он сан} \end{cases}$$

болгон бөлүштүрүү аталат.

Көрсөткүчтүү бөлүштүрүү бир гана λ параметри менен аныкталары көрүнүп турат. Бул болсо, анын бир нече параметрлер менен аныкталган бөлүштүрүүлөрдөн артыкчылыгын көрсөтөт . Демейде параметрлер белгисиз болот жана алардын жакындаштырылган маанилерин табууга тура келет; албетте эки үч, ж.б. параметрлерден көрө бир параметрди чамалоо оңой. Көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун мисалы болуп, жөнөкөй агымдын удаалаш эки окуясынын аткарылыштарынын ортосундагы убакыт эсептелет.

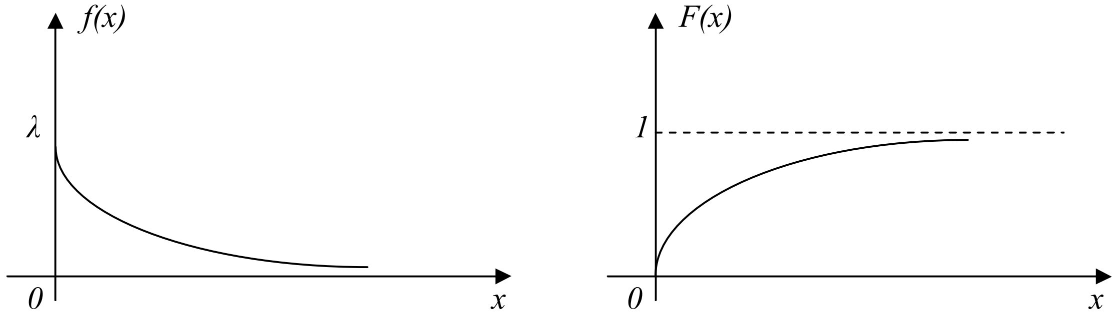
Көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн чоңдуктун бөлүштүрүү функциясын табалы.

$$F(x)=\int_{\infty}^{z} f(x)dx=\int_{\infty}^{0} 0dx+\lambda\int_{0}^{x} e^{-2x}dx=1-e^{-\lambda x}$$

Ошентип, $$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ эгер } x<0 \text{ болсо} \\ 1-e^{-\lambda ч} \text{ эгер } x\geq 0 \text{ болсо} \end{cases}$$

Көрсөткүчтүү законду биз анын тыгыздыгы аркылуу аныктадык; аны бөлүштүрүү функция аркылуу да аныктоого болот.

Көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн чрңдуктун тыгыздыгынын жана бөлүштүрүү функциясынын графиктери 12-чиймеде көрсөтүлгөн.



12 - чийме

15-мисал. Эгерде параметр λ=8 болсо, көрсөткүчтүү бөлүштүрүүнүн тыгыздыгын жана бөлүштүрүү функциясын тапкыла.

Чыгаруу. Изделип жаткан тыгыздык $x \geq 0$ болгондо $f(x) = 8e^{-8x}; x < 0$ *болгондо* $f(x) = 0$ болору түшүнүктүү.

Бөлүштүрүү функциясы болсо, $x \geq 0$ болгондо $F(x) = 1 - e^{-8x};\ x < 0$ *болгондо* $F(x) = 0$ болот.

§16. Көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн кокус чоңдуктун берилген интервалга тийиштүү болуш ыктымалдыгы.

Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы $F(x) = 1 - e^{-nx}\ (x > 0)$ болсун. X-тин *(а,в)* интервалына тийиштүү болуш ыктымалдыгын аныктайбыз.

$$P(a < x < в) = F(в) - F(a)$$

формуласын (VII гл, §I, I-натыйжа) пайдаланабыз:

$$P(a < x < в) = 1 - e^{-вx} - 1 + e^{-xa} = e^{-xa} - e^{-xв} \qquad (28)$$

е^{x} тин маанилери таблица боюнча табылат.

16-мисал. Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугу көрсөткүчтүү закон боюнча бөлүштүрүлгөн:

$x \geq 0$ *болгондо* $f(x) = 2e^{-2x}, x < 0$ *болгондо* $f(x) = 0$. Сыноонун натыйжасында X, (0,3; 1) интервалына тийиштүү болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Шарт боюнча λ=2 (28) формуласы боюнча

$$P(0{,}3 < x < 1) = e^{-2*0{,}3} - e^{-2*1} = e^{-0{,}6} - e^{-2} = 0{,}54881 - 0{,}13534 = 0{,}41$$

§17 Көрсөткүчтүү бөлүштүрүүнүн сандык мүнөздөмөлөрү.

Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугу, көрсөткүчтүү закон боюнча бөлүштүрүлсүн $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ эгер } x<0 \text{ болсо} \\ \lambda\ell^{-\lambda ч} \text{ эгер } x\geq 0 \text{ болсо} \end{cases}$

(25) формуласы боюнча математикалык күтүүнү табабыз:

$$M(x)=\int_0^\infty x\ f(x)dx=\lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx$$

Бөлөктүп интегралдасак

$$M(X)=1/\lambda \qquad (29)$$

келип чыгат. Ошентип, көрсөткүчтүү бөлүштүрүүнүн математикалык күтүүсү, параметрдин тескери чоңдугуна барабар.

Эми (26) формуланы пайдаланып дисперцияны табабыз:

$$Д(x)=\int_0^\infty x^2 f(x)dx-[M(x)]^2=\lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}$$

Акыркы интегралды бөлүктөп интегралдап

$$\lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx=2/\lambda^2$$

болорун табабыз. Анда $D(x)=1/\lambda^2$ жана

$$\sigma\ (x)=\sqrt{D(x)}=1/\lambda \qquad (30)$$

болот. (29) жана (30) барабардыктарын салыштырсак

$M(x)=\sigma(x)=\dfrac{1}{\lambda}$, б.а. көрсөткүчтүү бөлүштүрүүнүн математикалык күтүүсү жана орто квадраттык кыйшайуусу бири бирине барабар.

17-мисал. Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугу көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн; $x\geq 0$ *болгондо* $f(x)=5e^{-5x}$, $x<0$ *болгодо* $f(x)=0$. $M(x)$ жана $D(x)$ти тапкыла.

Чыгаруу. Шарт боюнча $\lambda=5$. Анда

$$M(x)=\sigma(x)=\frac{1}{\lambda}=0{,}2 \qquad D(x)=1/\lambda^2=\frac{1}{25}=0{,}04$$

Көрсөткүчтүү бөлүштүрүү көп маселелерде колдонулат. Алардын бири болуп, негизги түшүнүктөрүнүн бири ишеним функциясы болгон, ишеним теориясы эсептеленет.

§18 Ишеним функциясы. Ишенемдүүлүктүн көрсөткүчтүү закону.

Кандайдыр бир элемент t_0=0 , болгон учурдан баштап иштей баштасын жана андан t убакыт өткөндөн кийин иштебей калсын.
Үзгүлтүксүз T кокус чоңдугу аркылуу, элемент иштеп турган убакыттын узундугун белгилейли.

Эгерде элемент иштеп турган убакыт t-дан кичине болсо, б.а. $T<t$ болсо, анда узундугу t болгон убакыттын ичинде элемент иштебей калат.

Ошентип, $F(t) = P(T < t)$ бөлүштүрүү функциясы t убакыттын ичинде элементтин иштебей калу ыктымалдыгы болот. Анда элементтин ушул эле убакыттын ичинде иштеп туруу ыктымалдыгы, б.а. карама-каршы $T>t$ окуясынын ыктымалдыгы

$$P(t) = P(T > t) = 1 - F(t) \qquad (31)$$

болот.

<u>16-аныктама</u>. Узундугу t болгон убакыттын ичинде, элементтин бузулбай иштеп туруу ыктымалдыгын аныктоочу $R(t)$ функциясы, ишеним функциясы деп аталат:

$$\mathrm{R}(t) = P(T > t)$$

Көпчүлүк учурда элементтин бузулбай иштеп туруу убактысынын узундугу, бөлүштүрүү функциясы

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

болгон, көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн чоңдук болот.
Элементтин иштеп туруу убактысы көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн болсо, анын ишеним функциясы (31) формуласынын негизинде

$$\mathrm{R}(t) = 1 - F(t) = 1 - 1 + e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

болот.

<u>17-аныктама</u>. Ишенимдүүлүктүн көрсөткүчтүү закону деп

$$P(t) = e^{-\lambda t} \qquad (32)$$

функциясы аталат.
Мында λ-бузулуунун тездигин түшүндүрөт. Эгерде элементтин иштеп туруу убактысы көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн болсо, узундугу t болгон убакыттын ичинде элементтин бузулбай иштеп туруу ыктымалдыгын (32) формуласы менен табууга болот.

18-мисал. Элементтин иштеп туруу убактысы көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн: $t \geq 0$ болгон учурда $f(t)$=0,02e$^{-0,02t}$ (t-убакыт). Элементтин 100с.бузулбай иштеп туруу ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Шарт боюнча бузулуунун тездиги $\lambda = 0{,}02$.

(32) формуласын пайдаланабыз: $R(100) = e^{-0,02*100} = e^{-2} = 0{,}13634$.

Демек, элементтин 100с. иштеп туруу ыктымалдыгы жакындаштырылган түрдө 0,14. .

10-эскертүү. Эгерде убакыттын кокустан болуучу учурларында элементтин бузулуусу жөнөкөй агымды түзсө, анда узундугу t болгон убакытта элементтин бир да жолу бузулбастыгынын ыктымалдыгы (IV гл §3) $P_t(0) = e^{-\lambda t}$

болот. Бул (32) формуласы менен дал келишет, себеби эки учурда тең λ нын мааниси бир эле (бузулуунун тездиги).

§19 Ишенимдүүлүктүн көрсөткүчтүү законун мүнөздөөчү касиет.

Ишенимдүүлүктүн көрсөткүчтүү закону эң жөнөкөй болуп, практикалык маселелерди чыгарууга ыңгайлуу. Бул закондун негизинде ишенимдүүлүктөр теориясынын көптөгөн формулалары жөнөкөйлөнөт. Бул болсо, көрсөткүчтүү закон төмөндөгүдөй маанилүү касиетке ээ болгондугу менен түшүндүрүлөт: убакыттын узундугу t болгон интервалында элементтин иштеп туру ыктымалдыгы, ал интервалга чейинки убакытта элементтин кандай иштегендигине көз каранды болбой, каралып жаткан интервалдын узундугуна гана байланыштуу болот (берилген λ-бузулуунун тездиги). Бул касиетти далилдеш үчүн төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү жүргүзөбүз. А окуясы -элементтин узундугу t_0 болгон (0, t_0) интервалында бузулбай иштеп туруусу; В- элементтин узундугу t_0 болгон (t_0, t_0+t) интервалында бузулбай иштеп туруусу.

Анда АВ окуясы- элементтин, узундугу t_0+t болгон $(0, t_0+t)$ интервалында бузулбай иштеп туруусу болот.

Бул окуялардын ыктымалдыктарын (32) формуласы боюнча табабыз $P(A) = e^{-\lambda t_0}$ $P(B) = e^{-\lambda t}$

$$P(A \cdot B) = e^{-\lambda(t_0+t)} = e^{-\lambda t_0} e^{\lambda t}$$

Элемент (0, t_0) интервалында бузулбай иштеп турду деп эсептеп, анын (t_0, t_0+t) интервалында бузулбай иштеп туруу ыктымалдыгын (шарттуу ыктымалдыгын) табабыз:

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{e^{-\lambda_0 t}e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda_0 t}}=e^{-\lambda t}$$

Алынган формулада t_0 жок, ал t-га гана көз каранды. Демек, элементтин мурунку (0, t_0) интервалында иштеп туруу убактысы, андан кийинки (t_0, t_0+t) интервалында кандай иштегендигине таасир этпейт жана ал (t_0, t_0+t) интервалынын узундугуна гана байланыштуу. Ушуну далилдөө талап кылынган.

Алынган жыйынтыкты башкача түшүндүрсөк да болот. $P(B)=P_A(B)=e^{-\lambda t}$ болгондутан, B ыктымалдыгы A аткарылгандыгына же аткарылбагандыгына байланышпайт.

Ошентип, кокус чоңдук көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн учурда, элементтин «мурунку учурда иштеп турушу» ал элементтин «андан кийинки» учурда иштеп турушуна таасир этпейт.

Эскертүү. Айтылган касиетке көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн гана чоңдук ээ болорун далилдөөгө болот. Ошондуктан, эгерде үйрөнүлүп жаткан кокус чоңдук жогорудагыдай касиетке ээ болсо, анда ал көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн деп айтасак болот. Мисалы, эгерде метеориттер мейкиндикте жана убакыт боюнча бир калыпта бөлүштүрүлгөн деп эсептесек, метеориттин космосттук кораблге тийип калуу ыктымалдыгы, анын, мурунку учурда корабилге тийгендигине же тийбегендигине көз каранды болбойт.
Демек,метеориттин космостук корабилге тийе турган кокустан болуучу учурлары көрсөткүчтүү закон боюнча бөлүштүрүлгөн.

§20. Стьюденттин бөлүштүрүүсү.

Z-нормалдуу бөлүштүрүлгөн кокус чоңдук болсун, жана M(**Z**) = **0**, σ(Z) = 1 болсун. V кокус чоңдугу Z тен көз каранды эмес, χ^2 закону боюнча бөлүштүрүлгөн, эркиндик даражасы k = п -1 болгон кокус чоңдук болсун. Анда $T=\frac{Z}{\sqrt{V/n}}$ кокус чоңдугу, эркиндик даражасы п болгон, t - бөлүштүрүү же Стьюденттин (англиялык статист В Госсеттин жашырун аты) бөлүштүрүүсү деп аталат.
Стьюденттин бөлүштүрүүсүнүн тыгыздыгы

$$f(x)=\frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{(n-1)\pi}\;\Gamma((n-1)/2)}\left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{-n/2}, \quad x\ge 0$$

формуласы менен аныкталат.

Эркиндиктин даражасы n чоңойгон сайын, Стьюденттин бөлүштүрүүсү нормалдык бөлүштүрүүгө тез жакындайт.

§21. Фишердин бөлүштүрүүсү

U жана V -көз каранды эмес, эркиндик даражалары, тиешелүү түрдө, m жана n болгон, χ^2 мыйзамы боюнча бөлүштүрүлгөн, кокус чоңдуктар болсун. Анда, $F=\frac{U/m}{V/n}$ кокус чоңдугун, эркиндик даражалары m жана n болгон, Фишердин бөлүштүрүүсү боюнча бөлүштүрүлгөн чоңдук деп айтышат. Бул бөлүштүрүүнүн тыгыздыгы

$$f(x)=\frac{\Gamma((n+m)/2)m^{m/2}n^{n/2}}{\Gamma(m/2)\,\Gamma(n/2)}x^{(m/2)-1}\,(1+mx)^{-(n+m)/2}, \quad x\ge 0$$

формуласы боюнча аныкталат.

МАСЕЛЕЛЕР.

1. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы:

а) $f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ *эгер* $-1<x<1$ болсо, x-тин калган маанилеринде f(x)=0;

б) $f(x)=\frac{1}{2\ell}$ *эгер* $a-\ell\le x\le a+\ell$ болсо, x-тин калган маанилеринде f(x)=0;

болсо, X-тин математикалык күтүүсүн жана дисперциясын тапкыла.

Жообу: а) M(x)=0, D(x)=1/2, б) M(x)=a, D(x)=$\ell^2/3$

2. X кокус чоңдугу нормалдуу бөлүштүрүлгөн. Бул чоңдуктун орто квадраттык кыйшайуусу 0,4 . Хтин математикалык күтүүдөн кыйшайуусу, абсалюттук чоңдугу боюнча, 0,3 төн кичине болу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 0,5468

3. X кокус чоңдугу нормалдуу бөлүштүрүлгөн. Анын орто квадраттык кыйшайуусу жана математикалык күтүүсү тиешелүү түрдө 2 жана 6. Сыноонун натыйжасында Хтин]4;8[интервалына тийиштүү маанилерге ээ болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 0,6826

4. Өлчөөнүн кокус каталары нормалдык законго баш ийет жана анын математикалык күтүүсү а=0, орто квадраттык кыйшайуусу $\sigma = 1мм$. Көз каранды эмес эки байкоонун каталарынын, жок дегенде бири абсалюттук чоңдугу боюнча 1,28мм-ден чоң болбостук ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 0,96

5. Автамат даярдоочу тетиктин өлчөмү долбордогудан 2мм ашпай айырмаланса, ал стандарттуу деп эсептелет. Кокус айырма нормалдуу закон боюнча бөлүштүрүлгөн чоңдук, анын орто квадраттык кыйшайуусу $\sigma = 1{,}6мм$ жана математикалык күтүүсү а=0. Автамат канча процент тетикти стандарттуу даярдайт?

Жообу: Болжол менен 79%

6. Дискреттүү Х кокус чоңдугунун бөлүштүрүү закону:

$$а)\begin{array}{cccc} X & 1 & 2 & 3 \\ P & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{array} \qquad б)\begin{array}{cccc} X & -1 & 1 & 2 \\ P & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{array}$$

У=x^4 функциясынын бөлүштүрүү законун тапкыла.

Жообу: $а)\begin{array}{cccc} У & 1 & 16 & 81 \\ P & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{array} \qquad б)\begin{array}{ccc} У & 1 & 16 \\ P & 0{,}3 & 0{,}7 \end{array}$

7. Үзгүлтүксүз Х кокус чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы f(x) берилген. Эгер

$а)\ Y = x+1 \quad (-\infty < x < \infty); \quad б)\quad Y = 2x \quad (-a < x < a)$ болсо, У-тин дифференциалдык $\varphi(y)$ функциясын тапкыла.

Жообу: $а)\ \varphi(y) = f(y-1) \quad (-\infty < y < \infty)\ б)\ \varphi(y) = \frac{1}{2} f\left(\frac{y}{2}\right) \quad (-2a < y < 2a)$

8. Көз каранды эмес дискреттүү эки кокус чоңдук бөлүштүрүү закондору менен берилген: $\begin{array}{cccc} X & 2 & 3 & 5 \\ P & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y & 1 & 4 \\ P & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}$

а) Z=x+y; б) Z=xy функцияларынын бөлүштүрүү закондорун тапкыла.

Жообу: а) $\begin{array}{cccccc} Z & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 \\ P & 0{,}06 & 0{,}10 & 0{,}28 & 0{,}40 & 0{,}16 \end{array}$

б)

Z	2	3	5	8	12	20
P	0,06	0,10	0,04	0,24	0,40	0,16

9. Көз каранды эмес X жана У чоңдуктары бөлүштүрүлүш тыгыздыктары аркылуу берилген:

$$f_1(x)=\frac{1}{3}e^{-x/3} \quad (0\le x\le\infty)$$
$$f_2(y)=\frac{1}{5}e^{-y/5} \quad (0\le y<\infty)$$

Бул чоңдуктардын композициясынын, б.а. Z=X+У чоңдугунун бөлүштүрүү законун тапкыла.

Жообу: $g(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-z/5}(1-e^{-2z/15}) \text{ эгер } (z\ge 0) \text{ болсо,}\\ 0 \quad \text{эгер } (z<0) \text{ болсо.}\end{cases}$

10. Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугу көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн, анын параметри $\lambda=5$. X-тин бөлүштүрүлүш функциясын жана тыгыздыгын тапкыла.

Жообу: $x\ge 0$ *болгондо* $f(x)=5e^{-5x},\ F(x)=1-e^{-5x}$
$x<0$ *болгондо* $f(x)=0,\ F(x)=0$

11. Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугу көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн: x≥ 0 болгондо $f(x)=5\ell^{-5x},\ x<0$ болгондо f(x)=0 . Сыноонун натыйжасында X-тин [0,4 1] интервалына тийиштүү болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P(0,4<x<1)=0,13

12. Үзгүлтүксүз X кокус чоңдугу көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн: x>0 болгондо $f(x)=4\ell^{-4x},\ x<0$ болгондо f(x)=0 M(x), D(x) жана $\sigma(x)$ тапкыла.

Жообу: $M(x)=\sigma(x)=0{,}25 \quad Д(x)=0{,}0625$

13. Элементтин бузулбай иштеп туру убактысы көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн: $f(t)=0{,}01\ell^{-0{,}01t},(t>0)$. Мында t-убакыт (саат менен). Элементтин бузулбай 100с. иштеш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: R(100)=0,37

Т о г у з у н ч у г л а в а

ЭКИ КОКУС ЧОҢДУКТУН СИСТЕМАСЫ

§1 Кокус чоңдуктардын системасы. Эки өлчөмдүү кокус чоңдуктун бөлүштүрүү закону.

Буга чейин мүмкүн болгон маанилери бир гана сан менен аныкталуучу чоңдуктарды карадык. Мындай чоңдуктар бир өлчөмдүү чоңдуктар деп аталат. Мисалы, кумар ойноочу сөөкчө ташталганда чыгуучу упайдын саны - үзгүлтүктүү бир өлчөмдүү чоңдук; замбиректин снаряды түшкөн жерге чейинки аралык- үзгүлтүксүз бир өлчөмдүү чоңдук.

Бир өлчөмдүү чоңдуктардан башка дагы, мүмкүн болгон маанилери 2, 3, …,n сандары менен аныкталуучу чоңдуктарды карайбыз.

<u>1-аныктама</u>. Мүмкүн болгон маанилери эки, үч, …,n сан менен аныкталуучу чоңдуктар, тиешелүү түрдө эки өлчөмдүү, үч өлчөмдүү, ..., n өлчөмдүү чоңдуктар деп аталат.

(X,У) аркылуу эки өлчөмдүү кокус чоңдукту белгилейбиз. X жана У чоңдуктарынын ар бири, эки өлчөмдүү чоңдуктун түзүүчүлөрү (компоненттери) деп аталат; X жана У чоңдуктары бир убакта чогуу каралганда эки чоңдуктун системасын түзөт. Ошол сыяктуу эле n-өлчөмдүү чоңдукту, n-кокус чоңдуктун системасы катары карасак болот. Мисалы, үч өлчөмдүү (X, У, Z) чоңдугу, үч X, У жана Z чоңдуктарынын системасын аныктайт.

<u>1-мисал</u>. Станок-автамат болот плиткаларды штамптайт. Эгерде текшериле турган өлчөмдөр узундугу X жана туурасы У болсо, анда эки өлчөмдүү (X,У) кокус чоңдугун алабыз; эгерде узун туурасынан башка бийиктиги Z дагы текшерилсе, анда үч өлчөмдүү (X,У,Z) чоңдугун алабыз.

Эки өлчөмдүү кокус чоңдукту геометриялык түрдө тегиздиктеги кокустан алынчу (координаталары кокустан алынчу) M(X,У) чекити же $\overline{OM}$ вектору түрүндө карасак болот.

Үч өлчөмдүү кокус чоңдук гоеметриялык түрдө мейкиндиктеги M(X,У,Z) чекити же $\overline{OM}$ вектору түрүндө каралат.

Көп өлчөмдүү чоңдуктар дагы үзгүлтүктүү (түзүүчүлөрү үзгүлтүктүү) же үзгүлтүксүз (түзүүчүлөрү үзгүлтүксүз) болорун айырмалоо пайдалуу.

Эки өлчөмдүү кокус чоңдуктардын ыктымалдыктарынын бөлүштүрүү закондорун аныктайбыз.

2-аныктама. Эки өлчөмдүү үзгүлтүктүү кокус чоңдуктун бөлүштүрүү закону деп, алардын мүмкүн болгон $(X_i;У_j);(i=\overline{1,n};j=\overline{1,m})$ маанилеринин жана тиешелүү $p(X_i;У_j)$ыктымалдыктарынын тизмеси аталат.

Демейде, мындай бөлүштүрүү законду 2-таблица түрүндө беришет.

Таблицанын биринчи сабы эки өлчөмдүү (X,У) чоңдугунун биринчи X түзүүчүсүнүн бардык мүмкүн болгон маанилеринен, биринчи мамыча экинчи У түзүүчүсүнүн бардык мүмкүн болгон маанилеринен турат. «X_i мамычасы менен» «$У_j$ сабынын» кесилишиндеги тикбурчтука, эки өлчөмдүү чоңдуктун $(X_i;У_j)$маанисине ээ болуу ыктымалдыгы р$(X_i;У_j)$жазылган. $(X=x_i;У=y_j), i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$ окуялары толук группа түзгөндүктөн (II гл §8), алардын ыктымалдыктарынын суммасы бирге барабар.

2-таблица

У	X						
	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_n
y_1	$P(x_1;y_1)$	$P(x_2;y_1)$	$P(x_3;y_1)$	…	$P(x_i;y_1)$	…	$P(x_n;y_1)$
…	…	…	…	…	…	…	
y_j	$P(x_1;y_j)$	$P(x_2;y_j)$	$P(x_3;y_j)$	…	$P(x_i;y_j)$	…	$P(x_n;y_j)$
…	…	…	…	…	…	…	
y_m	$P(x_1;y_m)$	$P(x_2;y_m)$	$P(x_3;y_m)$	…	$P(x_i;y_m)$	…	$P(x_n;y_m)$

Эки өлчөмдүү чоңдуктун бөлүштүрүү законун билип туруп, ал аркылуу ар бир компоненттин бөлүштүрүү законун тапсак болот. Чындыгында эле, мисалы, $(X=x_1;У=y_1),(X=x_1,У=y_2)...(X=x_1,У=y_m)$ окуялары бирикпейт, ошондуктан Хтин x_1 маанисине ээ болу ыктымалдыгы $p(x_1)$, кошуунун теоремасы боюнча: $p(x_1)=p(x_1,y_1)+p(x_1,y_2)+...+p(x_1,y_m)$ болот. Ошентпип, Хтин x_1 маанисине ээ болу ыктымалдыгы «X_i мамычасындагы» ыктымалдыктардын суммасына барабар. Жалпы учурда $P(X=x_i)$

ыктымалдыгын табыш үчүн, x_i мамычасындагы ыктымалдыктарды кошуп коюш керек.

2-мисал. Бөлүштүрүү закону 3-таблицада берилген эки өлчөмдүү чоңдуктун түзүүчүлөрүнүн бөлүштүрүү закондорун тапкыла.

Чыгаруу. Мамычалар боюнча ыктымалдыктарды кошуп, Х-тин мүмкүн болгон маанилеринин ыктымалдыктарын алабыз:

$$P(X_1)=0{,}16;\quad P(X_2)=0{,}48\quad P(X_3)=0{,}36$$

Хтин бөлүштүрүү закону $\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 & x_3 \\ P & 0{,}16 & 0{,}48 & 0{,}36 \end{array}$ болот.

3-таблица

У	Х		
	x_1	x_2	x_3
$У_1$	0,10	0,30	0,20
$У_j$	0,06	0,18	0,16

Текшерүү: 0,16+0,48+0,36=1

Саптар боюнча ыктымалдыктарды кошуп, Утин мүмкүн болгон маанилеринин ыктымалдыктарын алабыз:

$P(У_1)=0{,}60;\quad P(У_2)=0{,}40$ бөлүштүрүү закону $\begin{array}{ccc} У & y_1 & y_2 \\ P & 0{,}60 & 0{,}40 \end{array}$

Текшерүү: 0,60+0,40=1

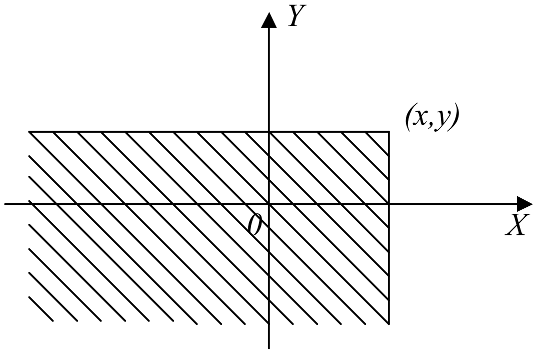
§2 Эки өлчөмдүү кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы.

Эки өлчөмдүү (Х,У) үзгүлтүктүү же үзгүлтүксүз кокус чоңдугун карайбыз. x,y анык сандар болсун. Хтин x-тен кичине мааниге ээ болу жана Утин y тен кичине мааниге ээ болу ыктымалдыгын F(x,y) аркылуу белгилейбиз. Себеби, эгерде x жана y өзгөрүлсө F(x,y) дагы өзгөрөт, б.а. F(x,y); x жана y тен функция болот.

3-аныктама. Эки өлчөмдүү (Х,У) кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы деп, ар бир (x,y) кош сандары үчүн, Хтин x тен кичине, Утин y тен кичине болу ыктымалдыгын аныктаган F(x,y) функциясын айтабыз:

$$F(x,y)=P(X<x,У<y).$$

Бул барабардыкты геометриялык түрдө төмөндөгүдөй түшүндүрсөк болот: F(x,y) функциясы, (X,У) кокус чекитинин, 13-чиймеде чийинделип көрсөтүлгөн, квадрантка тийиштүү болуш ыктымалдыгына барабар. Бул квадранттын чокусу (x,y) чекитинде жатат жана ал (x,y) чекитинин сол жана төмөн жагында жаткан чексиз квадрант болот.



13 - чийме

3-мисал. Эки өлчөмдүү (X,У) кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы $F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{3}+\frac{1}{2}\right)$ болсо, анда, сыноонун натыйжасында x<2 жана y<3 болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу. Эки өлчөмдүү кокус чоңдуктун аныктамасынын негизинде $F(x,y)=P(X<x,У<y)$ болгондуктан, изделип жаткан ыктымалдык

$$P(X<2,У<3)=F(2,3)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{3}{3}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$

болот.

Эки өлчөмдүү кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы төмөндөгү касиеттерге ээ болот.

1-касиет. Бөлүштүрүү функциясынын маанилери $0\le F(x,y)\le 1$ кош барабардыгын канааттандырат.

Далилдөө. F(x,y) функциясы, аныктама боюнча, ыктымалдыкты түшүндүрөт; ал эми ар кандай ыктымалдык, терс эмес жана бирден кичине сан.

2-касиет. F(x,y) ар бир аргумент боюнча кемибөөчү функция, б.а. эгер

$$\begin{aligned}&x_2>x_1 \text{ болсо } F(x_2,y)\ge F(x_1,y)\\&y_2>y_1 \text{ болсо } F(x,y_2)\ge F(x,y_1)\end{aligned}$$

Далилдөө. $X<x_2 \text{ жана } У<y$ деген окуяны төмөндөгүдөй бирикпөөчү эки окуяга бөлсөк болот:

1. Хтин мааниси x_1ден кичине жана У<y (ыктымалдыгы $P(X<x_1, У<y)$);

2. Хтин мааниси $x_1 \le x < x_2$ барабарсыздыгын канааттандырат жана У<у (ыктымалдыгы $P(x_1 \le X < x_2, У < y)$).

Кошуунун теоремасы боюнча

$$P(X < x_2, У < y) = P(X < x_1, У < y) + P(x_1 \le X \le x_2, У < y)$$

Мындан $P(X < x_2, У < y) - P(X < x_1, У < y) = P(x_1 \le X \le x_2, У < y)$ же

$F(x_2, y) - F(x_1, y) = P(x_1 \le X \le x_2, У < y)$ келип чыгат.

Ар кандай ыктымалдык оң сан болгондуктан

$F(x_2, y) - F(x_1, y) \ge 0$ же $F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$

2-касиет далилденди.

Бул касиетти геометриялык түрдө төмөндөгүдөй түшүндүрсөк болот: $F(x_2, y)$ *функциясы* $(X, У)$ чоңдугунун чокусу (x_2, y) чекитинде жаткан чексиз $x<x_2$,У<у квадрантка тийиштүү болу ыктымалдыгы; $F(x_1, y)$- чокусу (x_1,y) чекитинде жаткан чексиз $x<x_1$ У<у квадрантка тийиштүү болу ыктымалдыгы. Биринчи айтылган квадранттан экинчи айтылган квадрант чиймеленген тилкеге кичине (14а-чийме). Чоң квадрантка тийиштүү болу ыктымалдыгы чоң болору түшүнүктүү.

Ушул сыяктуу эле F(x,y) функциясы у боюнча кемибей турган функция экендигин далилдөөгө болот. Бул 14б- чиймесинен көрүнүп турат.

<u>3-касиет</u>. Пределдик барабардыктар

1) $F(-\infty, y) = 0$ $2) F(x, -\infty) = 0$ $3) F(-\infty, -\infty) = 0$ $4) F(\infty, \infty) = 1$ аткарылат.

Далилдөө. 1). $F(-\infty, y) = 0$ *функциясы* $X < -\infty, У < y$ окуясынын ыктымалдыгын түшүндүрөт. Бул мүмкүн эмес окуя. Себеби, X$< -\infty$ болушу мүмкүн эмес. Демек, анын ыктымалдыгы нөлгө барабар. Геометриялык түрдө $x \to -\infty$ умтулса (x,y) чекити да ($-\infty$) ди көздөй умтулуп квадрантыбыз жоголо баштайт. Демек, ага тийиштүү болуш ыктымалдык нөлгө умтулат. Ушул сыяктуу эле:

2) У$< -\infty$ окуясы мүмкүн эмес, демек F(x, $-\infty) = 0$)

3) X$< -\infty$, У$< -\infty$ окуялары да мүмкүс, демек $F(-\infty, -\infty) = 0$

4) X$< \infty$, У$< \infty$ окуясы шексиз болуучу окуя, демек $F(\infty, \infty) = 1$.

Геометриялык түрдө 4) учурда (x,y) оңго жана жогору чексиз жылып 13-чиймедеги квадрант бүткүл тегиздик менен барабар болуп калат. Демек, каалагандай (x,y) чекити тегиздикте жатат да, (X,У) чоңдугунун ыктымалдыгы бирге барабар болот.

<u>4-касиет</u>. а) $y = \infty$ болгондо (X,У)тин бөлүштүрүү функциясы Хтин эле бөлүштүрүү функциясы болуп калат: $F(x, \infty) = F_1(x)$

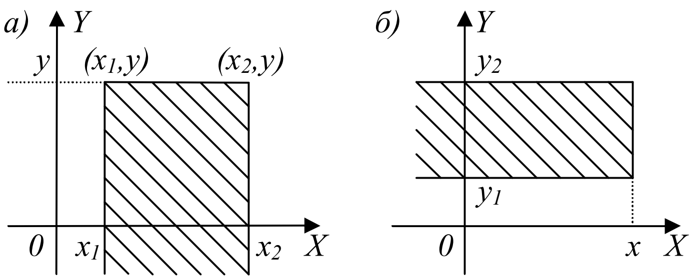
б) $x=\infty$ *болгондо* $F(\infty ,y)=F_2(y)$,болот. Мында $F_2(y)$ у тин бөлүштүрүү функциясы.

<u>Далилдөө.</u> а) У$<\infty$ окуясы шексиз окуя болгондуктан F(x, ∞) функциясы X<x ыктымалдыгын гана аныктайт, б.а. (X,У) чоңдугунун ыктымалдыгы X түзүүчүсүнүн гана ыктымалдыгы болуп эсептелет.

б) Жогорудай эле далилденет.

§3. Кокустан ташталган чекиттин жарым тилкеге жана тик бурчтука тийиштүү болу ыктымалдыгы.

X жана У чоңдуктарынын системасынын бөлүштүрүү функциясын пайдаланып, сыноонун натыйжасында кокустан ташталган чекиттин x_1<X<x_2, У<y жарым тилкесине (14а-чийме) же X<x_2, y_1<У<y_2 жарым тилкесине (14б-чийме) тийиштүү болу ыктымалдыктарын жеңил эле табууга болот.

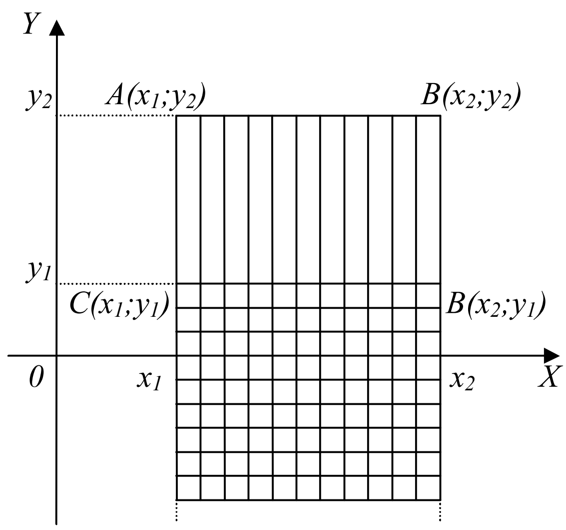


14 - чийме

Кокустан ташталган чекиттин (x_2, y) чокулуу квадрантка тийиштүү болу ыктымалдыгынан (x_1, y) чокулуу квадрантка тийиштүү болу ыктымалдыгын алып таштасак P($x_1 \le$X$\le x_2$,У<y)$=$ $=F(x_2,y)-F(x_1,y)$ болот.

Ушул сыяктуу эле P(X$\le$x, $y_1 \le$У<y_2)$=F(x,y_2)-F(x,y_1)$. Ошентип, кокустан түшкөн чекиттин жарым тилкеге тийиштүү болуш ыктымалдыгы бөлүштүрүү функциясынын бир аргумент боюнча өсүндүсүнө барабар.

Эми жактары координа окторуна параллель болгон АВСД тик бурчтугун карайбыз (15-чийме).



15 - чийме

Бул тик бурчтуктун жактарынын теңдемелери $x=x_1$, $x=x_2$, $y=y_1$ жана $y=y_2$, болсун. Кокустан ташталган (х,у) чекитинин ABCD тик бурчтугуна тийиштүү болуш ыктымалдыгын табабыз. Бул ыктымалдыкты төмөндөгүдөй тапсак болот: чекиттин тигинен чиймеленген АВ жарым тилкесине тийиштүү болуш ыктымалдыгынан (бул ыктымалдык $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)$ барабар) анын туурасынан чиймеленген СД жарым тилкесине тийиштүү болуш ыктымалдыгын (бул ыктымалдык $F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)$ болот) алып таштаганга барабар:

$$P(x_1 \le X \le x_2,\ y_1 \le У < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)] \qquad (33)$$

<u>4-мисал</u>. Эгер кокустан ташталган (х,у) чекиттининин бөлүштүргүү функциясы $F(x, y) = \sin x \sin y (0 \le x \le \pi/2 \quad , 0 \le y \le \pi/2)$ *болсо, анын* $x = \pi/6, x = \pi/2, \quad y = \pi/2, y = \pi/3$ түз сызыктары менен чектелген тик бурчтука тийиштүү болуш ыктымалдыгын тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. $x_1 = \pi/6, x_2 = \pi/2, y_1 = \pi/4, y_2 = \pi/3$ деп алсак, (33) формуласынан

$$P(\pi/6 < X < \pi/2, \pi/4 < У < \pi/3) = \left[F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)\right] - F\left[\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)\right] - \left[F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) -\right.$$

$$\left.F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}\right] - \left[\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right] - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right] = (\sqrt{3} - \sqrt{2})/4 = 0{,}08$$

келип чыгат.

§4 Үзгүлтүксүз эки өлчөмдүү кокус чоңдуктун ыктымалдыктарын чогуу бөлүштүрүш тыгыздыгы (ыктымалдыктардын эки өлчөмдүү тыгыздыгы) жана функиясы.

Буга чейин эки өлчөмдүү чоңдук, бөлүштүргүү функциясы аркылуу берилген. Эки өлчөмдүү чоңдукту бөлүштүргүү тыгыздыгы аркылуу берсе да болот. Мындан ары F(x,y) бөлүштүргүү функциясы үзгүлтүксүз жана үзгүлтүксүз экинчи тартиптеги туундуга (мүмкүн чектүү сандагы сызыктардан башка бардык жерде) ээ болот деп, эсептейбиз.

<u>4-аныктама</u>. Эки өлчөмдүү үзгүлтүксүз (Х,У) кокус чоңдугунун ыктымалдыктарын чогуу бөлүштүргүү тыгыздыгы деп, бөлүштүргүү

функциясынын экинчи тартиптеги аралаш туундусу аталат да, ал f(x,y) түрүндө белгиленет: $f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

Геометриялык түрдө бул функцияны, бөлүштүрүү бети деп, аталган бет катары карасак болот.

<u>5-мисал</u>. (X,У) кокус чоңдуктардын системасынын бөлүштүрүү функциясы $F(x,y)=\sin x\cdot\sin y(0\le x\le\pi/2, 0\le y<\pi/2)$

болсо, анын бөлүштүрүү тыгыздыгын тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. F(x,y) функциясынан аралаш туунду алабыз:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\cos x\sin y; \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}=\cos x\cos y$$

Аныктама боюнча $f(x,y)=\cos x\cos y(0\le x\le\pi/2, 0\le y\le\pi/2)$.

Эки өлчөмдүү кокус чоңдуктун берилген чогуу бөлүштүрүү тыгыздыгы боюнча анын бөлүштүрүү функциясын

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy$$

формуласы боюнча табууга болот. Бул бөлүштүрүү тыгыздыктын аныктамасынан келип чыгат.

<u>6-мисал</u>. Эки өлчөмдүү кокус чоңдуктун бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

болсо, анын бөлүштүрүү функциясын тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy$ формуласын пайдаланабыз:

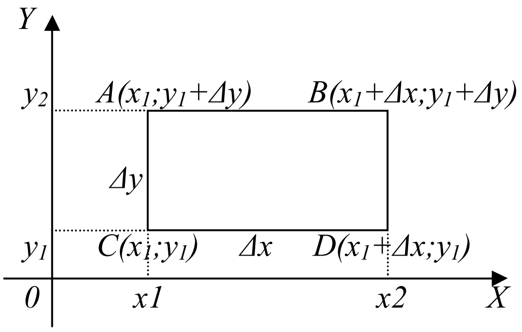
$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+y^2}\left(\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+x^2}dx\right)dy=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+y^2}\left(arctgx+\frac{\pi}{2}\right)dy=\left(\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2}=$$
$$=\left(\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctgy+\frac{1}{2}\right)$$

§5 Ыктымалдыктардын эки өлчөмдүү тыгыздыгынын ыктымалдык мааниси.

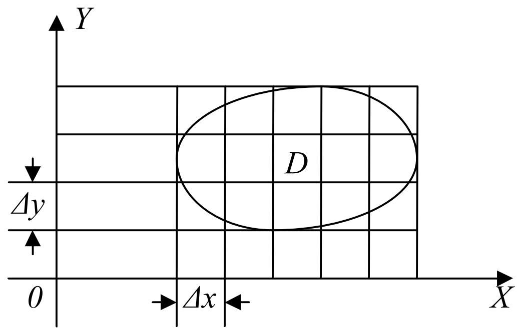
Кокустан ташталган (X,У) чекитинин ABCD тик бурчтугуна (16-чийме) тийиштүү болу ыктымалдыгы

P($x_1\le$X$\le x_2$, $y_1\le$У$<y_2$) $=[F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)]-[F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)]$

болорун билебиз ((33) формула).



16 - чийме



17 - чийме

Кыскачаарак болуш үчүн барабардыктын сол жагын $P_{АВСД}$ аркылуу белгилеп, оң жагына Лагранждын теоремасын колдонсок

$$P_{АВСД} = \frac{\partial^2 F(\xi,\eta)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y$$

$x_1 < \xi < x_2,\ y_1 < \eta < y_2,\ \Delta x = x_2 - x_1,\ \Delta y = y_2 - y_1$ келип чыгат. Мындан $F_{xy}''(\xi,\eta) = \frac{P_{ADCD}}{\Delta x \Delta y}$ же

$$f(\xi,\eta) = \frac{P_{АВСД}}{\Delta x \Delta y} \qquad (34)$$

$\Delta x \Delta y - АВСД$ тик бурчтугунун аянты экенин эске алып: $f(\xi,\eta)$тыгыздыгы кокустан ташталган чекиттин АВСД тик бурчтугуна тийиштүү болуш ыктымалдыгынын, ал тик бурчтуктун аянтына болгон катышына барабар деген жыйынтык чыгарабыз. (34) барабардыгынан $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$учурда пределге өтсөк $\xi \to x, \eta \to y$жана ошондуктан $f(\xi,\eta) \to f(x,y)$

Ошентип
$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P_{АВСД}}{\Delta x \Delta y}$$

§6 Кокустан ташталган чекиттин каалагандай областка тийиштүү болуш ыктымалдыгы.

(34) барабардыгын $f(\xi,\eta)\Delta x \cdot \Delta y$=$p_{АВСД}$ түрүндө жазсак болот. Мындан, $f(\xi,\eta)\Delta x \cdot \Delta y$ - кокус чоңдуктун, жактары Δх жана Δу болгон тик бурчтука тийиштүү болуш ыктымалдыгы деген жыйынтык алабыз. хОу тегиздигинде каалагандай Д облатсы берилсин. (Х,У) бул областка тийиштүү болуш окуясын (Х,У)$\subset$Д түрүндө белгилейбиз.

Ох огуна параллель, бири биринен Δx алыстыкта жатышкан түз сызыктар, жана Оу огуна параллель, бири биринен Δу алыстыкта жатышкан түз сызыктар менен Д областын n жөнөкөй областарга бөлөбүз(17-чийме). Жөнөкөйлүк үчүн, бул түз сызыктар областын контурун экиден ашык эмес чекиттерде кесип өтөт деп эсептейбиз. Кокустан ташталган чекиттин, ар бир жөнөкөй областарга тийиштүү болуу окуялары, бирикпөөчү окуялар болот. Анда, чекиттин Д областына тийиштүү болуш ыктымалдыгы (жөнөкөй областардын суммасы жакындаштырылган түрдө Д областына барабар), ар бир жөнөкөй областка тийиштүү болуш ыктымалдыктарынын суммасына барабар:

$$P((X,Y)\subset Д)\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta x\Delta y$$

Мындан $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ учурда пределге өтүп

$$P((X,Y)\subset Д)=\iint_{\infty}f(x,y)dxdy \qquad (35)$$

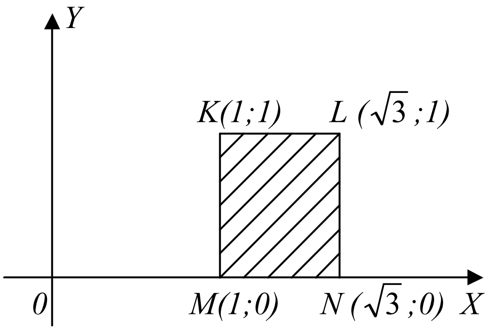
барабардыгын алабыз.

Ошентип, кокустан ташталган чекиттин Д областына тийиштүү болуш ыктымалдыгын табыш үчүн, бөлүштүрүү жыштыктан Д областы боюнча кош интеграл алып коюш керек.

(35) барабардыгын геометриялык түрдө төмөндөгүдөй түшүндүрсөк болот: (Х,У)-тин Д областына тийиштүү болуш ыктымалдыгы, жогорку жагынан z=f(x,y) бети менен чектелген, негизи, анын хОу тегиздигиндеги проекциясы болгон, цилиндирдик телонун көлөмүнө барабар.

<u>7-мисал</u>. Эки өлчөмдүү кокус чоӊдуктун бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$



18 - чийме

Кокустан ташталган чекиттин, чокулары К(1;1), $L(\sqrt{3};1)$ $M(1;0)$ $N(\sqrt{3};0)$ болгон тик бурчтукка (18-чийме) тийиштүү болуш ыктымалдыгын тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. Изделип жаткан ыктымалдык

$$P((X,У)\subset D)=$$

$$\iint_{Д}\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}dxdy=\frac{1}{\pi^2}\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{\pi^2}arctgy\Big|_0^1 arctgx\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{1}{\pi^2}\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{12}=\frac{1}{48}$$

болот.

§7 Ыктымалдыктардын эки өлчөмдүү тыгыздыгынын касиеттери.

1-касиет. Ыктымалдыктардын эки өлчөмдүү тыгыздыгы терс эмес: $f(x,y) \geq 0$

Далилдөө. (34) формуласынан, $P_{ABCД}$ ыктымалдыгы жана $\Delta x \cdot \Delta y$ аянты терс эмес болгондуктан, $f(\xi,\eta)$ терс эмес деген жыйынтык алынат. Анда, анын $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ учурдагы предели f(x,y) дагы терс эмес болот.

Бул касиет f(x,y) функциясы ар бир аргумент боюнча кемибөөчү функция (§2, 2-касиет) болгондугунан да келип чыгат.

2-касиет. Эки өлчөмдүү тыгыздыктан чексиз пределдер боюнча алынган кош интеграл бирге барабар:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

Далилдөө. Интегралдын чексиз пределдери, интегралдоо обласы- xOy тегиздигинин бардык чекиттери болорун түшүндүрөт. Кокустан ташталган чекиттин xOy тегиздигине түшөрү шексиз окуя болгондуктан, анын ыктымалдыгы бирге барабар, б.а.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

8-мисал. Үзгүлтүксүз эки өлчөмдүү (X,У) чоңдугунун чогуу бөлүштүрүлүш тыгыздыгы берилген: $0 \leq x \leq \pi/2, \quad 0 \leq y \leq \pi/2$ квадратында $f(x,y) = C\cos x \cos y$,бул квадраттан сырткары $f(x,y) = 0$. С параметрин тапкыла.

Чыгаруу. x жана y 0 дөн π/2 чейин өзгөрөрүн эске алып, 2-касиетти пайдалансак

$$C\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/2} \cos x \cos y dxdy = 1 \quad же \quad C = 1/\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/2} \cos x \cos y dxdy$$

болот. Интегралды таап С=1 болорун аныктайбыз.

§8 Эки өлчөмдүү чоңдуктун түзүүчүлөрүнүн бөлүштүрүү тыгыздыктарын табуу.

Эки өлчөмдүү кокус чоңдуктун ыктымалдыктарынын чогуу бөлүштүрүлүш тыгыздыгы белгилүү болсун. Анын түзүүчүрөлүрүн бөлүштүрүү тыгыздыктарын табалы.

$f_1(x)$ аркылуу X түзүүчүнүн бөлүштүрүү тыгыздыгын белгилеп, аны табалы.

Аныктама боюнча $$f_1(x)=\frac{dF_1(x)}{dx}$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy \quad (\S 4) \quad жана \quad F_1(x)=F(x,\infty)$$

(§2 ,4-касиет) барабардыктарын эске алсак

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$$

болот. Мындан

$$\frac{dF_1(x)}{dx}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad же \quad f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad (36)$$

келип чыгат. Ушул сыяктуу эле

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \qquad (37)$$

Ошентип, түзүүчүлөрдүн биринин бөлүштүрүү тыгыздыгы, системанын бөлүштүрүү тыгыздыгынан, экинчи түзүүчүгө тийиштүү өзгөрүлмө боюнча, чексиз пределдери менен алынган өздүк эмес интегралга барабар.

9-мисал. (X,У) бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x,y)=\begin{cases} 1/6\pi & эгер \quad x^2/9+y^2/4<1 \quad болсо \\ 0 & эгер \quad x^2/9+y^2/4>1 \quad болсо \end{cases}$$

X жана У түзүүчүрөлүрүн бөлүштүрүү тыгыздыктарын тапкыла.

Чыгаруу. Хтин бөлүштүрүү тыгыздыгын (36) формуласы боюнча табабыз:

$$f_1(x)=\frac{1}{6\pi}\int_{-2\sqrt{1-x^2/9}}^{2\sqrt{1-x^2/9}} dy=\frac{2}{6\pi}\int_{0}^{2\sqrt{1-x^2/9}} dy=\frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}$$

Ошентип, $f(x,y)=\begin{cases} 2\sqrt{9-x^2}/9\pi & эгер\quad |x|<3\quad болсо \\ 0 & эгер\quad |x|\ge 3\quad болсо \end{cases}$.

Ушул сыяктуу эле (37) формуласы боюнча

$$f_2(y)=\begin{cases} \sqrt{4-y^2}/2\pi & эгер\quad |y|<2\quad болсо \\ 0 & эгер\quad |y|\ge 2\quad болсо \end{cases}$$

болорун табабыз.

Окуучуларга, табылган функциялар

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx=1 \quad же \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)dy=1$$

барабардыктарын канаатандырарын текшерип көрүү сунуш кылынат.

§9 Үзгүлтүктүү кокус чоңдуктардын системасынын түзүүчүлөрүнүн шарттуу бөлүштүрүлүш закондору.

Эгерде А жана В окуялары көз каранды болушса, анда В шарттуу ыктымалдыгы шартсыз ыктымаллдыктан айырмаланары белгилүү. Бул учурда

$$P_A(B)=P(AB)/P(A) \qquad (38)$$

болот.

Ушул сыяктуу абал, кокус чоңдуктар үчүн да болот. Эки өлчөмдүү кокус чоңдуктардын бөлүштүрүү тыгыздыктарынын байланышын мүнөздөө үчүн, шарттуу бөлүштүрүлүш түшүнүгүн киргизебиз.

(Х,У) эки өлчөмдүү чоңдугун карайбыз. Анын түзүүчүлөрүнүн мүмкүн болгон маанилери: $x_1,x_2,...,x_n;y_1,y_2,...,y_m$ болсун. У=y_1 болду дейли; бул учурда Х мүмкүн болгон $x_1,x_2,...,x_n$ маанилеринин бирине ээ болот.

Р(x_1/y_1) аркылуу У=y_1 болгондо, Х=x_1 болот деген окуянын ыктымалдыгын белгилейбиз.

Жалпы учурда Р(x_i/y_j)$,i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$ аркылуу У=y_j болгондо Х=x_i болот деген окуянын ыктымалдыгын белгилейбиз. У=y_j болгондогу(бул окуя аткарылгандагы) Хтин шарттуу ыктымалдыктары деп $P(x_1/y_j),P(x_2/y_j),...P(x_n/y_j)$ шарттуу ыктымалдыктары аталат. Утин шарттуу ыктымалдыктары дагы ушул сыяктуу аныкталат.

Эки өлчөмдүү чоңдуктун бөлүштүрүү законун билип туруп, (38) формуласы боюнча анын түзүүчүлөрүнүн бөлүштүрүү закондорун таба алабыз.

Мисалы, У=y_1 окуясы аткарылды деп эсептесек Х-тин шарттуу бөлүштүрүү законун $P(x_i / y_1) = \frac{P(x_i, y_1)}{P(y_1)} \quad i = \overline{1,n}$

формуласы боюнча табууга болот.

Жалпы учурда Х-тин шарттуу бөлүштүрүү закону

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)} \qquad (39)$$

болот.

Ушул сыяктуу эле Утин шарттуу бөлүштүрүү закону

$$P(y_j / x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$$ болот.

<u>1-эскертүү</u>. Шарттуу ыктымалдыктардын суммасы бирге барабар. Чындыгында эле, y_j турактуу деп алсак (§1 кара) $\sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j) = P(y_j)$.

Анда $$\sum_{i=1}^{n} P(x_i / y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j) / P(y_j) = P(y_j) / P(y_j) = 1$$

Ушул сыяктуу эле

$$\sum_{i=1}^{m} P(y_j / x_i) = 1$$

Шарттуу бөлүштүрүүлөрдүн бул касиеттерин эсептөөлөрдү текшерүүдө колодонушат.

<u>10-мисал</u>. Эки өлчөмдүү кокус чоңдук 4-таблицасында берилген.

4-таблица

У	Х		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

У=y_1 окуясы аткарылды деп эсептел, Х чоңдугунун шарттуу бөлүштүрүү законун тапкыла.

Чыгаруу. Изделип жаткан закон $P(x_1/y_1), P(x_2/y_1)$, $P(x_3/y_1)$ ыктымалдыктарынын тобу менен аныкталат. $P(y_1)=0{,}60$ (2-мисалды кара) экендигин эске алып, (39) формуласы боюнча

$$P(x_1/y_1)=P(x_1/y_1)/P(y_1)=0{,}10/0{,}60=1/6$$

$$P(x_2/y_1)=P(x_2/y_1)/P(y_1)=0{,}30/0{,}60=1/2$$

$$P(x_3/y_1)=P(x_3/y_1)/P(y_1)=0{,}20/0{,}60=1/3$$

Алынган ыктымалдыктарды кошуп, алардын суммасы бирге барабар экендигин табабыз: 1/6+1/2+1/3=1

Эскертүү боюнча ушундай болуш керек эле.

§10 Эки өлчөмдүү үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун түзүүчүлөрүнүн шарттуу бөлүштүрүлүш закону.

(X, У)-үзгүлтүксүз эки өлчөмдүү кокус чоңдук болсун.

5-аныктама. У=у болгондогу Хтин шарттуу бөлүштүрүлүш тыгыздыгы $\varphi(x/y)$ деп, (X, У)тин бөлүштүрүү тыгыздыгынын (f(x,y)); Утин бөлүштүрүү тыгыздыгына (f_2(y)) болгон катышын айтабыз:

$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \qquad (40)$$

Шарттуу $\varphi(x/y)$ тыгыздыгынын шартсыз f_1(x) тыгыздыгынан айырмасын, дагы бир жолу белгилей кетели. $\varphi(x/y)$ - Хтин У=у окуясы аткарылгандагы бөлүштүрүү тыгыздыгы. Ал эми f_1(x) — Хтин бөлүштүрүү тыгыздыгы, мында У кандай мааниге ээ болушу эсепке алынбайт.

Ушул сыяктуу эле Утин X=x болгондогу шарттуу бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$\psi(y/x)=f(x,y)/f_1(x) \qquad (41)$$

Эгерде f(x,y) белгилүү болсо, анда (36), (37) формулаларынын негизинде, (40), (41) формулаларынан

$$\varphi(x/y)=f(x,y)/\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \qquad (42)$$

$$\phi(y/x)=f(x,y)/\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad (43)$$

келип чыгат.

(40), (41) формулаларын

$$f(x,y)=f_2(y)\varphi(x/y), \quad f(x,y)=f_1(x)\phi(y/x)$$

түрүндө жазып, төмөндөгүдөй жыйынтык чыгарабыз: түзүүчүлөрдүн биринин бөлүштүрүү законун, экинчисинин шарттуу бөлүштүрүү законуна көбөйтүп, эки өлчөмдүү чоңдуктун бөлүштүрүү законун табабыз.

Ар кандай бөлүштүрүү закондор сыяктуу эле, шарттуу бөлүштүрүү закондор дагы төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот.

$$\varphi(x/y)\geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x/y)dx=1$$

$$\phi\ (y/x)\geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\phi(y/x)dy=1$$

<u>11-мисал.</u> Эки өлчөмдүү (Х,У) чоңдугунун бөлүштүрүү закону

$$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi r^2 & эгер \quad x^2+y^2<r^2 \quad болсо,\\ 0 & эгер \quad x^2+y^2>r^2\end{cases}$$

анын түзүүчүлөрүнүн шарттуу бөлүштүрүү закондорун тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. $|x|<\sqrt{r^2-y^2}$ болгондогу Хтин шарттуу бөлүштүрүү законун (42) формуласын пайдаланып табабыз:

$$\varphi(x/y)=\frac{1/\pi r^2}{\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}dx}=\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}.$$

$x^2+y^2>r^2$ *болгондо* $f(x,y)=0$ болгондуктан $|x|>\sqrt{r^2-y^2}$ *болгондо* $\varphi(x/y)=0$ болот. Демек,

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}} & эгер \quad |x|<\sqrt{r^2-y^2} \quad болсо,\\ 0 & эгер \quad |x|>\sqrt{r^2-y^2} \quad болсо\end{cases}.$$

Ушул сыяктуу эле (43) формуласынын

$$\phi\ (x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}} & эгер \quad |y|<\sqrt{r^2-x^2} \quad болсо,\\ 0 & эгер \quad |y|>\sqrt{r^2-x^2} \quad болсо\end{cases}$$

түрүндө жаза алабыз.

§11. Шарттуу математикалык күтүү

Ыктымалдыктардын шарттуу бөлүштүрүлүшүнүн маанилүү мүнөздөмөлөрүнүн бири, математикалык күтүү болуп эсептелет.

6-аныктама. X=x (x саны Xтин мүмкүн болгон белгилүү мааниси) болгондогу үзгүлтүктүү У кокус чоңдугунун шарттуу математикалык күтүүсү деп, Утин мүмкүн болгон маанилеринин, алардын шарттуу ыктымалдыктарнына болгон көбөйтүндүсү аталат:

$$M(У / X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot P(y_j / x) \qquad (44)$$

Үзгүлтүксүз чоңдук үчүн $M(У / X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\phi(y/x)dy$

мында , $\phi(y/x)$- У кокус чоңдугунун X=x болгондогу шарттуу тыгыздыгы.

7-аныктама. Шарттуу M(У/x) математикалык күтүүсүнө барабар болгон f(x)=M(У/x) функциясы, Утин Xке регрессия функциясы деп аталат. X кокус чоңдугунун математикалык күтүүсү жана Xтин Уке регрессия функциясы жогоругудай эле аныкталат:

M(У/x) $= \varphi(y)$.

11-мисал. Эки өлчөмдүү дискреттүү кокус чоңдук 5-таблица менен берилген.

5-таблица

У	X			
	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$	$x_4=8$
$y_1=3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2=6$	0,30	0,10	0,03	20,07

$X=x_1=1$ болгондогу, Утин шарттуу математикалык күтүүсүн тапкыла.

Чыгаруу. $P(x_1)$ди табыш үчүн 5-таблицанын биринчи мамычасындагы ыктымалдыктарды кошобуз:

$$P(x_1)=0,15+0,30=0,45$$

$X=x_1=1$ болгондогу Утин ыктымалдыктарынын шарттуу бөлүштүрүлүшүн табабыз (§9 кара):

$$P(y_1 / x_1) = P(x_1 / y_1) / P(x_1) = 0,15 / 0,45 = 1/3$$

$$P(y_2 / x_1) = P(x_2 / y_2) / P(x_1) = 0,30 / 0,45 = 2/3$$

Изделип жаткан математикалык күтүүнү (44) формуласы боюнча табабыз

$$M(У/X=x_1)=\sum_{j=1}^{2} y_j \cdot P(y_j/x_1)=y_1 \cdot P(y_1/x_1)+y_2 P(y_2/x_1)=3\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{2}{3}=5.$$

§12 Көз каранды жана көз каранды эмес кокус чоңдуктар.

Эгерде эки чоңдуктун биринин бөлүштүрүү закону экинчиси кандай маанилерге ээ болушуна баланыштуу болбосо, анда ал чоңдуктарды көз каранды эмес чоңдуктар деп атаганбыз.

Бул аныктамадан, көз каранды эмес чоңдуктардын шарттуу бөлүштүрүү закондору алардын шартсыз бөлүштүрүү закондоруна барабар болот деген жыйынтык келип чыгат.

Кокус чоңдуктардын көз каранды эместигинин шартын табабыз. Ал шарт төмөнкү теорема боюнча аныкталат.

1-теорема. X жана У кокус чоңдуктары көз каранды эмес болуш үчүн, (X,У) системасынын бөлүштүрүү функциясы анын түзүүчүлөрүнүн бөлүштүрүү функцияларынын көбөйтүндүсүнө барабар болушу, б.а. $F(x,y)=F_1(x)F_2(У)$ болушу, зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. а)Зарыл шарты. X жана У көз каранды эмес болсун. Анда X<x, У<y окуялары көз каранды эмес, ошондуктан, бул эки окуянын чогуу аткарылыш ыктымалдыгы алардын ар биринин ыктымалдыктарынын көбөйтүндүсүнө барабар:

$$P(X<x, У<y)=P(X<x)P(У<y)$$

же $$F(x,y)=F_1(x)F_2(У)$$

б) Жетиштүү шарты. $F(x,y)=F_1(x)F_2(У)$ болсун. Мындан

$$P(X<x, У<y)=P(X<x)P(У<y)$$

келип чыгат, б.а. X<x, У<y окуяларынын чогуу аткарылыш ыктымалдыгы, алардын ар биринин ыктымалдыктарынын көбөтүндүсүнө барабар. Демек X жана У чоңдуктары көз каранды эмес.

2-теорема. Үзгүлтүксүз X жана У кокус чоңдуктары көз каранды эмес болуш үчүн, (X,У) системасынын чогуу бөлүштүрүү тыгыздыгы, анын түзүүчүлөрүнүн бөлүштүрүү тыгыздыктарынын көбөйтүндүсүнө барабар болушу, б.а. $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ болушу зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. а) Зарыл шарты. Х жана У көз каранды эмес үзгүлтүксүз чоңдуктар болсун.

Анда (1-теореманын негизинде) $F(x,y)=F_1(x)F_2(У)$

Бул барабардыктан x боюнча, андан кийин y боюнча туунду таап

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}=\frac{\partial F_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial y}$$

же (бөлүштүрүү тыгыздыктардын аныктамасы боюнча)

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$$

барабардыгын алабыз.

б) Жетиштүү шарты. $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ болсун. Бул барабардыкты x жана y боюнча интегралдап

$$\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy$$

же (§4 кара)

$$F(x,y)=F_1(x)F_2(У)$$

барабардыгын алабыз. Мындан, мурунку теореманын негизинде Х жана У көз каранды эмес деген жыйынтыка келебиз.

2-эскертүү. Жогоруда келтирилген шарттар зарыл жана жетиштүү болгондуктан, кокус чоңдуктардын көз каранды эместигинин жаңы аныктамасын берсек болот:

1. Эгерде эки кокус чоңдуктардын системасынын бөлүштүрүү функциясы, анын түзүүчүлөрүнүн бөлүштүрүү функцияларынын көбөйтүндүсүнө барабар болсо, анда ал чоңдуктар көз каранды эмес чоңдуктар деп аталат.;

2. Эгерде эки үзгүлтүксүз кокус чоңдуктардын системасынын бөлүштүрүү тыгыздыгы, анын түзүүчүлөрүнүн бөлүштүрүү тыгыздыктарынын көбөйтүндүсүнө барабар болсо, анда ал чоңдуктар көз каранды эмес чоңдуктар деп аталат.

12-мисал. Эки өлчөмдүү үзгүлтүксүз (Х,У) кокус чоңдугу, чогуу бөлүштүрүү тыгыздыгы менен берилген: $0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi$ квадратында $f(x,y)=(\sin x\sin y)/4$; квадраттын сыртында f(x,y)=0. Х жана У түзүүчүлөрү көз каранды эместигин далилдегиле.

Чыгаруу. (36) жана (37) формуларын пайдаланып, түзүүчүлөрдүн бөлүштүрүү тыгыздыктары $f_1(x)=\sin x/2$,

$f_2(y)=\sin y/2$ болорун жеңил эле табабыз. Демек, $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ болот да Х жана У көз каранды болушпайт.

Албетте, Х жана У көз каранды эместигин делилдеш үчүн, түзүүчүлөрдүн шарттуу бөлүштүрүү закондору шартсыз закондоруна барабар экендигин далилдесек да болмок.

§13 Эки кокус чоңдуктун системасынын сандык мүнөздөмөлөрү. Корреляциялык момент. Корреляциянын коэффициенти.

Эки кокус чоңдукту мүнөздөө үчүн, түзүүчүлөрдүн математикалык күтүүлөрү жана дисперцияларынан башка дагы мүнөздөөчү сандарды пайдаланышат; алардын катарына коррекциялык момент жана коррекциялык коэффициент кирет.

8-аныктама. Х жана У кокус чоңдуктарынын корреляциялык моменти μ_{xy} деп, алардын кыйшайууларынын көбөйтүндүсүнүн математикалык күтүүсү аталат:

$$\mu_{xy} = M[(x - M(X))(У - M(У))]$$

Математикалык күтүүнүн аныктамасынан, үзгүлтүктүү кокус чоңдуктар үчүн $\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i - M(X)][y_j - M(У)]P(x_i y_j)$;

ал эми үзгүлтүксүз чоңдуктар үчүн

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)][У - M(У)]f(x,y)dxdy$$

формулалары келип чыгат.

Корряляциялык момент Х жана У чоңдуктарынын байланышын мүнөздөө үчүн колдонулат. Эгерде Х менен У көз каранды эмес болушса, корреляциялык момент нөлгө барабар болорун кийин далилдейбиз.

3-эскертүү. Кыйшайуулар -борбордоштурулган кокус чоңдуктар (5-гл.,§2, 3-аныктама) экенин эске алып, корреляциялык моментти борбордоштурулган кокус чоңдуктардын көбөйтүндүсүнүн математикалык күтүүсү катары аныктаса болот:

$$\mu_{xy} = \text{M}(\dot{X}\cdot\dot{У})$$

4-эскертүү. Бул учурда, корреляциялык моментти

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y)$$

түрүндө жазууга болорун жеңил эле текшерүүгө болот.

<u>3-теорема</u>. Көз каранды эмес Х жана У чоңдуктарынын корреляциялык моменти нөлгө барабар.

<u>Далилдөө.</u> Х жана У көз каранды эмес болушкандыктан, алардын кыйшайуулары Х-М(Х) жана У-М(У) дагы көз каранды эмес болушат.

Математикалык күтүүнүн (көз каранды эмес чоңдуктар үчүн) жана кыйшайуунун касиеттерин эске алып

$$\mu_{xy} = M\{[(x - M(X)][У - M(У)]\} = M(X - M(X))M(У - M(У)) = 0$$

болорун табабыз.

Корреляциялык моменттин аныктамасынан, анын чен бирдиги Х менен Утин чен бирдиктеринин көбөйтүндүсүнө барабар экендиги көрүнүп турат. Башкача айтканда, корреляциялык моменттин чоңдугу кокус чоңдуктардын чен бирдиктерине байланыштуу болот. Ушул себептүү, эки чоңдуктун корреляциялык моменти, ал кокус чоңдуктардын кандай бирдикте өлчөнгөндүгүнө жараша, ар түрдүү болот.

Мисалы, Х жана У сантиметр менен өлчөнсүн жана μ_{xy} =2см^2 болсун; эгерде ошол эле чоңдуктар мм.менен өлчөнгөн болсо μ_{xy} =200мм^2 болот.

Корреляциялык моменттин бул өзгөчөлүгү анын кемчилиги болуп эсептелет. Себеби, ар түрдүү кокус чоңдуктардын системаларынын корреляциялык моменттерин салыштыруу кыйындыкка турат. Бул кемчиликти жоюш үчүн, жаңы сандык мүнөздөмө -корреляциялык коэффициент түшүнүгү киргизилет.

<u>9-аныктама.</u> Х жана У чоңдуктарынын корреляциялык коэффициенти r_{xy} деп, корреляциялык моменттин бул чоңдуктардын орто квадраттык кыйшайууларынын көбөйтүндүсүнө болгон катышы аталат:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

σ_x тин чен бирдиги Хтин чен бирдигине, σ_y -тин чен бирдиги Утин чен бирдигине барабар (Vгл.§3) болгондуктан, σ_x σ_y тин чен бирдиги

μ_{xy} -тин чен бирдигине барабар болот да, r_{xy} чен бирдиксиз чоңдук болот. Демек, корреляциялык коэффициенттин чоңдугу, кокус чоңдуктар кайсы чен бирдикте өлчөнгөндүгүнө байланыштуу болбойт. Корреляциялык коэффициенттин корреляциялык моменттен артыкчылыгы мына ушунда.

Көз каранды эмес чоңдуктар үчүн корреляция коэффициенти нөлгө барабар болору түшүнүктүү ($\mu_{xy}=0$ болгондуктан).

<u>5-эскертүү.</u> Ыктымалдыктар теориясынын көпчүлүк маселелеринде X кокус чоңдугунун ордуна нормаланган X' чоңдугун кароо пайдалуу. X' чоңдугу болуп, кыйшайуунун орто квадраттык кыйшацууга болгон катышы

$$X' = \frac{X - M(X)}{\sigma_x}$$ эсептелет.

Нормаланган чоңдуктун математикалык күтүүсү нөлгө, дисперциясы бирге барабар. Чындыгында эле, математикалык күтүүнүн жана дисперциянын касиеттерин пайдаланып

$$M(X') = M\left(\frac{X - M(X)}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{\sigma_x} M[X - M(X)] = \frac{1}{\sigma_x}\cdot 0 = 0,$$

$$D(X') = D\left(\frac{X - M(X)}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{\sigma_x^2} D[X - M(X)] = \frac{D(x)}{\sigma_x^2} = 1$$

болорун табабыз.

X менен Утин корреляциялык коэффициенти X' менен У' корреляциялык моментине барабар экендигин жеңил эле текшерип көрүүгө болот:

$$r_{xy} = \frac{M(X - M(X)(У - M(У))}{\sigma_x \sigma_y} = M\left\{\frac{X - M(X)}{\sigma_x}\ \frac{У - M(У)}{\sigma_y}\right\} = M(X'У') = \mu_{x'y'}$$

Бул жерде биз 4-эскертүүнү пайдаландык.

<u>4-теорема</u>. Эки X жана У кокус чоңдуктардын корреляциялык моментинин абсалюттук чоңдугу, алардын дисперцияларынын геометриялык орто чоңдугунан ашпайт:

$$|\mu_{xy}| \le \sqrt{D_X D_У}$$

<u>Далилдөө.</u> $Z_1 = \sigma_y X - \sigma_x У$ кокус чоңдугун киргизебиз да, анын дисперциясын аныктайбыз: $D(Z_1) = M[Z_1 - m_{Z_1}]^2$

Жөнөкөйлөткөндөн кийин

$D(Z_1) = 2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y\mu_{xy}$

болот. Ар кандай дисперция терс болбогондуктан

$2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y\mu_{xy} \geq 0$ болот да, мындан

$$\mu_{xy} \leq \sigma_x\sigma_y \quad (45)$$

келип чыгыт.

$Z_2 = \sigma_y X + \sigma_x У$ кокус чоңдугу үчүн жогорудай эле

$$\mu_{xy} \geq -\sigma_x\sigma_y \quad (46)$$

барабарсыздыгын алабыз.

(45) жана (46) экөөнү чогуу

$$-\sigma_x\sigma_y \leq \mu_{xy} \leq \sigma_x\sigma_y \quad (47)$$

же $\left|\mu_{xy}\right| \leq \sigma_x\sigma_y$ түрүндө жазсак болот.

Ошентип, $\left|\mu_{xy}\right| \leq \sqrt{D_X D_У}$

<u>5-теорема</u>. Корреляция коэффициенти абсалюттук чоңдугу боюнча бирден ашпайт:

$$\left|r_{xy}\right| \leq 1$$

<u>Далилдөө.</u> (47) барабарсыздыгын оң сандардын көбөйтүндүсүнө ($\sigma_x\sigma_y$) бөлсөк $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ же

$\left|r_{xy}\right| \leq 1$ келип чыгат.

§14 Кокус чоңдуктардын корреляциялуулугу жана көз карандылыгы.

<u>10-аныктама</u>. Эгерде, X жана У эки кокус чоңдуктарынын корреляциялык моменти (же корреляциялык коэффициенти) нөлгө барабар болбосо, ал чоңдуктар корреляциялуу (корреляцияланган) чоңдуктар деп аталат.

<u>11-аныктама</u>. Эгерде эки чоңдуктун корреляциялык моменти нөлгө барабар болсо, ал чоңдуктар корреляциясыз (корреляцияланбаган) чоңдуктар деп аталат.

Корреляциялуу эки чоңдук көз каранды да болушат. Чындыгында эле, андай эмес деп божомолдосок, анда $\mu_{xy} = 0$ (3-

теорема), бул болсо алынган шартка карама-каршы, себеби корреляциялуу чоңдуктар үчүн $\mu_{xy} \neq 0$

Буга тескери ырастоо дайыма эле аткарыла бербейт, б.а. эгер эки чоңдук көз каранды болушса алар корреляциялуу да корреляциясыз да болушу мүмкүн.

Башка сөз менен айтсак, көз каранды чоңдуктардын корреляциялык моменти нөлгө барабар да, барабар эмес да болушу мүмкүн. Көз каранды чоңдуктардын корреляциясыз болушуна мисал келтирели.

13-мисал. Эки өлчөмдүү кокус (Х,У) чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{6\pi} & \textit{эгер} \quad x^2/9+y^2/4 \le 1 \quad \textit{болсо}, \\ 0 & \textit{эгер} \quad x^2/9+y^2/4 > 1 \quad \textit{болсо}. \end{cases}$$

Бул чоңдуктар көз каранды, бирок корреляцияланбаган чоңдуктар экенин далилдегиле.

Чыгаруу. Түзүүчүлөрдүн мурда чыгарылган (§8) бөлүштүрүү тыгыздыктарын пайдаланабыз: берилген эллипстин ичинде

$$f_1(x)=\frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, \quad f_2(x)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2},$$

эллипстин сыртында $f_1(x)=0, \quad f_2(x)=0$.

$f(x,y)\neq f_1(x)\,f_2(x)$ болгондуктан, Х жана У көз каранды чоңдуктар болушат (§12).

Х менен У корреляцияланбагандыгын текшериш үчүн $\mu_{xy}=0$ болорун текшериш керек.

Корреляциялык моменти

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)][y-M(У)]f(x,y)dxdy$$

формуласы боюнча табабыз.

$f_1(x)$ функциясы Оу огуна карата симметриялуу болгондуктан М(Х)=0; ошол сыяктуу эле М(У)=0, себеби $f_2(y)$ функциясы Ох огуна карата симметриялуу.

Ошондуктан, $\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$.

$f(x,y)$-турактуу болгондуктан

$$\mu_{xy} = f(x,y)\int_{-\infty}^{\infty} xdx \int_{-\infty}^{\infty} ydy$$

Акыркы барабардыктын оң жагындагы интегралдар, так функциядан симметриялуу интервал боюнча алынгандыктан, нөлгө барабар болушат. Демек, $\mu_{xy} = 0$, б.а. Х жана У көз каранды, бирок корреляцияланбаган чоңдуктар.

Ошентип, эки чоңдуктун корреляциялуулугунан алардын көз карандылыгы келип чыгат, бирок көз карандылыктан корреляциялуулук келип чыкпайт. Эки чоңдуктун көз каранды эместигинен алардын корреляциясыздыгы келип чыгат, ал эми эки чоңдуктун корреляциясыздыгынан, жалпы учурда, алардын көз каранды эместиги келип чыкпайт. Нормалдуу бөлүштүрүлгөн чоңдуктардын корреляциясыздыгынан, жалпы учурда, алардын көз каранды эместиги келип чыгарын эскерте кетели. Бул кийинки параграфта далилденет.

§15 Тегиздиктеги бөлүштүрүүнүн нормалдык закону.

Практикада көпчүлүк учурда нормалдуу бөлүштүрүлгөн эки өлчөмдүү чоңдуктар кездешет.

12-аныктама. Эгерде эки өлчөмдүү (Х,У) чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2{}_{xy}}} e^{\frac{1}{2(1-r^2{}_{xy})}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy}\frac{x-a_1}{\sigma_x}\cdot\frac{y-a_2}{\sigma_y} - \right]} \qquad (48)$$

формуласы менен аныкталса, анда ал кадимкидей бөлүштүрүлгөн чоңдук деп аталат.

Кадимкидей бөлүштүрүлгөн эки өлчөмдүү чоңдук беш параметр $a_1, a_2, \sigma_x, \sigma_x$ *жана* r_{xy} менен аныкталарын көрүп турабыз. Бул параметрлер төмөндөгүдөй маанилерге ээ болорун далилдөөгө болот: a_1, a_2-математикалык күтүүлөр, σ_x, σ х-орто квадраттык кыйшайуулар, r $_{xy}$ -корреляциялык коэффициент.

Жогоруда биз кадимкидей бөлүштүрүлгөн чоңдуктун түзүүчүлөрү корреляциясыз болушса, анда алар көз каранды эмес болушат дегенбиз. Чындыгында эле, Х жана У корреляциясыз чоңдуктар болсун. Анда, $r_{xy} = 0$ болгондуктан, (48) формуласы

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-0,5[(x-a_1)^2/\sigma_x^2 + (y-a_2)^2/\sigma_y^2]} = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a_1)^2/2\sigma_x^2} \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-(y-a_2)^2/2\sigma_y^2} = f_1(x)f_2(y)$$

түрүнө келет.

Ошентип, эгерде кадимкидей бөлүштүрүлгөн чоңдуктун түзүүчүлөрү корреляциясыз болсо, анда системанын чогуу бөлүштүрүлүш законунун тыгыздыгы, түзүүчүлөрдүн бөлүштүрүү тыгыздыктарынын көбөйтүндүсүнө барабар. Мындан түзүүчүлөрдүн көз каранды эместиги келип чыгат (§12). Тескери ырастоо да туура (§14).

Демек, кадимкидей бөлүштүрүлгөн эки өлчөмдүү чоңдуктар үчүн, алардын түзүүчүлөрүнүн көз каранды эместик жана корреляциясыздык түшүнүктөрү тең күчтө.

6-эскертүү. Эгерде эки өлчөмдүү кокус чоңдук $a_1, a_2, \sigma_x, \sigma_x, r_{xy}$ параметрлери менен кадимкидей бөлүштүрүлгөн болсо, анда (36), (37) формулаларын пайдаланып, анын түзүүчүлөрү дагы тиешелүү түрдө a_1, σ_x жана a_2, σ_y параметлери менен кадимкидей бөлүштүрүлгөндүгүн далилдөөгө болот.

§16 Сызыктуу регрессия. Орто квадраттык регрессиянын түз сызыктары

Түзүүчүлөрү көз каранды болгон, эки өлчөмдүү (Х,У) чоңдугун карайбыз. Түзүүчүлөрдүн бири, экинчисинен функция болсун дейли. У чоңдугун, жакындаштырылган түрдө, Хтен сызыктуу функция деп алабыз: $У \approx g(X) = \alpha + \beta X$

α *жана* β -аныктала турган параметрлер. Бул параметрлерди аныктоонун жөнөкөй жолу, эң кичине квадраттар методу болуп эсептелет.

13-аныктама. Эгерде М[У-$g(X)$]^2 математикалык күтүүсү эң кичине мүмкүн болгон мааниге ээ болсо, анда $g(X)$ функциясы Утин «эң жакшы жакындоосу» (эң кичине квадраттар методунун маанисинде) же Утин Хке орто квадраттык регрессиясы деп, аталат.

6-теорема Утин Хке орто квадраттык регрессиясы $g(X) = m_y + r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(X - m_x)$ болот, б.а. $g(X) = \alpha + \beta X$ формуласындагы

$$\alpha = m_y - r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x \quad , \qquad \beta = \sigma\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \ .$$

Мында , $m_x = M(X), \quad m_y = M(У), \quad \sigma_x = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_y = \sqrt{D(У)}$;

$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ - X жана У чоңдуктарынын корреляция коэффициенти.

Далилдөө. $M[Y - g(X)]^2$ математикалык күтүүсү α жана β-дан функция болот:

$$F(\alpha,\beta) = M[Y - \alpha - \beta X]^2 \qquad (49)$$

Бул функцияны $F(\alpha,\beta) = M[(Y - m_y) - \beta(X - m_x) + m_y + \beta m_x - \alpha]^2$ түрүндө жазып жана $M(X - m_x) = M(У - m_y) = 0$,

$M(X - m_x) = M(У - m_y) = \mu_{xy} = r_{xy}\sigma_x\sigma_y$ болорун эске алып, жөнөкөйлөтсөк

$$F(\alpha,\beta) = \sigma_y^2 + \beta^2\sigma_x^2 - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y\beta + (m_y - \alpha - \beta m_x)^2$$

келип чыгат. α жана β ны ушул функция эң кичине мааниге ээ болгондой кылып табышыбыз керек.

Бул функциянын экстремумдарын табыш үчүн, жекече туундуларды таап, нөлгө барабардайбыз:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = -2(m_y - \alpha - \beta m_x) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} = 2\beta\sigma_x^2 - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y = 0 \end{cases}$$

Мындан $\beta = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \quad \alpha = m_y - r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x$

α *менен* β нын ушул маанилеринде $F(\alpha,\beta)$ функциясы эң кичине мааниге ээ болорун жеңил эле текшерүүгө болот.

Ошентип, Утин Хке орто квадратттык регрессиясы $g(X) = \alpha + \beta X = m_y - r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X$ *же* $g(X) = m_y + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)$ болот.

14-аныктама. $\beta = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ саны Утин Хке регрессиясынын коэффициенти деп аталат.

15-аныктама.

$$y - m_y = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) \qquad (50)$$

түз сызыгы, Утин Хке орто квадраттык регрессиясынын түз сызыгы деп аталат.

α *менен* β нын табылган маанилерин (49) формуласына коюп $F(\alpha,\beta)$ функциясынын эң кичине мааниси $\sigma_y^2(1-r_{xy}^2)$ болорун табабыз. $\sigma_y^2(1-r_{xy}^2)$ чоңдугун, У кокус чоңдугунун Х чоңдугуна карата, калдык дисперциясы деп аташат. Ал Ути сызыктуу $g(X)=\alpha+\beta X$ функциясы менен алмаштырганда кетирилген катанын чоңдугун мүнөздөйт. $r_{xy}=\pm 1$ болгон учурда калдык дисперция нөлгө барабар болот; б.а. корреляция коеффициентинин четки маанилерге ээ болгон учурунда, Ути, Хтен сызыктуу функцияга алмаштырсак, ката кетпейт.

Ошентип, $r_{xy}=\pm 1$ болгон учурда У жана Х сызыктуу функциялык көз карандылыкта байланышкан болот.

Ушул сыяктуу эле, Хтин Уке орто квадраттык регрессиясынын түз сызыгын

$$x-m_x=r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y)\ , \qquad (51)$$

жана Хтин Уке карата калдык дисперциясын $\sigma_x^2(1-r_{xy}^2)$ алууга болот.

Мында, $r_{xy}\dfrac{\alpha_x}{\alpha_y}-Хти \quad Уке$ регрессиясынын коэффициенти.

Эгерде $r_{xy}=\pm 1$ болсо, регрессиясынын эки түз сызыгы бири бирине барабар болуп калат. (50) жана (51) формулаларынан регрессиянын эки түз сызыгы тең, Х жана У чоңдуктарынын чогуу бөлүштүрүлүшүнүн борбору деп аталган, (m_x,m_y) чекити аркылуу өтөрү көрүнүп турат.

§17 Сызыктуу корреляция. Нормалдык корреляция.

Эки өлчөмдүү (Х,У) кокус чоңдугун карайбыз. Эгерде, Утин Хке жана Хтин Уке регрессия функциялары (7-аныктама) сызыктуу болсо, анда Х менен У сызыктуу корреляциялык көз карандылыкта байланышкан деп айтышат. Сызыктуу регрессия функцияларынын графиктери түз сызык болору түшүнүктүү. Бул түз сызыктар орто квадраттык регрессиянын түз сызыктары (§16) менен дал келишерин дилилдөөгө болот. Төмөндөгүдөй маанилүү теореманы дилилдейбиз.

<u>7-теорема</u>. Эгерде эки өлчөмдүү (X,У) кокус чоңдугу нормалдуу бөлүштүрүлгөн болсо, анда X жана У сызыктуу корреляциялык көз карандылыкта байланышкан болот.

<u>Далилдөө.</u> Нормалдуу бөлүштүрүлгөн (X,У) чоңдугунун чогуу бөлүштүрүлүш тыгыздыгы

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-(u^2+v^2-2ruv)/2(1-r^2)}$$

болору белгилүү (§15, (48)-формула). Мында

$$u=(x-a_1)/\sigma_x\,,\quad v=(y-a_2)/\sigma_y \qquad (52)$$

X түзүүчүнүн бөлүштүрүү тыгыздыгы 6-эскертүүнүн негизинде

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$$

болору түшүнүктүү.

M(У/x) регрессия функциясын табабыз. Аны үчүн, алдын ала, X=x болгондугу Утин шарттуу бөлүштүрүү законун $\psi(y/x)=f(x,y)/f_1(x)$ формуласы ((41)-формуланы кара) боюнча табабыз.

Бул формуланын оң жагына (48) жана (52)ни коюп туруп , жөнөкөйлөтсөк, $\psi(y/x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-r^2}}e^{-(v-ru)^2/2(1-r^2)}$

келип чыгат.

u жана ϑ ны (52) барабардыктары боюнча алмаштырып,

$$\psi(y/x)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}}e^{-\{y-[a_2-r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_1)]\}^2/2[\sigma_y^2(1-r^2)]}$$

формуласын алабыз.

Алынган шарттуу бөлүштүрүү, математикалык күтүүсү (Утин Xке регрессия функциясы)

$$M(У/x)=a_2+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_1)$$

жана дисперциясы $\sigma_y^2(1-r^2)$болгон, нормалдуу бөлүштүрүү болот.

Ушул сыяктуу эле Xтин Уке регрессия функциясы

$$M(X/y)=a_1+r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-a_2)$$

болорун табабыз.

Регрессиянын эки функциясы тең сызыктуу болгондуктан, X жана У чоңдуктарынын корреляциясы сызыктуу болот. Теорема далилденди.

Эки өлчөмдүү нормалдуу бөлүштүрүүнүн параметрлеринин ыктымалдык маанилерин эске алып (§15), регрессия түз сызыктарынын теңдемелери

$$y - a_2 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a_1), \quad x - a_1 = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - a_2)$$

орто квадраттык регрессиянын түз сызыктарынын теңдемелери менен дал келишет деген жыйынтыкка келебиз.

МАСЕЛЕЛЕР

1. Бөлүштүрүү закону

У	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,12	0,18	0,10
y_2	0,10	0,11	0,39

болгон эки өлчөмдүү үзгүлтүктүү (X,У) чоңдугунун түзүүчүлөрүнүн бөлүштүрүү закондорун тапкыла.

Жообу: $\begin{matrix} X & x_1 & x_2 & x_3 \\ P & 0{,}22 & 0{,}29 & 0{,}49 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} Y & y_1 & y_2 \\ P & 0{,}40 & 0{,}60 \end{matrix}$

2. Эгерде эки өлчөмдүү үзгүлтүксүз (X,У) чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы $F(x,y) = (\frac{1}{\pi}arctg2x + \frac{1}{2})(\frac{1}{\pi}arctg3y + \frac{1}{2})$ болсо, анда анын түзүүчүлөрү x<1/2 жана У<1/3 барабарсыздыктарын канагаттандырыш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P(X<1/2; У<1/3)=9/16

3. Эгерде $F(x,y) = \sin x \sin y (0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2})$ болсо, кокустан түшүүчү (X,У) чекитинин, $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{3}$ түз сызыктары менен чектелген, тик бурчтука тийиштүү болу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: P(π/4<X$\le\pi$/2; π/6<У$\le\pi$/3)=0,11

4. Эки өлчөмдүү кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы $F(x,y) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y}) \quad (x \ge 0, y \ge 0)$ болсо, анын бөлүштүрүү тыгыздыгын тапкыла.

Жообу: $f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 6e^{-(2ч+3y)}$

5. Эки кокус чоңдуктун системасынын бөлүштүрүү тыгыздыгы $x=0, x=\pi/2, y=0, y=\pi/2$ тик бурчтугунун ичинде $f(x,y)=C\sin(x+y)$; бул тик бурчтуктун сыртында $f(x,y)=0$. С-ны жана кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясын тапкыла.

Жообу: $C=0$, $F(x,y)=0{,}5[\sin x+\sin y-\sin(x+y)], \quad (0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \frac{\pi}{2})$

6. Эки кокус чоңдуктун системасы бир калыпта бөлүштүрүлгөн:

$$f(x,y)=\begin{cases} C \quad эгер \quad 4\le x\le 6, \quad 10\le y\le 15 \quad болсо, \\ 0 \quad эгер \quad x<4 же \ x>6, \quad y<10 \ же \ y>15 \quad болсо. \end{cases}$$

С-ны жана бөлүштүрүү функциясын тапкыла.

Жообу: С $\approx$0,1; $F(x,y)=\frac{(x-4)(y-10)}{4} \quad (4\le x\le 6, 10\le y\le 15)$

7. Эки кокус чоңдуктардын системасынын чогуу бөлүштүрүлүш тыгыздыгы

$$f(x,y)=\frac{C}{(4+x^2)(9+y^2)}$$

а) С-ны; б)бөлүштүрүү функциясын тапкыла.

Жообу:а) $C=6/\pi^2$ $\quad б) F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{5}+\frac{1}{2}\right)$

8. Эки өлчөмдүү кокус чоңдуктун чогуу бөлүштүрүлүш тыгыздыгы

$$f(x,y)=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}e^{-4x^2-6xy-y^2}$$

Түзүүчүлөрүнүн шарттуу бөлүштүрүлүш закондорун тапкыла.

Жообу: $\varphi(x/y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(2x+3y/2)^2}$; $\quad \phi(x/y)=\frac{3}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+3y)^2}$

О н у н ч у г л а в а

СТАТИСТИКАЛЫК МААЛЫМАТТАРДЫ ТАНДОО ЫКМАЛАРЫ

§ 1.Математикалык статистиканын маселелери.

Математикалык статистика, ыктымалдыктар теориясынын маселелерин статистикалык байкоолордун же эксперменттердин жыйынтыктарынын негизинде изилдөөчү илим. Тактап айтканда,бир тектүү көптөгөн кокус кубулуштар баш ийген закон ченемдүүлүктөрдү ,ыктымалдыктар теориясы - теориялык жол менен изилдесе, математикалык статистика, ал закон ченемдүүлүктөрдү, жүргүзүлгөн байкоолордун же эксперименттердин жыйынтыктарынын негизинде изилдейт. Статистиканын биринчи маселеси — атайын жүргүзүлгөн байкоолордун же эксперименттердин жыйынтыктарын тандап алуу жана топко бөлүштүрүү ыкмаларын табуу болуп эсептелет. Математикалык статистиканын экинчи маселеси — изилдөө талап кылынган маселенин шартына жараша статистикалык маалыматтарды анализдөө ыкмаларын иштеп чыгуу. Бул маселеге:

а) кокус окуянын белгисиз ыктымалдыгын, кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясын, түрү белгисиз бөлүштүрүүнүн параметрлерин, кокус аргументтүү функциянын бир же бир нече кокус чондуктан көз карандуулугун ж.б. чамалоо;

б) белгисиз бөлүштүрүүнүн түрү же параметрлеринин чоңдугу жөнүндөгү статистикалык божомолдорду (гипотезаларды) текшерүү кирет.

Учурдагы математикалык статистика, белгисиздиктин шартында чечим кабыл алуу жөнүндөгү илим катары да каралат.

Ошентип, математикалык статистика илимий жана практикалык жыйынтыктарды алыш үчүн, статистикалык маалыматтарды топтоо жана тиешелүү түрдө талдоо ыкмаларын изилдөөчү илим болуп эсептелет.

§ 2. Генералдык жана тандалма жыйындылар

Бир тектүү нерселердин жыйындысын, ал нерселерди мүнөздөөчү кандайдыр сандык же сапаттык белгиге карата изилдөө талап кылынат дейли. Мисалы, эгерде белгилүү бир тетиктер изилденип жатса, анын сапат белгиси - тетиктин стандарттуулугу, сан белгиси - өлчөө талап кылынган чендери болушу мүмкүн.

Жыйындынын сапат же сан белгисин аныкташ үчүн, демейде андан кичирээк көлөмдөгү жыйындыны бөлүп алып,ошону сандык же сапаттык белгиге карата изилдеп, ал аркылуу жалпы жыйындынын сапат же сан белгиси жөнүндө жыйынтык чыгарылат. Анткени, жыйынды өтө чоң болсо, анын баарын изилдеп чыгыш мүмкүн эмес. Ошондой эле, нерсени изилдөө аны жок кылууга алып келсе же чоң чыгымды талап кылса, жыйындыдагы бардык нерселерди изилдеп чыгуу, практика жүзүндө маанисин жоготот. Эгерде, изилденүүчү жыйындынын көлөмү азыраак эле болуп, изилдөөгө чоң чыгым талап кылынбаса, жыйындагы бардык нерселер катары менен изилдениши да мүмкүн.

Сандык же сапаттык белгиге изилдеш үчүн тандалып алынган нерселердин жыйындысы, тандалма жыйынды, же жөн эле тандалма деп аталат.

Тандалма алына турган жалпы жыйынды, генералдык жыйынды деп аталат. Генералдык же тандалма жыйындынын көлөмү деп,жыйындыдагы нерселердин саны аталат.

Мисалы, белгиге изилдөөгө 1000 тетиктен 100 тетик тандалып алынса, генералдык жыйындынын көлөмү $N=1000$, ал эми тандалма жыйындынын көлөмү $n=100$.

§ 3.Тандалманын түрлөрү. Тандоонун ыкмалары.

Тандалманы тандоо эки түрдө жүргүзүлүшү мүмкүн: тандалып алынган нерсе, текшерилгенден кийин, кийики нерсе тандалып алынаардан мурун, генералдык жыйындыга кайра кошулушу же кошулбашы мүмкүн. Ушуга байланыштуу, тандалма кайталануучу же кайталанбоочу тандалма деп, эки түргө бөлүнөт. Практикада, негизинен кайталанбоочу тандоо колдонулат. Эгерде, генералдык жыйындынын көлөмү өтө чоң болсо, ал эми тандалманын көлөмү анын аз эле бөлүгүн түзсө, кайталануучу жана кайталанбоочу тандалмалардын айырмасы азая баштайт. Генералдык жыйындынын көлөмү чексизге умтулган пределдик учурда (тандалманын көлөмү чектүү болсо), айтылган айырма нөл болуп,кайталануучу жана кайталанбоочу танданмалардын айырмасы болбой калат.

Тандалманын текшерилген белгиси генералдык жыйындынын белгиси менен туура келиш үчүн, тандалма генералдык жыйындынын бардык бөлүктөрүн лропорциялуу туура көрсөтүшү керек. Бул талап кыскача,тандалма репрезентативдүү (орчундуу) болушу керек деп айтылат.

Генералдык жыйындынын көлөмүнө жараша, тандоо эки түрдө: 1) генерелдык жыйынды бөлүктөргө бөлүнбөй; 2) генералдык жыйынды бөлүктөргө бөлүнүп; жүргүзүлүшү мүмкүн.

Биринчи түргө: жөнөкөй кайталануучу жана кайталанбоочу кокус тандоолор; ал эми экинчи түргө: типтүү,механикалык жана сериялык тандоолор кирет.

Тандоо генералдык жыйындынын бардык көлөмүнөн бирден алып жүргүзүлсө, ал тандоо жөнөкөй кокус тандоо деп аталат. Аны түрдүү жол менен жүргүзсө болот. Мисалы,көлөмү N болгон генералдык жыйындыдан көлөмү n болгон тандалма алыш керек болсо, карточкаларга 1-ден N-ге чейинки сандарды жазып туруп, аябай аралаштырып, болжобой туруп, бир карточка алышат. Генералдык жыйындыдан, номери алынган карточканын номери менен дал келген, нерсени алып текшеришет. Аны кайра генералдык жыйындыга кошуп туруп, карточкаларды кайрадан аралаштырып экинчи карточканы алып, жыйындынын ошол номердеги нерсесин текшеришет. Ушул сыяктуу ишти п жолу кайталап, жөнөкөй кайталануучу тандалманы алышат. Эгерде ар бир жолу текшерилген нерсе генералдык жыйынга кайрадан кошулбаса, кайталанбоочу тандалма алынат.

Типтүү тандоодо, нерселер бардык генералдык жыйындыдан эмес, анын ар бир “типтүү” бөлүгүнөн жүргүзүлөт. Мисалы,эгер тетиктер бир нече станоктордо жасалса, анда тандоону, бардык даяр болгон тетиктерди кошпостон эле, ар бир станокто даярдалган тетиктердин жыйындыларынан өз алдынча жүргүзүшөт. Эгерде, станоктортор ар түрдүү сапатта болушса (мисалы, эскиликтери ар түрдүү болсо) типтүү тандоо максатка ылайык болот.

Механикалык тандоодо, генералдык жыйынды, андан алынуучу тандалманын көлөмү канча болсо,ошончо бөлүкө бөлүнөт да, ар бир бөлүктөн бирден нерсе тандалып алынат.Мисалы, көлөмү N болгон генералдык жыйындын 5 проценти тандалып алыныш керек болсо, генералдык жыйынды $\frac{N}{20}$ бөлүкө бөлүнүп, ар бөлүктөн бирден нерсе тандалып алынат.

Сериялык тандоодо, генералдык жыйындыдан нерселер бирден тандалып алынбастан, ”сериясы“ менен алынып, анын ар бир нерсеси текшерилет. Мисалы, буйумдар көптөгөн станоктор менен жасалса, бир нече гана станоктон жасалган буйумдар текшерилет. Сериялык тандоону колдонуш үчүн, текшерилүүчү белги ар бир серияда аз эле өзгөрүүсү талап кылынат.

Практика жүзүндө тандоолордун түрлөрүнүн комбинациясы да колдонулушу мүмкүн. Мисалы,генералдык жыйындыны бирдей көлөмдөгү серияларга бөлүп, андан кийин жөнөкөй кокус тандоо менен бир нече серияны тандап алып, ал сериялардан жөнөкөй кокус тандоо менен кээ бир нерселерди тандап алышат.

§ 4.Тандалманын статистикалык бөлүштүрүүсү.

Генералдык жыйындыдан тандалма алынып, текшерилип жатканда, белгинин x_1 мааниси n_1 жолу, x_2 мааниси n_2 жолу,..., $x_к$ мааниси $n_к$ жолу , байкалды дейли. Мында,

$\sum_{i=1}^{к} n_i = n$ - тандалманын көлөмү. Байкалган x_i маанилери

варианттар деп, ал эми өсүү тартибинде жайгашкан варианттардын удаалаштыгы - вариациалык катар деп аталат. x_i варианттарынын байкалган n_i маанилери жыштыктар, ал эми алардын тандалманын көлөмүнө болгон катышы

$n_i/n = W_i$ - салыштырмалуу жыштыктар деп аталат.

Варианттардын жана алардын жыштыктарынын же салыштырма жыштыктарынын тизмеги - тандалманын статистикалык бөлүштүрүүсү деп аталат. Статистикалык бөлүштүрүүнү, варианттардын бир нече маанилерин камтыган, бирдей узундуктагы интервалдар жана аларга тиешелүү болгон жыштыктар түрүндө берүүгө да болот. Мында, интервалдын жыштыгы болуп, ага тийиштүү болгон маанилердин жыштыктарынын суммасы эсептелет. Эгер маани интервалдын четинде жатса, интервалга ал маанинин жыштыгынын жарымы эле тиешелүү болот.

Ыктымалдыктар теориясында бөлүштрүү, кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери менен алардын ыктымалдыктарынын тизмеги түрүндө, берилерин эскерте кетели.

Мисал. Көлөмү п=30 болгон тандалманын жыштыгынын статистикалык бөлүштүрүүсү берилген:

x_i	3	5	7	12
n_i	6	7	8	9 .

Салыштырма жыштыктын статистикалык бөлүштүрүүсүн тапкыла.

Чыгаруу. $W_i = \frac{n_i}{n}$ формуласы боюнча салыштырма жыштыктарды табабыз: $W_1 = 6/30=1/5$, $W_2 = 7/30$, $W_3 =8/30=4/15$, $W_4 =9/30=3/10$. Демек, салыштырма жыштыктын статистикалык бөлүштүрүүсү:

x_i	3	5	7	12
W_i	1/5	7/30	4/15	3/10.

Текшерүү: $1/5+7/30+4/15+3/10=(6+7+8+9)/30 = 1$.

§ 5 Бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы

Х сандык белгисинин статистикалык бөлүштүрүү жыштыгы белгилүү болсун. Сандык белгинин мааниси х тен кичине болгон байкоолордун санын n_x аркылуу, жалпы байкоолордун санын (тандалманын көлөмүн) п аркылуу белгилейбиз. $X<x$ окуясынын салыштырма жыштыгы n_x/n болору түшүнүктүү. Эгерде х өзгөрсө салыштырма жыштык да өзгөрүп, ал х-тен функция болот.

Ар бир х үчүн , $X<x$ окуясынын салыштырма жыштыгын аныкоочу функция $F^*(x)$, тандалманын эмпирикалык бөлүштүрүү функциясы деп аталат: $F^*(x)=n_x/n$.

Мисалы,$F^*(x_2)$-ни табыш үчүн, x_2-ден кичине варианттардын санын, тандалманын көлөмүнө бөлүш керек: $F^*(x_2)= n_{x_2}/n$.

Тандалманын эмпирикалык бөлүштүрүү функциясынан айырмаланып, генералдык жыйындынын $F(x)$ бөлүштүрүү функциясы $X<x$ окуясынын ыктымалдыгын түшүндүрөт,ал эми

эмпирикалык $F^*(x)$ функциясы ошол окуянын салыштыма жыштыгын аныктайт.

Бернуллинин теоремасы боюнча, $X<x$ кокус окуясынын салыштырма жыштыгы $F^*(x)$, ыктымалдыгы боюнча, кокус окуянын $F(x)$ ыктымалдыгына умтулат. Башкача айтканда, $F^*(x)$ жана $F(x)$ функциялары бири биринен $\lim\limits_{n\to\infty} P[\left| F(x) - F^*(x) \right| < \varepsilon] = 1 \quad (\varepsilon > 0)$ маанисинде аз эле айырмаланат. Демек, ыктымалдыктар теориясындагы интегралдык $F(x)$ бөлүштүрүү функциясын, жакындаштырылган түрдө, бөлүштүрүүнүн $F^*(x)$ эмпирикалык функциясы менен алмаштырууга болот. Бул жыйынтык, $F^*(x)$ жана $F(x)$-тин бардык касиеттери окшотугунан да келип чыгат. Чындыгында эле, $F^*(x)$-тин аныктамасынан төмөнкү касиеттер аткарылаары түшүнүктүү:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;
2) $F^*(x)$-кемибөөчү функция;
3) эгер x_1 -эң кичине варианта болсо, анда $x<x_1$ болгондо $F^*(x) = 0$; эгер $x_к$ –эң чоң варианта болсо,$x>x_к$ болгондо $F^*(x) = 1$.

Ошентип, тандалманын эмпирикалык бөлүштүрүү фукциясы аркылуу, генералдык жыйындынын теориялык бөлүштүрүү функцясын чамалоого болот.

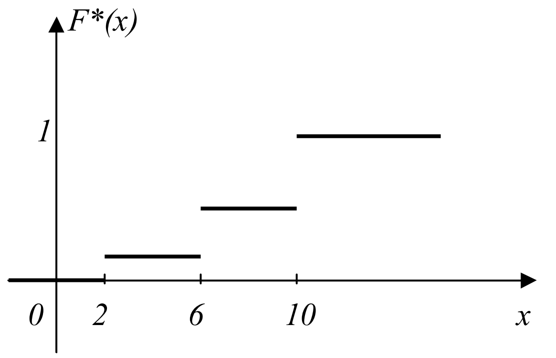
Мисал. Тандалманын статистикалык бөлүштүрүү функциясы

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

боюнча, анын эмпирикалык функциясын тапкыла.

Чыгаруу Тандалманын көлөмү $n= 12+18+30=60$. Эң кичине варианта 2 болгондуктан, $x \le 2$,болгондо $F^*(x) = 0$. Эгер $X<6$ болсо, $n_x=12$ ($x_1=2$ 12 жолу байкалат) болгондуктан, $2<x\le 6$ болсо $F^*(x) = 12/60 = 0,2$. Эгер $X<10$ болсо, $n_x=12 +18 = 30$. Демек, $F^*(x) = 30/60=0,5$, $6<x\le 10$. $x=10$ эң чоң варианта болгондуктан $x>10$ болгондо $F^*(x) = 1$. Изделип жаткан эмпирикалык функция

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2 \quad болсо \\ 0,2 & 2 < x \le 6 \quad болсо \\ 0,5 & 6 < x \le 10 \quad болсо \\ 1 & x > 10 \quad болсо \end{cases}$$



19-чийме

Бул функциянын графиги 19-чиймеде көрсөтүлгөн.

§6.Полигон жана гистограмма

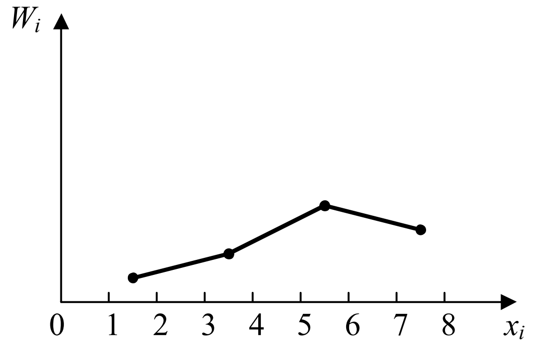
Статистикалык бөлүштүрүүнү геометриялык түрдө көрсөтүш үчүн, полигон жана гисторамма түшүнүктөрү колдонулат.

<u>Жыштыктын полигону</u> деп, $(x_1,n_1),(x_2n_2),\ldots(x_k,n_k)$ чекиттерин туташтырган сынык сызык аталат. Полигонду түзүш үчүн, 0X огунан x_i варианттарын,ал эми 0У огунан аларга тийиштүү n_i жыштыктарын ченеп алышат. (x_i,n_i) чекиттерин туташтырса полигон келип чыгат.

<u>Салыштырма жыштыктын полигону</u> деп, $(x_i\ ,W_i)$, $i=1,2,3,,,,к$ чекиттерин туташтырган сынык сызык аталат. Салыштырма жыштыктын полигонун түзүш үчүн $(x_i\ ,W_i)$, $i=1,2,3,,,,к$ туташтырыш керек. 20-чиймеде

X	1,5	3,5	5,5	7,
W	0,1	0,2	0,4	0,3

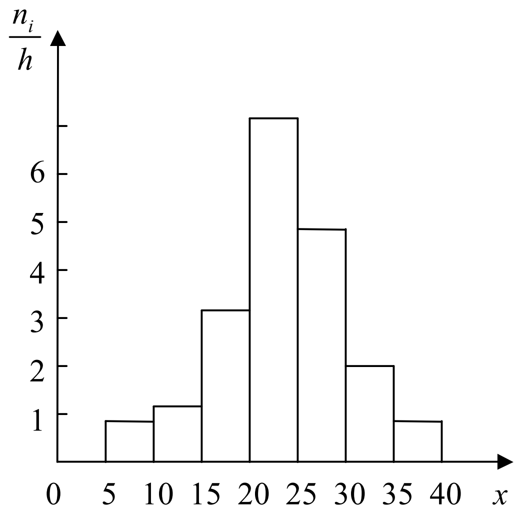
бөлүштүрүсү үчүн сапыштырма жыштыктын полигону көрсөтүлгөн.



20-чийме

Эгерде текшерилүүчү белги үзгүлтүксүз болсо, аны сүрөттө үчүн гистограмма түшүнүгү колдонулат. Гистограмманы алыш үчүн, варианттардын бардык маанилери жайгашып, четтери варианттардын эң кичине жана эң чоң маанилери болгон интервал, бир нече бирдей h узундуктагы жекече интервалдарга бөлүнөт.

Жыштыктардын гистограммасы деп, негиздери бирдей h узундуктагы интервалдардан, бийиктиктери $п_i/h$ (жыштыктардын тыгыздыктары) болгон тик бурчтуктардан турган, тепкич түрүндөгү фигура аталат. Мында, $п_i$ -негизиндеги i-чи интервалга тийиштүү болгон варианталардын жыштыктарынын суммасы. Гистограмманы түзүш үчүн, 0X огунан жекече интервалдарды, 0У огунан тик бурчтуктардын $п_i/h$ бийиктиктерин ченеп алып, тепкич түрүндөгү фигураны түзөбүз. i-чи тик бурчтуктун аянты $h\cdot п_i/h= п_i$-жекече i-чи интервалдагы варианталардын жыштыктарынын суммасы болгондуктан, жыштыктардын гистограммасынын аянты бардык жыштыктардын сумасына, б.а. тандалманын көлөмүнө барабар.



21-чийме

21-чиймеде көлөмү п=100 болгон , 6-чы таблицада берилген статистикалык бөлүштүрүүнүн жыштыктарынын гистограммасы көрсөтүлгөн.

Салыштырма жыштыктын гистограммасы деп, негиздери h узундуктагы жекече интервалдар, бийиктиктери W_i/h (салыштырма жыштыктардын тыгыздыктары) болгон тик бурчтуктардан турган тепкич түрүндөгү фигура аталат.

Салыштырма жыштыктын гистограммасы, жыштыктардын гистограммасы сыяктуу эле чийилет. Салыштырма жыштыктын гистограммасынын аянты, бардык салыштырма жыштыктардын суммасына, б.а. бирге барабар.

6-таблица

Узундугу h=5 болгон жекече интервал	Жекече интервалдагы вариантардын жыштыктарынын суммасы $п_i$	Жыштыктардын тыгыздыгы $п_i/h$
5 - 10	4	0,8
10 - 15	6	1,2
15 - 20	16	3,2
20 - 25	36	7,2
25 - 30	24	4,8
30 - 35	10	2,0
35 - 40	4	0,8

МАСЕЛЕЛЕР.

1. Статистикалык бөлүштүрүү берилген:

x_i	4	6	8	12
n_i	2	3	9	6

Эмпирикалык функциянын графигин түзгүлө.

2. :

x_i	2	4	6	8	9
n_i	8	12	20	25	31

бөлүштүрүсүнүн жыштыктарынын жана салыштырма жыштыктарынын полигондорун түзгүлө.

3. Статистикалык бөлүштүрүү берилген:

жекече интервалдар	жыштыктар
2 — 5	9
5 - 9	14
9 - 12	20
12 - 16	13

Биринчи мамычада жекече интервалдар, экинчи мамычада - жекече интервалдарга тиешелүү варианттардын жыштыктарынын суммасы берилген. Жыштыктардын жана салыштырма жыштыктардын гистограммаларын түзгүлө.

Онбиринчи глава

БӨЛҮШТҮРҮЛӨРДҮН ПАРАМЕТИРЛЕРИН СТАТИСТИКАЛЫК ЧАМАЛОО

§1 Жылышпаган, эффективтүү (натыйжалуу) жана негиздүү (жеткиликтүү) чамлоолор.

Генералдык жыйындыны сандык белгиге карата үйрөнүү талап кылынат дейли.Эгерде сандык белгинин бөлүштүрүү закону белгилүү болсо, анын параметрлерин чамалоо маселеси туулат. Мисалы, үйрөнүлүп жаткан белги нормалдуу бөлүштүрүлгөндүгү теориялык ой жүгүртүүнүн негизинде белгилүү болсо, анда анын математикалык күтүүсүн жана орто квадраттык кыйшайуусун (четтөсүн) чамалоо, б.а. жакындаштырып табуу талап кылынат. Себеби, нормалдык бөлүштүрүү ушул эки параметр аркылуу толук аныкталары белгилүү. Эгерде, белги Пуассондун бөлүштүрүсү боюнча бөлүштүрүлгөн деп эсептөөгө негиз бар болсо, анда ал толук аныкталуучу жалгыз λ параметрин чамалоо керек болот.

Изилдөөчүгө, тандалманын маалыматтары белгилүү деп эсептесек болот. Мисалы, сандык белгинин маанилери $x_1,x_2,\dots,x_n$ -ди , п байкоо жүргүзүүнүн негизинде табууга болот. Ошондуктан, теориялык бөлүштүрүүнүн белгисиз параметрлерин, ошол статистикалык маалыматтар аркылуу чамалоого туура келет. Сандык белгинин $x_1,x_2,\dots,x_n$ маанилерин, көз карандысыз X_1 , X_2 , ….,X_n кокус чоңдуктар катарында карап, теориялык бөлүштүрүүнүн белгисиз параметрлерин чамлоону, байкалган кокус чоңдуктардан функция табууга келтирсек болот. Мисалы, нормальдуу бөлүштүрүүнүн математикалык күтүүсүн, белгинин байкалган маанилеринин орто арифметикалык чоңдугу $\overline{X} = (X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n)/n$ болгон функция аркылуу чамаласак болорун кийинирээк көрсөтөбүз.

Ошентип, теориялык бөлүштүрүнүн белгисиз параметирлеринин статистикалык чамалоосу деп, кокус чоңдуктун байкалган маанилеринен алынган функция аталат.

Статистикалык чамалоо, чамаланып жаткан параметрлердин жакын маанилерин бериш үчүн, ал чамалоо: :

1) жылышпаган ;
2) эффективтүү;
3) негиздүү ; болушу керек.

Бул чамалоолорго токтолобуз.

θ теориялык бөлүштүрүсүнүн статистикалык чамалоосу $\theta*$ болсун. Көлөмү п болгон тандалма аркылуу θ_1* чамалоосу табылды дейли. Тажрыйбаны кайталап, б.а. генералдык жыйындыдан,ошол эле көлөмдөгү башка тандалманы алып, анын маанилери боюнча θ_2* чамалоосун табабыз. Тажрыйбаны көп жолу кайталап, жалпы айтканда бири бирине барабар эмес, θ_1*, θ_2*,….., θ_k* сандарын алабыз. Ошентип, $\theta*$ чамалоосун кокус чоңдук катары, θ_1*, θ_2*,….., θ_k* сандарын, анын мүмкүн болгон маанилери катары карасак болот.

Эгерде, $\theta*$ чамалоосу θ-нын ашыгы менен алынган чамалоосу десек, анда θ_i*, i=$\overline{1,k}$, сандары θ-нын чыныгы маанисинен чоң болот. Демек, $\theta*$ кокус чоңдугунун математикалык күтүүсү (орто мааниси) θ-дан чоң, б.а. М($\theta*$)>θ. Ушул сыяктуу эле, эгерде $\theta*$ кеми менен алынган чамалоо болсо, М($\theta*$)<θ болот.

Ошентип, математикалык күтүүсү, чамаланып жаткан чоңдука барабар болбогон статистикалык чамалоо, бир белгидеги системалык каталарга алып келет.Ушул себептүү, математикалык күтүүсү чамаланып жаткан чоңдука барабар болгон чамалоону колдонуу оңтойлуу.

Математикалык күтүүсү чамаланып жаткан чоңдука барабар болгон (М($\theta*$)=θ) чамалоо -статистикалык жылышпаган чамалоо деп, аталат.

Жылышпаган чамалоо ката кетирүүнү биротоло жойбосо дагы ($\theta*$-нын кээ бири θ-дан чоң, кээ бири кичине болуп калышы мүмкүн) , бир белгидеги системалык катага алып келбейт.

Математикалык күтүүсү чамаланып жаткан чоңдука барабар эмес чамалоо жылышкан чамалоо деп аталат.

Жылышпаган чамалоо дайыма эле жакшы жыйынтыка алып келе бербейт.Чындыгында эле, $\theta*$-нын мүмкүн болгон маанилери анын орто $\bar{\theta}*$ маанисинен чачылышы чоң, б.а. дисперсия D($\theta*$) чоң болсо, анын кээ бир мааниси, мисалы θ_1*, чамалоонун орто $\bar{\theta}*$ маанисинен, ошол себептүү, чамалануучу θ параметринен да, өтө алыс болуп калышы мүмкүн. Анда, θ_1*-ди θ-нын чамалоосу (жакындаштырылган мааниси) катары кабыл алсак, чоң ката кетирген болобуз. Эгерде $\theta*$-нын дисперсиясы кичине болсо, чоң ката кетирүүгө жол берилбейт.

Дисперсиясы мүмкүн болгон эң кичине мааниге ээ болгон статистикалык чамалоо эффективтүү (натыйжалуу) чамалоо деп аталат.

Тандалманын көлөмү п чоң болгон учурда, статистикалык чамалоого негиздүүлүк түшүнүгү киргизилет.

Тандалманын көлөмү чексизге умтулган учурда ($п \to \infty$) ыктымалдыгы боюнча чамаланып жаткан параметрге умтулган статистикалык чамалоо негиздүү чамалоо деп аталат. Мисалы, эгерде жылышпаган чамалоонун дисперсиясы $п \to \infty$ учурда нөлгө умтулса, ал чамалоо негиздүү чамалоо да болот.

§2. Генералдык жана тандалма ортолор

X сандык белгиге карата изилдөө үчүн, көлөмү N болгон генералдык жыйындыдан көлөмү п болгон тандалма алынды дейли.

Генералдык жыйындынын сандык белгилеринин арифметикалык орто чоңдугу - генералдык орто деп аталат. Ал $\bar{x}_г$ аркылуу белгиленет.

Тандалма жыйындынын сандык белгилеринин арифметикалык орто чоңдугу - тандалма орто деп аталып, $\bar{x}_т$ аркылуу белгиленет.

Эгерде, генералдык жыйындынын сандык белгилеринин бардык маанилери x_1, x_2 ,…., x_N ар түрдүү болсо, анда тандалма жыйындынын сандык белгилери да ар түрдүү x_1, x_2 ,…., x_n болуп, $\bar{x}_г = (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)/N$, $\bar{x}_т = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$ келип чыгат.

Эгерде,генералдык жыйынлынын бардык сандык белгилеринин x_1, x_2 ,…., $x_к$ маанилери, тиешелүү түрдө , $N_1, N_2, \ldots, N_k$ жыштыкта болушса,

мында $N_1+N_2+\ldots+N_k = N$,анда $\bar{x}_г = (N_1x_1 + N_2 x_2 + \ldots + N_k x_N)/N$ болот.

Ушул сыяктуу эле, тандалма жыйындынын сандык белгилеринин x_1, x_2 ,…., x_s маанилери, тиешелүү түрдө, $п_1, n_2, \ldots, n_s$,

$п_1 + n_2 + \ldots + n_s = n$, жыштыкта болушса,

$\bar{x}_т = (п_1x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_s x_s)/n$ болот. Бул формулалар кыскача

$$\bar{x}_г = \sum_{i=1}^{k} N_i x_i \ , \qquad \bar{x}_m = \sum_{i=1}^{s} n_i x_i$$ түрүндө жазылат.

1- эскертүү. Көлөмү N болгон генералдык жыйынды X сан белгисине карата бардык белги ар түрдүү болгон нерселерден турсун. Андан болжоосуз бир нерсе алынса, ал нерсе X белгисине карата белгилүү бир мааниде, мисалы, x_1 маанисинде болушунун ыктымалдыгы 1/N болору түшүнүктүү. Алынган нерсе, каалагандай башка бир мааниге ээ болуш ыктымалдыгы деле 1/N болот. Ошондуктан, X белгисин, мүмкүн болгон маанилери ар түрдүү жана бирдей ыктымалдыкта болгон кокус чоңдук катары кароого болот. Анын математикалык күтүүсү: $M(X)=1x_1/N+1x_2/N\ldots.1x_N/N=$
$=x_1/N+x_2/N\ldots.x_N/N=\bar{x}_г$ же $M(X)=\bar{x}_г$, б. а. сан белги болгон X кокус чоңдугунун математикалык күтүүсү, ал белгинин генералдык орто чоңдугуна барабар. Эгерде, генералдык жыйынды X сан белгисине карата жыштыктары ар түрдүү $N_1, N_2, \ldots, N_k$ болгон нерселерден турса деле $M(X)=\bar{x}_г$ болот.

2- эскертүү. Генералдык жыйындыдан алынган тандалма жыйындынын тандалма орто чоңдугу кандайдыр бир сан болот. Эгерде ,ошол эле генералдык жыйындыдан көп жолу бирдей эле көлөмдөгү тандалмаларды алсак алардын тандалма ортолору өзгөрүлүп, ал тандалма ортолорду кокус чоңдук катары кароого болот.Демек, тандалма ортонун бөлүштүрүүсү жана сандык мүнөздөмөлөрү, мисалы, математикалык күтүүсү жана дисперсиясы жөнүндө сөз кылсак болот.

Теориялык ой жүгүртүүдө, көз каорандысыз байкоолордун негизинде алынган X белгисинин x_1 , x_2 ,…., x_n маанилерин, бөлүштүрүүсү жана сандык мүнөздөмөлөрү X чоңдугунукундай эле болгон, X_1 , X_2 ,…., X_n кокус чоңдуктары катары кароого болот

§3 Генералдык ортону тандалма орто аркылуу чамалоо. Тандалма ортонун туруктуулугу.

Генералдык жыйындыдан, X сандык белгисине карата жүргүзүлгөн көз карандысыз байкоолордун негизинде, көлөмү n болгон кайталануучу тандалма алынды дейли.

Генералдык жыйындынын көлөмү чоң болгондо, генералдык орто $\bar{x}_г$-ны, аныктамасы боюнча аныктоо, практика жүзүндө мүмкүн болбогондуктан, аны тандалма орто $\bar{x}_m = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$ (тандалманын маанилери ар түрдүү болгондо) же $\bar{x}_m = (n_1 x_1 + +n_2 x_2 + \ldots + n_s x_s)/n$ (тандалмалар ар түрдүү жыштыкта болушса) боюнча чамалашат. Тандалма орто $\bar{x}_m$ генералдык орто $\bar{x}_г$-нын жылышпаган чамалоосу болорун, б. а. $\bar{x}_m$-нын математикалык күтүүсү генералдык ортого барабар болорун далилдейбиз. 2-эскертүүнүн негизинде $\bar{x}_m$-ны кокус чоңдук $\bar{X}_m$ катары жана x_1, x_2 ,...., x_n маанилерин бирдей бөлүштүрүлгөн кокус чоңдуктар X_1, X_2 ,...., X_n катары карайбыз. Бул чоңдуктар бирдей бөлүштүрүлгөндүктөн, алардын сандык мүнөздөмөлөрү, алардын ичинде математикалык күтүүсү дагы, барабар болушат.Аны а аркылуу белгилейбиз.

Бирдей бөлүштүрүлгөн кокус чоңдуктардын арифметикалык орто чоңдугунун математикалык күтүүсү, ал чоңдуктардын ар биринин математикалык күтүүсүнө барабар болгондуктан (5-глава, §4-тү кара)

$M(\bar{X}_m)=M[(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n] =[M(X_1)+ M(X_2)+\ldots + M(X_n)]/n = na/n = a$ же

$$M(\bar{X}_m) = a \qquad (53)$$

Генералдык жыйындыны да X белгисине карата кокус чоңдук катары карасак, ал жогоруда каралган бирдей бөлүштүрүлгөн X_1, X_2 ,...., X_n кокус чоңдуктарындай бөлүштүрүлгөн болот. Ошондуктан, бул кокус чоңдуктар менен генералдык жыйындынын сандык мүнөздөмөлөрү барабар. Демек, генералдык жыйындынын математикалык күтүүсү M(X) дагы а болот: $M(X) = \bar{x}_г = a$.

(53) формуласы боюнча а-нын ордуна $M(\bar{X}_m)$-ти койсок

$$M(\bar{X}_m) = \bar{x}_г$$

келип чыгат. Тандалма орто генералдык ортонун жылышпаган чамалоосу болору далилденди.

Тандалма орто генералдык ортонун негиздүү чамалоосу да болот. Чындыгында эле, X_1, X_2 ,...., X_n кокус чоңдуктары чектелген дисперсияларга ээ болот деп эсептеп, ал чоңдуктарга Чебышевдин теоремасын (жекече учурда) колдонууга болот. Теорема боюнча, n чоңойгон сайын X_1 , X_2 ,…., X_n чоңдуктарынын арифметикалык орто чоңдугу, б.а. $\overline{X}_m$, ыктымалдыгы боюнча, ар бир X_i чоңдугунун математикалык күтүүсү- а -га умтулат. Демек, $\overline{x}_г = a$ болгондуктан , $\overline{X}_m$ ыктымалдыгы боюнча $\overline{x}_г$-га умтулат.

Ошентип, тандалманын көлөмү көбөйгөн сайын, тандалма орто ыктымалдыгы боюнча генералдык ортого умтулуп, тандалма орто генералдык ортонун негиздүү чамалоосу болорун тастыктайт.Айтылгандардан, эгерде бир эле генералдык жыйындыдан, чоң көлөмдөгү бир нече тандалма алынса, алардын тандалма ортолору, жакындаштырылган түрдө бир-бирине барабар болот. Тандалма ортонун туруктуулук касиети мына ушунда.

Эгерде, бирдей бөлүштүрүлгөн эки жыйындынын дисперсиялары барабар болсо, анда тандалма ортонун генералдык ортого жакындыгы, тандалманын көлөмүнүн генералдык жыйындынын көлөмүнө болгон катышына көз каранды болбойт. Ал жакындык, тандалманын көлөмүнө көз каранды: тандалманын көлөмү чоңойгон сайын, тандалма орто менен генералдык ортонун айырмасы кичирейет. Мисалы, бир жыйындыдан 1%, экинчи жыйындыдан 4% нерселер тандалып алынган болсо, бирок, биринчи тандалманын көлөмү экинчисиникинен чоң болуп калса, анда биринчи тандалма орто, экинчисине караганда, тиешелүү генералдык жыйындыдан азыраак айырмаланат. Бул жыйынтыкты алууда, тандалманы кайталанма деп эсептегенбиз. Эгерде тандалманын көлөмү генералдык жыйындынын көлөмүнө караганда бир топ эле кичине болсо, алынган жыйынтыктар кайталанбоочу тандалмалар үчүн да аткарылат. Мындай жыйынтыкты колдонуу лрактикада көп кездешет.

§ 4. Жалпы жана группалык ортолор. Жалпы ортодон кыйшайуу (четтөө) жана анын касиети.

Жыйындынын көлөмү чоң болгон учурда, эсептөөлөрдү ,мисалы арифметикалык орто чоңдукту табууну, жыйындыны бир нече группаларга бөлүп туруп, жүргүзгөн оңой болот.

Генералдык же тандалма жыйындынын X сандык белгиге карата бардык маанилери бир нече группага бөлүнгөн дейли. Ар бир группаны өз алдынча жыйынды катарында карап, анын арифметикалык орто чоңдугун табууга болот.

Белгинин группалык жыйындыга тиешелүү маанилеринин арифметикалык орто чоңдугу группалык орто деп аталат.

Жыйынды группаларга бөлүнгөн учурда, жалпы орто түшүнүгүн киргизүүгө туура келет.

Белгинин бардык жыйындыга тиешелүү маанилеринин арифметикалык орто чоңдугу жалпы орто деп аталат.

Группалык ортолорду жана группалардын көлөмдөрүн билип туруп, жалпы ортону табууга болот.

Жалпы орто , группалык ортолордун, группалардын көлөмдөрүнө карата салмакталган, арифметикалык орто чоңдугуна барабар. Мунун далилдөөсүн жүргүзбөстөн, аны иллюстрациялоочу (түшүндүрмө) мисал келтиребиз.

Мисал. Төмөнкү, эки группадан турган, жыйындынын жалпы ортосун тапкыла:

Группа................................	биринчи		экинчи	
Белгинин маанилери......	1	6	1	5
Жыштык	10	15	20	30
Көлөм	10+15=25		20+30= 50	

Чыгаруу. Алдын ала, группалык ортолорду табабыз:

$$\bar{x}_1=(10\cdot 1+15\cdot 6)/25=4; \quad \bar{x}_2= (20\cdot 1+30\cdot 5)/50= 3,4.$$

Группалык ортолор боюнча жалпы ортону табабыз:

$$\bar{x} = (25\cdot 4+50\cdot 3,4)/(25+50) =3,6.$$

Жалпы ортону түздөн түз чыгарсак деле ушул эле жыйынтык алынат.

Генералдык же тандалма жыйындынын X сандык белгиге карата алынган статистикалык бөлүштүрүүсү:

$$x_i \;\ldots\ldots\ldots\; x_1 , x_2 ,\ldots, x_к$$

$$n_i \;\ldots\ldots\ldots\; n_1, \quad n_2,\ldots, n_к$$

берилсин. Мында $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Жалпы орто $\bar{x} = (\sum_{i=1}^{k} n_i x_i)/п$ же

$$\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = п\bar{x} \qquad (54)$$

болору түшүнүктүү.

$\bar{x}$ туруктуу сан болгондуктан

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x} = \bar{x} \sum_{i=1}^{k} n_i = п\bar{x} \qquad (55)$$

Белгинин маанилери x_i менен жалпы орто $\bar{x}$ -тин айырмасы $x_i - \bar{x}$ кыйшайуу же четтөө деп аталат.

<u>Теорема</u>. Кыйшайуу менен ага тиешелүү жыштыктын көбөйтүндүлөрүнүн суммасы нөлгө барабар:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}) = 0.$$

<u>Далилдөө.</u> (54) жана (55) барабардыктарынын негизинде

$$\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i - \sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x} = п\bar{x} - п\bar{x} = 0.$$

<u>Натыйжа.</u> Кыйшайуунун орто мааниси нөлгө барабар:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}) / \sum_{i=1}^{k} n_i = 0/п = 0.$$

<u>Мисал</u>.X сандык белгинин бөлүштүрүүсү

x_i	1	4	6
$п_i$	8	10	12 .

Кыйшайуу менен ага тиешелүү жыштыктын көбөйтүндүлөрүнүн суммасы нол болорун текшергиле.

<u>Чыгаруу</u>. Жалпы ортону табабыз:

$$\bar{x} = (1\cdot 8 + 4\cdot 10 + 6\cdot 12)/30 = 4.$$

Анда

$$\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}) = 8(1-4)+10(4-4)+12(6-4) = -24 + 0 + 24 = 0.$$

§ 5. Генералдык дисперсия.

Генералдык жыйындынын Х сандык белгилери, өзүнүн орто маанисинин тегерегинде кандай чачылгандыгын мүнөздөш үчүн, жыйынтыктоочу мүнөздөгүч болгон генералдык дисперсия түшүнүгү киргизилет.

Генералдык дисперсия $D_г$ деп, генералдык жыйындынын белги маанилери менен генералдык ортонун айырмасынын (кыйшайуунун) квдраттарынын орто арифметикалык чоңдугу аталат.

Эгерде,көлөмү N болгон генералдык жыйындынын белги маанилери x_1 , x_2 ,…., x_N ар түрдүү болсо, анда

$$D_г = \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \right) / N .$$

Эгерде, белгинин маанилери x_1 , x_2 ,…., $x_к$, тиешелүү түрдө, N_1,N_2,….,N_k жыштыкта болушса, анда

$$D_г = \left(\sum_{i=1}^{N} N_i (x_i - \bar{x})^2 \right) / N ,$$

б.а. генералдык дисперсия кыйшайуунун квадраттарынын, тиешелүү жыштыктарга карата салмакталган, орто чоңдугуна барабар.

Мисал. Генералдык жыштыктын статистикалык бөлүштүрүүсү

x_i	2	4	5	6
$п_i$	8	9	10	3 .

Генералдык дисперсияны тапкыла.

Чыгаруу. $\bar{x}_г = \sum_{i=1}^{k} N_i x_i$ формуласы боюнча генералдык ортону табабыз:

$$\bar{x}_г = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{8 + 9 + 10 + 3} = \frac{120}{30} = 4 .$$

Анда, генералдык дисперсия

$$D_г = \frac{8 \cdot (2-4)^2 + 9 \cdot (4-4)^2 + 10(5-4)^2 + 3(6-4)^2}{30} = 54/30 = 1{,}8.$$

Генералдык жыйындынын белги маанилеринин чачылышын мүнөздөө үчүн, дисперсиядан башка квадраттык орто кыйшайуу колдонулат.

Генералдык квадраттык орто кыйшайуу деп генералдык дисперсиядан алынган квадраттык тамыр айтылат да, ал $\sigma_г$ аркылуу белгиленет:

$$\sigma_г = \sqrt{D_г} \ .$$

§6.Тандалма дисперсия

Тандалма жыйындынын сандык белгилеринин, өзүнүн $\bar{x}_m$ орто маанисине карата чачылуусун чамалоо үчүн, тандалма дисперсия деген жыйынтыктоочу мүнөздөмө чоңдугу киргизилет.

Тандалма дисперсия $D_т$ деп, тандалма жыйындынын белги маанилери менен тандапма ортонун айырмасынын (кыйшайуунун) квдраттарынын орто арифметикалык чоңдугу $\bar{x}_m$ аталат.

Эгерде,көлөмү п болгон тандалма жыйындынын белги маанилери x_1 , x_2 ,…., $x_п$ ар түрдүү болсо, анда

$$D_т = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_m)^2\right)/n \, .$$

Эгерде белгинин маанилери x_1 , x_2 ,…., $x_к$, тиешелүү түрдө, $п_1$,$п_2$,….,$п_k$ жыштыкта болушса, анда

$$D_т = \left(\sum_{i=1}^{к} n_i (x_i - \bar{x}_m)^2\right)/n \, ,$$

б.а. тандалма дисперсия кыйшайуунун квадраттарынын, тиешелүү жыштыктарга карата салмакталган, орто чоңдугуна барабар.

Мисал. Тандалма жыштыктын статистикалык бөлүштүрүүсү

x_i	4	5	6	10
$п_i$	20	8	10	2 .

Тандалма дисперсияны тапкыла.

Чыгару. $\bar{x}_m = \sum_{i=1}^{k} п_i x_i$ формуласы боюнча тандалма ортону табабыз:

$$\bar{x}_m = \frac{20 \cdot 4 + 10 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 2 \cdot 10}{20 + 10 + 8 + 2} = \frac{80 + 60 + 20 + 40}{40} = \frac{200}{40} = 5.$$

Анда, тандалма дисперсия

$$D_m = \frac{20(4-5)^2 + 10(6-5)^2 + 8(5-5)^2 + 2(10-5)^2}{40} = \frac{20+10+0+50}{40} = \frac{80}{40} = 2.$$

Тандалма жыйындынын белги маанилеринин чачылышын мүнөздөө үчүн, дисперсиядан башка квадраттык орто кыйшайуу колдонулат.Тандалма квадраттык орто кыйшайуу деп тандалма дисперсиядан алынган квадраттык тамыр айтылат да, ал σ_m аркылуу белгиленет: $\sigma_m = \sqrt{D_m}$.

Генералдык же тандалма дисперсиялардын чыгаруу формулаларын, кайсынысы болсо да баары бир, жөнөкөй түргө төмөндөгү теореманын негизинде келтирүүгө болот.

Теорема. Дисперсия, белги маанилердин квадраттарынын орто саны менен орто сандын квадратынын айырмасына барабар: D = $\overline{x^2} - (\overline{x})^2$.

Далилдөө. Дисперсиянын формуласын теңдеш өзгөртөбүз: D $= \left(\sum_{i=1}^{\kappa} n_i (x_i - \overline{x}_в)^2\right) / n =$

$$\left(\sum_{i=1}^{\kappa} n_i (x_i^2 - 2x_i\overline{x} + [\overline{x}]^2)\right)/n = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 / n - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i / n + (\overline{x})^2 \sum_{i=1}^{k} n_i / n =$$
$$\overline{(x^2)} - 2\overline{x}\cdot\overline{x} + (\overline{x})^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2.$$

Демек D $= \overline{x^2} - \overline{x}^2$. Мында $\overline{x} = (\sum_{i=1}^{k} n_i x_i)/п$, $\overline{x^2} = (\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2)/п$.

Мисал. Берилген бөлүштүрүү

x_i	1	2	3	4
$п_i$	20	15	10	5

боюнча дисперсияны тапкыла.

Чыгаруу. Жалпы ортону табабыз:

$$\overline{x} = \frac{20\cdot 1 + 15\cdot 2 + 10\cdot 3 + 5\cdot 4}{20+15+10+5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Анда изделип жаткан дисперсия

$$D = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 5 - 2^2 = 1.$$

§ 7. Группанын, группанын ички, группанын сырткы жана жалпы дисперсиялары.

Генералдык же тандалма (айырмасы жок) жыйындынын X сандык белгиге карата бардык маанилери, бир нече группага бөлүнгөн дейли. Ар бир группаны өз алдынча жыйынды катарында карап, андан группалык ортону жана белгинин группага тиешелүү маанилеринин, группалык ортого карата дисперсиясын, табууга болот.

Белгинин группалык жыйындыга тиешелүү маанилеринин, группалык ортого карата дисперсиясы группалык дисперсия деп аталат:

$$D_{j\ гр} = \left(\sum n_i (x_i - \bar{x}_j)^2 \right) / N_j,$$

мында, n_i -белгинин x_i маанисине тиешелүү жыштыгы; j - группанын номери; $\bar{x}_j$ - j -нчы группанын группалык ортосу; $N_j = \sum n_i$ - j -нчы группанын көлөмү.

Группалык дисперсиялардын, группалардын көлөмдөрүнө карата салмакталган, арифметикалык орто чоңдугу группалардын ички дисперсиясы деп аталат:

$$D_{гр\ ич} = \left(\sum N_j \cdot D_{j\ гр} \right) / n,$$

Мында, ; N_j -j -нчы группанын көлөмү; $n = \sum_{j=1}^{k} N_j$ - бардык жыйындынын көлөмү.

Группалык ортолордун жалпы ортолорго карата дисперсиясы группалар аралык дисперсия деп аталат: $D_{гр\ ар} = \left(\sum N_j \cdot (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \right) / n$.

Мында, $\bar{x}$ -жалпы орто; $n = \sum_{j=1}^{k} N_j$ - бардык жыйындынын көлөмү.

Эми бардык жыйындыга тиешелүү болгон, жалпы дисперсия түшүнүгүн киргизебиз.

Жалпы жыйындынын белги маанилеринин жалпы ортого карата дисперсиясы жалпы дисперсия деп аталат:

$$D_{жал} = \left(\sum n_i (x_i - \bar{x})^2 \right) / n .$$

<u>Мисал</u>. X белгисине карата_жыйындынын эки группадан турган бөлүштүрүүсү берилген:

Биринчи группа		Экинчи группа	
x_i	n_i	x_i	n_i
2	1	3	2
4	7	8	3
5	2		

Группалык дисперсияны, группалардын ички дисперсиясын, группалар аралык дисперсияны жана жалпы дисперсияны тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. Алдын ала, $N_1=1+7+2=10$, $N_2 =2+3=5$, тиешелүү түрдө, биринчи жана экинчи группалардын көлөмдөрү экендигин эске алып, группалык ортолорду табабыз:

$$\bar{x}_1 = (\sum_{i=1}^{k} n_i x_i)/N_1 = \frac{1\cdot 2 + 7\cdot 4 + 2\cdot 5}{1+7+2} = 4; \qquad \bar{x}_2 = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 8}{2+3} = 6.$$

Эми дисперсияларды тапсак болот:

$$D_{1гр} = \left(\sum n_i \cdot (x_i - \bar{x}_1)^2 \right) / N_1 = [1\cdot(2-4)^2 + 7\cdot(4-4)^2 + 2\cdot(5-4)^2]/10 = 0.6$$

$$D_{2гр} = \frac{2(3-6)^2 + 3(8-6)^2}{5} = 6.$$

$$D_{гр\ ич} = \left(\sum N_j \cdot D_{jгр} \right) / n = \frac{10\cdot 0{,}6 + 5\cdot 6}{15} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

Группалар аралык дисперсияны табыш үчүн, жалпы ортону табабыз:

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{1\cdot 2 + 7\cdot 4 + 2\cdot 5 + 2\cdot 3 + 3\cdot 8}{10+5} = \frac{14}{3}.$$

Анда

$$D_{гр\ ар} = \left(\sum N_j \cdot (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \right) / n = \frac{10(4-14/3)^2 + 5(6-14/3)^2}{10+5} = \frac{8}{9} .$$

Эми жалпы дисперсияны тапсак болот:

$$D_{жал} = \frac{1(2-14/3)^2 + 7(4-14/3)^2 + 2(5-14/3)^2 + 2(3-14/3)^2 + 3(8-14/3)^2}{15} = \frac{148}{45}.$$

<u>Эскертүү</u>. Ички дисперсия менен группалар аралык дисперсияны кошсок :

$D_{гр\ ич}$ + $D_{гр\ ар}$ =12/5+8/9 = 148/45 жалпы дисперсия келип чыгат.

<u>Теорема.</u> Эгерде жыйынды бир нече группалардан турса, анда, жалпы дисперсия группалардын ички дисперсиясы менен группалар аралык дисперсиянын суммасына барабар:

$$D_{жал} = D_{гр\ ич} + D_{гр\ ар}.$$

<u>Далилдөө.</u> Далилдөө жөнөкөй болуш үчүн, X сан белгисине карата, бардык генералдык жыйынды эки эле группага бөлүнгөн дейли:

Группа	биринчи	экинчи
Белгинин маанилери	x_1 x_2	x_1 x_2
Жыштыктар	m_1 m_2	n_1 n_2
Группанын көлөмү	$N_1=m_1+m_2$	$N_2=n_1+n_2$
Группалык орто	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
Группалык дисперсия	$D_{1гр}$	$D_{2гр}$
Бардык жыйындынын көлөмү	$n=N_1+N_2$	

Жалпы дисперсияны табабыз:

$$D_{жал} = \left[-\left(\sum_{i=1}^{2} m_i(x_i-\bar{x})^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{2} n_i(x_i-\bar{x})^2\right) - \right] \Big/ n \qquad (56)$$

(56) бөлчөгүнүн алымындагы биринчи кошулуучуну төмөндөгүдөй өзгөртүп жөнөкөйлөтөбүз:

$$\sum_{i=1}^{2} m_i(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{2} m_i(x_i-\bar{x}_1+\bar{x}_1-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{2} m_i(x_i-\bar{x}_1)^2 + 2(\bar{x}_1-\bar{x})\sum_{i=1}^{2} m_i(x_i-\bar{x}_1) + \sum_{i=1}^{2} m_i(\bar{x}_1-\bar{x})^2.$$

$D_{j\ гр} = \left(\sum m_i (x_i - \bar{x}_j)^2\right) / N_j$ же $\sum m_i (x_i - \bar{x}_1)^2 = N_1 D_{1гр}$ болгондуктан жана кыйшайуу жөнүндөгү теореманын (§4) негизинде $\sum m_i (x_i - \bar{x}_j) = 0$ болорун эске алсак, биринчи кошунду

$$\sum_{i=1}^{2} m_i (x_i - \bar{x})^2 = N_1 D_{1гр} + N_1 (x_i - \bar{x}_1)^2 \qquad (57)$$

түрүнө келет. Ушул сыяктуу эле экинчи кошундуну

$$\sum_{i=1}^{2} n_i (x_i - \bar{x})^2 = N_2 D_{2гр} + N_2 (x_i - \bar{x}_2)^2 \qquad (58)$$

түрүндө жаза алабыз. (57),(58) барабардыктарын (56) формуласына койсок:

$$D_{жал} = (N_1 D_{1гр} + N_1 (x_i - \bar{x}_1)^2)/п + (N_2 D_{2гр} + N_2 (x_i - \bar{x}_2)^2 /п = (N_1 D_{1гр} + N_2 D_{2гр})/п +$$
$$+ (N_1 (x_i - \bar{x}_1)^2 + N_2 (x_i - \bar{x}_2)^2]/п = D_{гр\ ич} + D_{гр\ ар} \quad \text{же}$$

$$D_{жал} = D_{гр\ ич} + D_{гр\ ар}.$$

Теорема далилденди. Бул теоремага мисал жөнүндө эскертүүдө айтылган.

§ 8. Генералдык дисперсияны оңдолгон тандалма дисперсия аркылуу чамалоо.

X сан белгисине карата, көз карандысыз п байкоонун негизинде, генералдык жыйындыдан алынган, көлөмү п болгон, кайталанма тандоонун статистикалык бөлүштүрүүсү

x_i …….. x_1 , x_2 ,…., $x_к$

n_i .... n_1, n_2,…., $n_к$ болсун, $n = n_1 + n_2 + n_к$.

Генералдык дисперсия $D_г$-ны алынган тандалма боюнча чамалоо, б.а.жакындаштырып табуу талап кылынсын . Эгерде генералдык дисперсиянын чамалоосу катары тандалма дисперсияны кабыл алсак, анда бул чамалоо генералдык дисперсиянын маанилерин кеми менен берип , системалык каталарга алып келет. Себеби,тандалма дисперсия генералдык дисперсиянын жылышкан чамалоосу болорун далилдөөгө болот.Башкача айтканда,тандалма дисперсиянын математикалык күтүүсү чамаланып жаткан генералдык дисперсияга барабар болбой,

$$D_т = \frac{n-1}{n} D_г \quad \text{болот.}$$

Тандалма ортону ,математикалык күтүүсү генералдык дисперсияга барабар болгондой кылып, оңой эле оңдоого болот. Андай болуш үчүн, тандалма дисперсияны п/(п-1) бөлчөгүнө көбөйтүп коюу жетиштүү.

Оңдолгон дисперсияны S^2 аркылуу белгилейбиз, ал

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_m = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_b})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_b})^2}{n-1}$$

барабар.

Оңдолгон дисперсия генералдык дисперсиянын жылышпаган чамалоосу болуп эсептелет. Чындыгында эле,

$$M[S^2] = M\left[\frac{n}{n-1} D_m\right] = \frac{n}{n-1} M[D_m] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_г = D_г$$

Ошентип, генералдык дсиперсияны чамалоо үчүн, оңдолгон дисперсия кабыл алынат:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_b})^2}{n-1}.$$

Генералдык жыйындынын орто квадраттык кыйшайуусун чамалоо үчүн, “оңдолгон” орто квадраттык кыйшайуу кабыл алынат. Ал оңдолгон длсперсиядан алынган квадраттык тамырга барабар:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_b})^2}{n-1}}.$$

Эскертүү. $D_т = \left(\sum_{i=1}^{к} n_i (x_i - \bar{x}_в)^2\right) / n$, жана $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_b})^2}{n-1}$

формулаларынан, тандалма дисперсия менен оңдолгон тандалма дисперсиялар, бөлчөктүн бөлүмүнөн гана айырмаланары көрүнүп турат.

Бул формулалардан, эгерде тандалманын көлөмү чоң болсо, тандалма дисперсия менен оңдолгон дисперсиянын айырмасы аз эле болору көрүнүп турат. Практика жүзүндө эгерде n<30 болсо оңдолгон дисперсия пайдаланылат.

§9.Чамалоонун тактыгы. Ишеним ыктымалдыгы (ишенимдүүлүк). Ишенимдүүлүк интервалы.

Бир гана сан менен аныкталуучу чамалоону, чекиттүү чамалоо дейбиз. Жогоруда каралган бардык чамалоолор чекиттүү чамалоолор болуп эсептелет. Эгерде тандалманын көлөмү аз эле болсо, чектиттү чамалоо, чамаланып жаткан параметрден алыс калышы, б.а. чоң каталарга алып келиши мүмкүн.Ошондуктан, тандалманын көлөмү аз болгон учурда, интервалдык деп аталган чамалоо колдонулат.

Интервалдык чамалоо деп, интервалдын четтери болгон, эки сан менен аныкталуучу чамалоо аталат.
Интервалдык чамалоо , чамалоонун тактыгын жана ишенимдүүлүгүн аныктоого мүмкүнчүлүк берет. Бул түшүнүктөрдун маанилери кейинирээк түшүндүрүлөт.

Байкоонун негизинде табылган, Ө* стстистикалык мүнөздөмөсү, белгисиз Ө параметринин чамалоосу болсун.
$|\theta - \theta^*|$ канчалык кичине болсо, Ө* ошончолук чамалануучу Ө параметирин тагыраак мүнөздөрү түшүнүктүү. Башкача айтканда, эгер, $\delta>0$ жана $|\theta - \theta^*|<\delta$ болсо, δ канчалык кичине болгон сайын, чамалоо ошончолук так болот. Ошондуктан, δ чамалоонун тактыгы деп аталат.

Бирок, статистикалык ыкмалар $|\theta - \theta^*|<\delta$ барабарсыздыгын канагаттандыруучу δ-ны так аныктоого мүмкүнчүлүк бербейт. Бирок бул барабарсыздыктын белгилүү бир γ ыктымалдыкта аткарылуусу мүмкүн экендиги жөнүндө сөз кылууга болот.
Ө-ны Ө* менен чамалоонун ишенимдүүлүгү (ишеним ыктымалдыгы) деп, $|\theta - \theta^*|<\delta$ барабарсыздыгынын аткарылуу ыктымалдыгы болгон γ санын айтабыз.

Демейде, чамалоонун ишенимдүүлүгү алдын ала берилет да, γ үчүн бирге жакын болгон сан кабыл алынат. Көпчүлүк учурда ишенимдүүлүк үчүн 095; 0,99жана 0,999 сандарын алуу сунуш кылынат.

$|\theta-\theta^*|<\delta$ барабарсыздыгынын аткарылуу ыктымалдыгы γ болсун:

$$P[|\theta-\theta^*|<\delta]=\gamma.$$

$|\theta-\theta^*|<\delta$ барабардыгын, ага тең күчтөгү $-\delta<$ Ѳ-Ѳ* $<\delta$ же Ѳ*-δ <Ѳ<Ѳ*-δ барабарсыздыктары менен алмаштырып:

P[Ѳ*-δ <Ѳ<Ѳ*-δ]=γ барабардыгын алабыз.

Мандан, белгисиз Ѳ параметри, (Ѳ*-δ Ѳ*-δ) интервалында жатат деген окуянын ыктымалдыгы γ деген жыйынтык алабыз.

Белгисиз параметрди γ ишенимдүүлүгү менен камтып жаткан, (Ѳ*-δ Ѳ*-δ) интервалы ишенимдүүлүк интервалы деп аталат.

§10. Нормалдуу бөлүштүрүлгөн чоңдуктун математикалык күтүүсүн, σ белигилүү болгон учурда, чамалоонун ишенимдүүлүк интервалы.

Генералдык жыйындынын Х сандык белгиси нормалдуу бөлүштүрүлгөн жана анын орто квадраттык кыйшайуусу белгилүү болсун. $\bar{x}$ тандалма орто аркылуу белгисиз математикалык күтүү а-ны чамалоо талап кылынсын. а параметрин ν ишенимдүүлүгү менен камтып жаткан ишенимдүүлүк интервалын табалы.

$\bar{x}$ тандалма ортону $\bar{X}$ кокус чоңдугу катары карайбыз ($\bar{x}$ тандалма өзгөргөн сайын өзгөрөт) жана белгинин тандалма x_1 , x_2 ,…., x_n маанилерин бирдей бөлүштүрүлгөн көз каранды эмес кокус чоңдуктар X_1 , X_2 ,…., X_n катары карайбыз . Бул чоңдуктардын ар биринин математикалык күтүүлөрү а , орто квадраттык кыйшайуулары- σ.

Далилдөөсүз эле, Х кокус чоңдугу нормалдуу бөлүштүрүлгөн болсо, анда көз карандысыз байкоолордун негизинде табылган $\bar{X}$ тандалма ортосу да нормалдуу бөлүштүрүлгөн болорун белгилей кетели. $\bar{X}$-тин бөлүштүрүсүнүн параметрлери:

$$M(\bar{X})=a, \quad \sigma(\bar{X})=\sigma/\sqrt{n} .$$

Берилген ν ишенимдүүлүгү менен

$$P(/\bar{X}-a/<\delta)=\nu$$ аткарылсын.

$P(|X-\alpha| \prec \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ формуласындагы (8гл §7) X-ти $\overline{X}$-ке,жана $\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}$ алмаштырсак

$$P(|\overline{X}-\alpha| \prec \delta) = 2\Phi(\delta\sqrt{n}/\sigma) = 2\Phi(t), \quad t = \delta\sqrt{n}/\sigma .$$

Акыркы барабардыктан $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$ болгондуктан

$$\mathrm{P}(|\overline{X}-a| < t\sigma/\sqrt{n}) = 2\Phi(t).$$

Р ыктымалдыгы берилгендигин жана ν-гө барабар экендигин эске алып,жана $\overline{X}$ кокус чоңдугун кайрадан $\overline{x}$ тандалма ортого алмаштырып, эсептөө жүргүзүлө турган формуланы алабыз:

$$P(\overline{x}-t\sigma/\sqrt{n} < a < \overline{x}+t\sigma/\sqrt{n}) = 2\Phi(t) = \nu .$$

Бул барабардыктын мааниси төмөндөгүдө: ν ишенимдүүлүгү менен ($\overline{x}-t\sigma/\sqrt{n}$, $\overline{x}+t\sigma/\sqrt{n}$) интервалы белгисиз а параметрин камтыйт; чамалоонун тактыгы $\delta = t\sigma/\sqrt{n}.$

Коюлган маселе толугу менен чечилди.

Эми, t саны 2 Ф(t) = ν же Ф(t) = ν/2 барабардыгынан аныкталарын эскерте кетели. t аргументинин мааниси, Лапластын функциясынын таблицасынан Ф(t) = ν/2 барабардыгы канагаттандырылгандай кылып, аныкталат (2-тиркеме).

Мисал. Х кокус чоңдугу нормалдуу бөлүштүрүлгөн жана $\sigma = 3$. Эгерде тандалманын көлөмү п = 36 , чамалоонун ишенимдүүлүгү ν= 0,95 болсо, белгисиз а математикалык күтүүсүн камтуучу ишеним интервалын тапкыла.

Чыгаруу. Ф(t) = ν/2 барабардыгынан t- ны табабыз: Ф(t) = 0,475.

2- тиркеме боюнча t=1,96.

Анда, чамалоонун тактыгы: $\delta = t\sigma/\sqrt{n} = (1{,}96)/\sqrt{36} = 0{,}98$.

Демек, ишенимдүүлүк интервалы ($\overline{x}$-0,98; $\overline{x}+$ 0,98) болот. Эгерде $\overline{x}$ = 4,1 болсо, ишенимдүүлүк интервалыынын четтери: $\overline{x}$-0,98=4,1-0,98=3,12; $\overline{x}$+ 0,98= 4,1-0,98 = 5,08 .

Ошентип, белгисиз а параметри 3,12 < а < 5.08 барабарсыздыктарын канагаттандырат. Бирок, мындан Р(3,12 < а < 5.08) = 0,95 барабардыгы келип чыгат деген туура болбойт. Чындыгында эле, а турактуу сан болгондуктан, эгер а (3,12 5.08) интербвалынды жатса, ал шексиз окуя болгондуктан, анын ыктымалдыгы 1-ге барабар; эгер а (3,12 5.08) интервалында жатпаса 3,12 < а < 5.08 болбос окуя болот да, анын ыктымалдыгы 0. Башкача айтканда , ишеним ыктымалдыгын чамаланып жаткан параметр менен байланыштырууга болбойт; ал тандалмадан тандалмага өзгөрүлүп туруучу,ишенимдүүлүк интервалдын чектери менен гана байланышкан.

Ишенимдүүлүктүн мааниси төмөндөгүдөй. $\nu = 0{,}95$ ишенимдүүлүгү, эгерде жетишерлик көп санда тандалма алынган болсо, анда алардын 95% -и параметрди камтыган ишенимдүүлүк интервалын аныктайт; ал эми 5% -инде ишенимдүүлүк интервалы параметрди камтыбай калышы мүмкүн.

Эскертүү. Эгерде берилген ν ишенимдүүлүктө жана δ тактыкта математикалык күтүүнү чамалоо керек болсо, бул тактыкты камсыз кылган, тандалманын минималдуу көлөмүн

$$\delta = t\sigma/\sqrt{n} \quad \textit{формуласынан} \quad \textit{аныктайбыз}: \quad n = t^2\sigma^2/\delta^2.$$

§ 11. Нормалдуу бөлүштүрүлгөн чоңдуктун математикалык күтүүсүн, σ белгисиз болгон учурда чамалоонун ишенимдүүлүк интервалы .

Генералдык жыйындынын X сандык белгиси нормалдуу бөлүштүрүлүп, бирок анын орто квадраттык кыйшайуусу белгисиз болсун. Белгисиз а математикалык күтүүсүн ишенимдүүлүк интервалдар аркылуу чамалоо талап кылынсын. σ белгисиз болгондуктан мурунку параграфтын жыйынтыгын колдоууга болбойт.

Мындай учурда, тандалмалардын маанилери боюнча, эркиндик даражасы k = n -1 болгон, Стьюденттин бөлүштүрүүсү боюнча бөлүшүлгөн $T = \dfrac{\overline{X} - a}{S/\sqrt{n}}$ кокус чоңдугун түзүүгө болот. Мында, $\overline{X}$ -тандалма орто, S –‘оңдолгон’ орто квадраттык кыйшайуу, n -тандалманын көлөмү, t аркылуу T -нын мүмкүн болгон маанилери белгиленет. Стьюденттин бөлүштүрүүсүнүн тыгыздыгы

$$f(t) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{(n-1)\pi}\;\Gamma((n-1)/2)}\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}, \quad x \geq 0$$

формуласы (гл.8, § 20) менен аныкталгандыктан, ал бөлүштүрүү, тандалманын көлөмү n же эркиндиктин даражасы k = (n -1) аркылуу аныкталып, белгисиз а жана σ параметрлеринен көз каранды болбостугу көрүнүп турат. f(t) жуп функция болгондуктан $\left|\frac{\overline{X}-a}{S/\sqrt{n}}\right|<v$ барабарсыздыгынын

аткарылуу ыктымалдыгы $P\left(\left|\frac{\overline{X}-a}{S/\sqrt{n}}\right|<t_v\right)=2\int_0^{t_v} f(t)dt=v$ формуласы же,

ошого тете, $P\left(\overline{X}-t_v S/\sqrt{n}<a<\overline{X}+t_v S/\sqrt{n}\right)=v$

боюнча аныкталат.

Ошентип, Стьюденттин бөлүштүрүүсүн колдонуп, v ишенимдүүлүгү менен белгисиз а параметрин камтыгыан, ишеничтүү $(\overline{x}-t_v s/\sqrt{n}\,,\overline{x}+t_v s/\sqrt{n}\,)$ интервалы табылды. Мында, $\overline{X}$ жана S кокус чоңдуктары, тандалма аркылуу табылган, турактуу $\overline{x}$ жана s чоңдуктары менен алмаштырылды. 3 -тиркемедеги таблица боюнча берилген п жана v боюнча t_v табылат.

МАСЕЛЕЛЕР

1.Эки группадан турган жыйындынын группалык ортолорун тапкыла:

1 -гр.	x_i	0,1	0,4	0,6	2 -гр.	x_i	0,1	0,3	0,4
i	$п_i$	3	2	5		$п_i$	10	4	6

Жообу. $\overline{x_1}=0{,}41;\quad \overline{x_2}=0{,}23.$

2. Биринчи маселенин шартында жалпы ортону тапкыла. Жообу. $\overline{x}$ =0,29

3. Жыйындынын статистикалык бөлүштүрүүсү берилген:

.				
x_i	4	7	10	15
$п_i$	10	15	20	5

Анын дисперсиясын тапкыла.

Жообу. D = 9,84.

4. Үч группадан турган жыйынды берилген:

Биринчи группа		Экинчи группа		Үчүнчү группа	
x_i	$п_i$	x_i	$п_i$	x_i	$п_i$
1	30	1	10	3	20
2	15	6	15	8	5
8	5				

Группалардын ички, группалар аралык жана жалпы дисперсияларды тапкыла.

Жообу. $D_{гр\ ич}=4{,}6$; $D_{гр\ ар}=1$; $D_{жал}=$ 5,6.

5. Кадимкидей бөлүштүрүлгөн тандалма үчүн, орто квадраттык кыйшайуу $\sigma = 2$, *тандалма орто* $\overline{x}_m = 5{,}40$ жана тандалманын көлөмү п = 10 белгилүү болсо, белгисиз математикалык күтүүнү берилген $\nu = 0{,}95$ ишенимдүүлүктө камтуучу, ишеним интервалын тапкыла.

Жообу. 4,16 < а < 6,64.

6.Кадимкидей бөлүштүрүлгөн белгинин " оңдолгон" орто квадраттык кыйшайуусу s = 1,5, тандалма орто $\overline{x}_t = 16{,}8$ тандалманын көлөмү п = 12 . Стьюденттин бөлүштүрүүсүн пайдаланып, белгисиз математикалык күтүүнү, берилген ν = 0,95 ишеними менен камтый турган ишенимдүүлүк интервалын тапкыла.

Жообу. 15,85 < а < 17,75.

О н э к и н ч и г л а в а

ТАНДАЛМАНЫН ЖЫЙЫНТЫКТООЧУ МҮНӨЗДӨМӨЛӨРҮН ЭСЕПТӨӨ ЫКМАЛАРЫ

§ 1. Шарттуу варианттар.

Тандалманын варианттары өсүү тартибинде, б.а. вариациялык катар түрүндө, жайгашкан болсун.

Айырмасы h болгон арифметикалык прогрессияны түзүүчү варианттар, бирдей алыстыктагы варианттар деп аталат.

$u_i = (x_i — C)/h$ барабардыгы менен аныкталуучу варианттар, шарттуу варианттар деп аталат. Мында, C — жалган нөл же жаңы санак башы; h —кадам, б.а. жанаша жаткан эки баштапкы варианттардын айырмасы (масштабдын жаңы бирдиги).
Тандалмалардын жыйынтыктоочу мүнөздөмөлөрүн эсептөөнүн жөнөкөйлөнгөн ыкмасы, баштапкы варианталарды шарттуу варианталар менен алмаштырууга негизделген.

Эгерде вариациялык катар, кадамы h болгон бирдей алыстыктагы ваианттардан турса, анда шарттуу варианттар бүтүн сандар болот. Чындыгында эле, жалган нөл катары каалагандай вариантаны, мисалы, x_m ди тандап алсак:

$$u_i = (x_i – C)/h = \{ x_1 + (i – 1)h – [x_1 +(m-1)h] \}/h = i – m.$$

i менен m —бүтүн сандар болгондуктан, алардын айырмасы i — m дагы бүтүн сан болот.

Эскертүү. Жалган нөл үчүн каалагандай вариантаны кабыл алса болот. Эгерде жалган нөл үчүн, вариациялык катардын болжол менен ортосундагы вариантаны (көпчүлүк учурда мындай вариантанын жыштыгы эң чоң болот) кабыл алса, эсептөө эң жөнөкөй болот.Себеби, ага тиешелүү шарттуу варианта нөлгө барабар жана калган варианталардын маанилери кичине.

Мисал. Статистикалык бөлүштүрү

x_i	23,6	28,6	33,6	38,6	43,6
n_i	5	20	50	15	10

берилген. Шарттуу варианттарды тапкыла.

Чыгаруу. Жалган нөл катары вариациялык катардын ортосундагы 33,6 вариантасын кабыл алабыз. h кадамы: h = 28,6 – 23,6 = 5 болот .

Шарттуу варианталарды табабыз:

$$u_1 = (x_1 - C)/h = (23{,}6 - 33{,}6)/5 = -2.$$

Ушул сыяктуу эле $u_2 = -1$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$, $u_5 = 2$. Шарттуу варианттар, кичине бүтүн сандар экендиги көрүнүп турат. Баштапкы варианталарга караганда бул шарттуу варианталар менен амалдарды жүргүзүү оңой болору түшүнүктүү.

§2.Адаттагыдай, баштапкы жана борбордук эмпирикалык моменттер

Тандалманын жыйынтыктоочу мүнөздөмөлөрүн эсептөө үчүн, теориялык моменттер (5-глава, § 5-ти кара) сыяктуу аныктала турган, эмпирикалык моменттерди пайдалануу ыңгайлуу. Теориялык моменттерден айырмаланып, эмпирикалык моменттер байкоолордон алынган маанилердин негизинде эсептелет.

к -тартиптеги адаттагыдай эмпирикалык момент деп, x_i - C айырмасынын к -даражасынын орто мааниси айтылат:

$$M'_k = (\sum n_i (x_i - C)^k)/n,$$

мында x_i — байкалуучу варианталар, n_i - варианттардын жыштыктары, $n = \sum n_i$ – тандалманын көлөмү, C — каалагандай турактуу сан (жалган нөл).

C=0 болгон учурда, к -тартиптеги адаттагыдай эмпирикалык моментти - к-тартиптеги баштапкы эмпирикалык момент деп айтышат:

$$M_k = (\sum n_i x_i^k)/n \quad .$$

Мындан, жекече учурда

$M_1 = (\sum n_i x_i)/n = \bar{x}_t$, б.а. биринчи тартиптеги баштапкы эмпирикалык момент тандалма ортого барабар.

к-тариптеги борбордук эмпирикалык момент деп, C=$\bar{x}_t$ болгон учурдагы к-тартиптеги адаттагы эмпирикалык момент аталат:

$$m_к = (\sum n_i (x_i - \bar{x}_t)^k)/n.$$

Жекече учурда,

$$m_2 = (\sum n_i (x_i - \bar{x}_t)^2)/n = D_t \qquad (59)$$

б.а. экинчи тартиптеги борбордук эмпирикалык момент - тандалма дисперсияга барабар.

Борбордук эмпирикалык моменттерди адаттагы моменттер аркылуу туюнтууга болот:

$$m_2 = M_2' - (M_1')^2, \tag{60}$$

$$m_3 = M_3' - 3M_2'M_1' + 2(M_1')^3, \tag{61}$$

$$m_4 = M_4' - 4M_3'M_1' + 6M_2'(M_1')^2 - 3(M_1')^4 . \tag{62}$$

§ 3. Шарттуу эмпирикалык моменттер. Борбордук моменттерди шарттуу моменттер аркылуу табуу.

Борбордук моменттерди табуу эпсиз чоң эсептөөлөрдү талап кылат. Эсептөөлөрдү жөнөкөйлөтүш үчүн, баштапкы варианттарды шарттуу варианттар менен алмаштырышат.

к - тартиптеги шарттуу эмпирикалык момент деп, шарттуу варианттар үчүн эсептелген к - тартиптеги баштапкы моментти айтышат:

$$M_k{*} = \frac{\sum n_i u_i^{\,k}}{n} = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{h}\right)^k}{n}.$$

Жекече учурда,

$$M_1{*} = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{h}\right)}{n} = \frac{1}{h}\left[\frac{\sum n_i x_i}{n} = C\frac{\sum n_i}{n}\right] = \frac{1}{h}(\bar{x}_m - C).$$

Мындан

$$\bar{x}_m = M_1{*}h + C \tag{63}$$

Ошентип, тандалма ортону табыш үчүн, биринчи тартиптеги шарттуу моментти таап, аны h ка көбөйтүп туруп, Сны (жалган нөлдү) кошуп коюш керек.

Адаттагыдай моменттерди шарттуу моменттер аркылуу туюнтабыз:

$$M_k{*} = \frac{\sum n_i\left(\frac{x_i - C}{h}\right)^k}{n} = \frac{1}{h^k}\frac{\sum n_i(x_i - C)^k}{n} = \frac{M_k{}'}{h^k}.$$

Мындан

$$M'_к = M_к{*}h^k.$$

Ошентип, к нчы тартиптеги адаттагыдай моментти табыш үчүн, ошол эле тартиптеги шарттуу моментти h^k га көбөйтүп коюу жетиштүү.

Адаттагы момент табылгандан кийин, мурунку параграфтагы (60), (61),(62) формулаларды пайдаланып, борбордук моменттерди жеңил эле табууга болот:

$$m_2 = [M_2{*} - (M_1{*})^2]h^2, \tag{64}$$

$$m_3 = [M_3{*} - 3M_2{*}M_1{*} + 2(M_1{*})^3]h^3, \tag{65}$$

$$m_4 = [M_4{*} - 4M_3{*}M_1{*} + 6M_2{*}(M_1{*})^2 - 3(M_1{*})^4]h^4\,. \tag{66}$$

Мурунку параграфтагы (60) жана (59) формулаларын колдонуп, биринчи жана экинчи тартиптеги шарттуу моменттер аркылуу, тандалма дисперсияны табабыз:

$$D_t = [M_2{*} - (M_1{*})^2]h^2\,\cdot \tag{67}$$

Борбордук моменттерди шарттуу моменттер аркылуу табуу жолдору кийинки параграфта көрсөтүлөт.

§ 4. Тандалма орто жана тандалма дисперсияны көбөйтүндүлөр ыкмасы менен чыгаруу

Вариациялык катардын варианталары бирдей алыстыкта жайгашкан болсо, алардын ар түрдүү тартиптеги шарттуу моменттерин чыгаруунун ыңгайлуу жолу, көбөйтүндүлөр ыкмасы болот. Шарттуу моменттер белгилүү болсо, керектүү болгон баштапкы жана борбордук эмпирикалык моменттерди табуу оңой эле болот. Жекече учурда, көбөйтүндүлөр ыкмасы менен тандалма ортону жана тандалма дисперсияны чыгаруу ыңгайлуу. Эсептөөлөрдүн жыйынтыгын таблица түзүү түрүндө жүргүзүү максатка ылайыктуу. Таблица төмөндөгүдөй түзүлөт:

1) таблицанын биринчи мамычасына баштапкы тандалма варианттар өсүү тартибинде (вариациялык катар түрүндө) жайгаштырылат;
2) экинчи мамычага варианттардын жыштыктары жазылып, акыркы чакмака (клеткага) алардын суммасы (тандалманын көлөмү) жазылат.
3) шарттуу варианттар $u_i = (x_i - C)/h$ үчүнчү мамычага жазылат; мында, C- жалган нөл - вариациялык катардын, болжол менен, ортосунда жайгашкан варианта, h - жанаша жаткан каалагандай эки вариантанын айырмасына барабар болгон кадам; практика жүзүндө үчүнчү мамыча төмөндөгүдөй толтурулат: тандалып алынган жалган нөл жайгашкан саптын чакмагына 0 жазылып, андан өйдөкү чакмактарга, тиешелүү түрдө, -1, -2, -3, …, төмөнкү чакмактарга 1, 2, 3, … жазылат;
4) төртүнчү мамычага шарттуу варианталар менен алардын тиешелүү жыштыктарынын көбөйтүндүсү $n_i u_i$ жазылат; алардын суммасы $\sum n_i u_i$ акыркы (төмөнкү) чакмака жазылат;
5) бешинчи мамычага шарттуу варианттардын квадраттары менен алардын тиешелүү жыштыктарынын көбөйтүндүсү $n_i u_i^2$ жазылып, төмөнкү чакмака алардын суммасы $\sum n_i u_i^2$ жазылат;
6) шарттуу варианттар менен бирдин суммасынын квадраттары менен шарттуу варианттардын тиешелүү жыштыктарынын көбөйтүндүлөрү

   ($n_i(u_i+1)^2$) алтынчы мамычага жазылып, алардын суммасы $\sum n_i (u_i + 1)^2$ төмөнкү чакмака жазылат.

Эскертүүлөр. 1.Төртүнчү мамычадагы терс сандарды өзүнчө кошуп,алардын суммасы A_1 ди жалган нөл жайгашкан саптын чакмагына, оң сандардын суммасы A_2ни арыркы чакмактын алдындагы чакмака жазып, $\sum n_i u_i$ суммасын $A_1 + A_2 = \sum n_i u_i$ түрүндө табуу оңтойлуу.

2 . Бешинчи мамычанын $n_iu_i^2$ көбөйтүндүлөрүн табыш үчүн, төртүнчү мамычадагы n_iu_i сандарын үчүнчү мамычадагы тиешелүү u_i сандарына көбөйтүп коюу жетиштүү.

3. Алтынчы мамычаны пайдаланып, эсептөөлөрдүн тууралыгын текшерүүгө болот. Эсептөөлөр туура болуш үчүн,

$$\sum n_i(u_i+1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n$$

болуш керек.

Таблица толтурулуп, эсептөөлөрдүн тууралыгы текшерилгенден кийин, шарттуу моменттерди

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n}, \qquad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n}$$

формулалары боюунча табышат.

Акырында, тандалма орто менен тандалма дисперсия § 3-төгү (63) жана (67) формулалары $\bar{x}_m = M_1^* h + C$ $x_т$, $D_t = [M_2^* - (M_1^*)^2 h^2$ боюунча табылат.

Мисал. Статистикалык бөлүштүрүү

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

берилген. Көбөйтүндүлөр ыкмасы менен тандалма ортону жана дисперсияны тапкыла.

Чыгаруу. Берилген статистикалык бөлүштүрүү боюунча, жогоруда айтылгандай таблицаны толтурабыз:

7 - Т а б л и ц а

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
10,2	2	-4	-8	32	18
10,4	3	-3	-9	27	12
10,6	8	-2	-16	32	8
10,8	13	-1	-13	13	0
11,0	25	0	A_1= -46		25

11,2	20	1	20	20	80
11,4	12	2	24	48	108
1	2	3	4	5	6
11,6	10	3	30	90	160
11,8	6	4	24	96	150
12,0	1	5	5	25	36

$A_2 = 103$

n=100 $\sum n_i u_i$ =57 $\sum n_i u_i^2$ $\sum n_i (u_i + 1)^2$

Текшерүү. $\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i$ + п = 383+2*57+100 = 597.

$\sum n_i (u_i + 1)^2$ = 597.

Биринчи жана экинчи тартиптеги шарттуу моменттерди табабыз:

$$M_1{}^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{57}{100} = 0{,}57; \quad M_2{}^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{383}{100} = 3{,}83.$$

h = 10,4 – 10,2 = 0,2 болгондуктан, тандалма орто жана дисперсия

$\bar{x}_m = M_1{}^* h + C = 0{,}57 \cdot 0{,}2 + 11{,}0 = 11{,}1;$

$D_t = [M_2{}^* - (M_1{}^*)^2] h^2 = [3{,}83 - (0{,}57)^2] * 0{,}2^2 = 0{,}14$ болот.

§ 5. Баштапкы варианталарды бирдей алыстыктагы варианталарга келтирүү.

Көбөйтүндүлөр ыкмасы менен, бирдей алыстыктагы варианталар боюнча, тандалма мүнөздөмөлөр табылат. Бирок, практика жүзүндө байкоолордун натыйжалары, көпчүлүк учурда бирдей алыстыкта болбогон варианталарды берет.Ошондуктан, алынган ар түрдүү алыстыктагы варианталарды бирдей алыстыктагы варианталарга келтирүүгө болобу деген суроо туулат. Көрсө болот экен. Бул максатта, белгинин байкалган маанилер (баштапкы варианталар) жайгашкан интервал,бир-бирине барабар болгон, бир топ жекече интервалдарга бөлүнөт.

Практикада, ар бир интервалга 8-10 баштапкы варианталар туш келгидей кылып алынат. Ар бир жекече интервалдын ортосун таап, алрады бирдей алыстыктагы варианталар катары кабыл алышат.

Бирдей алыстыктагы жаңы варианталардын жыштыктары, тиешелүү интервалда жаткан баштапкы варианталардын жыштыктарынын суммасына барабар.

Баштапкы варианталарды бирдей алыстыктагы варианталар менен алмаштырганда, жекече интервалдын ортосунун сол жагындагы варианталар чоңойтулуп, оң жагындагылар кичирейтилгендиктен, бирдей алыстыктагы варианталарга өтүүдө каталар кетет. Бирок, бул каталар ар түрдүү,оң же терс белгиде болушкандыктан, негизинен өз ара жоюушуп кетет.

Мисал. Көлөмү п болгон тандалма жыйынды 8-таблицада берилген. Бирдей алыстыктагы варианталардын статистикалык бөлүштүрүүсүн тапкыла.

Т а б л и ц а 8

x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
1,00	1	1,19	2	1,37	6
1,03	3	1,20	4	1,38	2
1,05	6	1,23	4	1,39	1
1,06	4	1,25	8	1,40	2
1,08	2	1,26	4	1,44	3
1,10	4	1,29	4	1,45	3
1,12	3	1,30	6	1,46	2
1,15	6	1,32	4	1,49	4
1,16	5	1,33	5	1,50	2

Чыгаруу. (1,00; 1,50) интервалын беш жекече интервалдарга бөлөлү:

(1; 1,1); (1,1; 1,2); (1,2; 1,3); (1,3; 1,4); (1,4; 1,5).

Алынган интервалдардын ортолорун жаңы бирдей аралыктагы варианталар катары кабыл алабыз: $y_1 = 1,05$; $y_2 = 1,15$; $y_3 = 1,25$; $y_4 = 1,35$; $y_5 = 1,45$.

Жаңы варианталардын жыштыктарын табабыз:

y_1 вариантасынын жыштыгы:

$п_1 = 1 + 3 + 6 + 4 + 2 + 4/2 = 18$. Мында 1,10 вариантасы, бир эле учурда биринчи интервалдын аягы,экинчи интервалдын башы болгондуктан, анын жыштыгы 4 эки интервалга тең бөлүндү.

$у_2$ ваиантасынын жыштыгы:

$$п_2 = 4/2 + 3 + 6 + 5 + 2 + 4/2 = 20.$$

Ушул сыяктуу эле, калган варианттардын жыштыктары: $п_3 = 25$; $п_4 = 22$; $п_5 = 15$ болот. Демек, бирдей алыстыктагы жаңы варианталардын бөлүштүрүүсү:

$у_i$	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45
$п_i$	18	20	25	22	15 .

Баштапкы жана бирдей алыстыктагы варианталардын тандалма ортосу жана тандалма дисперсиясы, тиешелүү түрдө:

$$\bar{x}_m = 1{,}250; \quad \bar{y}_m = 1{,}246;$$

$$D_x = 0{,}018; \quad D_y = 0{,}017$$ болорун

текшерип көрүү сунуш кылынат.Баштапкы варианталарды бирдей алыстыктагы варианталарга алмаштырууда, аз эле ката кетирилери көрүнүп турат. Ошол эле учурда, эсептөөлөр көп эле жөнөкөйлөнүп, азаят.

§6.Эмпирикалык бөлүштүрүүнүн симметриясыздыгы (асимметриясы) жана чектен чыгуусу (эксцесси)

Математикалык статистикада нормалдык бөлүштүрүү көп колдонулат. Эмпирикалык бөлүштүрүүнүн нормалдык бөлүштүрүүдөн кыйшайуусун чамалоо үчүн, симметриясыздык жана чектен чыгуу, түшүнүктөрү колдонулат. Эмпирикалык бөлүштүрүүнүн симметриясыздыгы

$$a_s = m_3 / \sigma_m^3 \qquad (68)$$

барабарсыздыгы менен, чектен чыгуусу

$$e_к = m_4 / \sigma_m^4 - 3 \qquad (69)$$

барабардыгы менен аныкталат. Мында, m_3 жана m_4, тиешелүү түрдө, үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги борбордук эмпирикалык моменттер үчүнчү параграфдагы (65) жана (66) формулалары менен аныкталат, σ_m -тандалма орто квадраттык кыйшайуу m_3 жана m_4

борбордук моменттерди көбөйтүндүлөр ыкмасы менен аныктоо оңтойлуу.

Эмпирикалык бөлүштүрүүнүн симметриясыздык жана чектен чыгуу мүнөздөгүчтөрү, теориялык бөлүштүрүүнүн симметриясыздык (A_s) жана чектен чыгуу ($E_к$) мүнөздөгүчтөрүнүн маанилерининдей эле маанилерге ээ болот. Практика жүзүндө, A_s жана $E_к$, тиешелүү түрдө, a_s жана $e_к$ аркылуу чамаланат.

Нормалдык бөлүштүрүү үчүн, $A_s = 0$ жана $E_к = 0$ болору белгилүү. Демек, эгерде a_s жана $e_к$ канчалык кичине болсо, ошончолук, эмпркалык бөлүштүрүү, нормалдуу бөлүштүрүүгө жакын болот.

Мисал. Эмпирикалык бөлүштүрүү

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

берилген.Симметриясыздыкты жана чектен чыгууну тапкыла.

Чыгаруу. Көбөйтүндүлөр ыкмасын колдонуп, 9-таблицаны толтурабыз.

9 - Т а б л и ц а

1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_iu_i^3$	$n_iu_i^4$	$n_i(u_i+1)^4$
10,2	2	-4	-8	32	-128	512	162
10,4	3	-3	-9	27	-81	243	48
10,6	8	-2	-16	32	-64	128	8
10,8	13	-1	-13	13	-13	13	0
11,0	25	0	0	0	0	0	25
11,2	20	1	20	20	20	20	320
11,4	12	2	24	48	96	192	972
11,6	10	3	30	90	270	810	2560
11,8	6	4	24	96	384	1536	3750
12,0	1	5	5	25	125	625	1296

Ар бир мамычаны кошсок

$n=100, \quad \sum n_iu_i = 57, \quad \sum n_iu_i^2 = 383, \quad \sum n_iu_i^3 = 609,$

$\sum n_iu_i^4 = 4079, \quad \sum n_i(u_i+1)^4 = 9141$ болот.

Текшерүү. $\sum n_i(u_i+1)^4 = \sum n_iu_i^4 + 4\sum n_iu_i^3 + 6\sum n_iu_i^2 + 4\sum n_iu_i + n =$

= 4079+4·609+6·383+4·57+100=9141 болгондугу, эсептөөлөр туура жүргүзүлгөндүгүн ырастайт.

Төртүнчү параграфтагы мисалда $M_1^* = 0{,}57$; $M_2^* = 3{,}83$; $D_т = 0{,}14$, жана ошондуктан, $\sigma_m = \sqrt{0{,}14}$ болору аныкталган. Эми, үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги шарттуу моменттерди табабыз:

$M_3^* = (\sum n_i u_i^3)/п = 609/100 = 6{,}09$; $M_4^* = (\sum n_i u_i^4)/п = 4079/100 = 40{,}79$.

Үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги борбордук эмпирикалык моменттерди табабыз:

$$m_3 = [M_3 * -3M_2 * M_1 * +2(M_1 *)^3]h^3 = [6?09 - 3\cdot 0{,}57\cdot 3{,}83 + 2\cdot(0{,}57)^3]\cdot 0{,}2^3 = -0{,}0007;$$

$$m_4 = [M_4 * -4M_3 * M_1 * +6M_2 * (M_1 *)^2 - 3(M_1 *)^4]h^4 =$$
$$= [40{,}79 - 4\cdot 0{,}57\cdot 6{,}09 + 6(0{,}57)^2\cdot 3{,}83 - 3\cdot(0{,}57)^4]\cdot 0{,}2^4 = 0{,}054.$$

Симметриясыздык менен чектен чыгыш (68) жана (69) формулалары боюнча аныкталат:

$a_s = m_3 / \sigma_m^3 = (-0{,}0007)/(\sqrt{0{,}14})^3 = -0{,}01;$

$e_к = m_4 / \sigma_m^4 - 3 = (0{,}054)/(\sqrt{0{,}14})^4 - 3 = -0{,}24$ болот

МАСЕЛЕЛЕР

1 - 2 маселелерде тандалма варианттар жана алардын жыштыктары берилген. Көбөйтүндүлөр ыкмасын пайдаланып, тандалма ортону жана тандалма дисперсияны тапкыла.

1.

x_i	10,3	10,5	10,7	10,9	11,1	11,3	11,5	11,7	11,9	12,1
$п_i$	4	7	8	10	25	15	12	10	4	5

Жообу. $\bar{x}_t = 11{,}19$; $D_в = 0{,}19$.

2.

x_i	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
$п_i$	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

Жообу. $\bar{x}_t = 90{,}72$; $D_в = 17{,}20$.

3. Эмпирикалык бөлүштүрүүнүн симметриясыздыгын жана чектен чыгуусун тапкыла: .

x_i	10,6	10,8	11	11,2	11,4	11,6	11,8
$п_i$	5	10	17	30	20	12	6.

Жообу. $a_s = -0{,}0006$, $e_k = 0{,}00004$.

О н ү ч ү н ч ү г л а в а

СТАТИСТИКАЛЫК БОЖОМОЛДОРДУ СТАТИСТИКАЛЫК ТЕКШЕРҮҮ

§ 1. Статистикалык божомолдор (гипотезалар) жана алардын түрлөрү

. Практиалык маселелерде, кокус чоңдуктун статистикалык бөлүштүрүүсү эмпирикалык түрдө табылат да, алардын теориялык бөлүштүрүүдөн айырмасы болот. Кокус чоңдуктун статистикалык бөлүштүрүүсү, теориялык бөлүштүрүүлөрдүн математикалык модели болуп эсептелет. Мындай моделдерди тандап алуу жана алардын теориялык бөлүштүрүүгө жакындыгын текшерүү, математикалык статистиканын негизги маселелеринин бири болуп эсептелет. Тандалып алынган математикалык моделдердин негизинде, теориялык бөлүштүрүүлөрдүн түрү жана алардын параметрлери жөнүндө божомолдор (гипотезалар) жасалып, алардын тууралыгын чамалоо маселеси туулат.

Статистикалык божомол (гипотеза) деп, белгисиз бөлүштүрүүнүн түрү жөнүндөгү, белгилүү бөлүштүрүүнүн параметрлери жөнүндөгү, кокус чоңдуктардын катышы жөнүндөгү ж. б. божомолдор аталат.

Статистикалык божомолдор ар түрдүү болушу мүмкүн.

Нөлүнчү (негизги) божомол деп, болжолдонуп кабыл алынган божомол айтылат да, ал H_0 түрүндө белгиленет.

Нөлүнчү божомолго каршы келген H_1 божомолу, атаандаш (альтернативдүү) божомол деп аталат.

Мисалы, эгер нөлүнчү божомол -нормалдуу бөлүштүрүүнүн математикалык күтүүсү $a = 3$ деген божомол болсо, ага атаандаш божомол $a \neq 3$ болот. Ал кыскача H_0: $a = 3$; H_1 : $a \neq 3$ түрүндө жазылат.

Божомолдор жөнөкөй жана татаал деген түрлөргө бөлүнөт: бир гана болжоодон түзүлгөн божомол -жөнөкөй; чектүү же чексиз сандагы жөнөкөй божомолдордон түзүлгөн божомол -татаал деп, аталат.

Практикада көп кездешүүчү божомолдордун эки түрү бар:

1. бөлүштүрүүнүн түрү белгилүү болгон учурда, анын белгисиз параметрлери жөнүндөгү божомолдор;

2. кокус чоңдук (тандалма) белгилүү болгон учурда, анын бөлүштүрүүсүнүн түрү жөнүндөгү божомолдор.

Статистикалык критерий (чен белги) деп, статистикалык божомолду текшерүүгө колдонулуучу Т кокус чоңдугу аталат.

Статистикалык божомолду текшерүүнүн жалпы схемасы төмөндөгүдөй:

1. Негизги H_0 божомолуна каршы келген, альтернативдүү H_1 божомолу аныкталат;

2. Текшерүүнүн маанилүүлүк деңгелин түшүндүрүүчү α -кичине оң саны тандалып алынат. Демейде, α үчүн, 0,01-ден 0,05-ке чейинки сандар кабыл алынат.

3. Нөлүнчү H_0 божомолу аныкталган, кокус чоңдуктун тандалма маанилеринин негизинде, чен белги болуучу кокус чоңдук Т тандалып алынат. Т нын бардык маанилери жана бөлүштүрүүсү, H_0 божомолу туура кабыл алынган деген шартта, тандалманын негизинде толук аныкталат. Тнын, тандалманын негизинде чыгарылган маанилери - байкалган маанилер деп аталат да, $T_б$ аркылуу белгиленет.

4. Сан огунан, $T_б$нын D интервалына тийиштүү болуш ыктымалдыгы

$$P(T_б \in D) = 1 - \alpha \qquad (70)$$

болгондой, D интервалы тандалып алынат.

D интервалы -H_0 божомолун кабыл алуу интервалы деп, сан огунун калган бөлүктөрү кооптуу интервалдар деп аталат.

Кабыл алуу интервалын, кооптуу интервалдардан бөлүп турган чекиттер $t_{кр}$ —кооптуу чекиттер деп, аталат.

Көпчүлүк учурда, D интервалы үчүн $(-\infty,-t_{кр}]$, $[-t_{кр}, t_{кр}]$, $[t_{кр}, \infty)$ интервалдарынын бири кабыл алынат.Бул интервалдардын кайсынысына тийешелүү болгондугуна жараша, текшерилүүчү чен белги (критерий), тийешелүү түрдө, оң жактуу, эки жактуу, же сол жактуу деп аталат. Ал эми, H_0 божомолу кабыл_алынбай турган кооптуу интервалдар, тиешелүү түрдө, $(-t_{кр}, \infty)$,

$(-\infty,-t_{кр})\cup(t_{кр}, \infty)$ жана $(-\infty, t_{кр})$ болот.

5.Текшерилип жаткан теориялык тандалмалар боюнча Т нын бир байкалган мааниси $T_б$ эсептелип табылып, ага карата (70) барабардыгы текшерилет. Эгерде (70) барабардыгы аткарылса, H_0 нөлүнчү божомолу, тажрыйбанын жыйынтыгына шайкеш келет деген мааниде, кабыл алынат. Ал эми (70) барабардыгы аткарылбаса, H_0 божомолу кабыл алынбайт, б.а. H_0 божомолу туура эмес жана бул окуянын ыктымалдыгы туура эмес аныкталган.

H_0 божомолун текшерүүдө, төмөндөгүдөй каталар кетирилиши мүмкүн:

1.биринчи түрдөгү ката - H_0 божомолу туура болсо дагы, кабыл калынбай калат, бул катанын ыктымалдыгы α;

2.экинчи түрдөгү ката - H_0 божомолу туура эмес болсо дагы (альтернативдүү H_1 божомолу туура), кабыл алынып калат.

Экинчи түрдөгү ката кетирүүнүн ыктмалдыгы β болсо, 1 - β саны чен белгинин кубаттуулугу деп аталат. Чен белгинин кубаттуулугу канчалык чоң болсо, экинчи түрдөгү ката кетирүүнүн ыктымалдыгы ошончолук кичине болот. Маанилүүлүктүн тандалып алынган деңгелинде, кооптуулук областы, чен белгинин кубаттуулугу эң чоң болгондой кылып түзүү керек.

H_0 божомолун кабыл алуу обласы чектүү болсо (эки жактуу интервал), (70) формуласы менен аныкталуучу D интервалы менен, P[Ө*-δ<Ө<Ө*-δ]=γ формуласы менен аныкталуучу ишенимдүүлүк интервалынын байланышы бар экенин көрсөтүүгө болот.

§2.Божомолдорду текшерүүнүн статистикалык чен белгилеринин түрлөрү.

Эч кандай чен белги, текшерилип жаткан H_0 божомолунун тууралыгын далилдей албайт. Бирок, маанилүүлүктүн кабыл алынган деңгелинде, H_0 божомолу байкоолордун жыйынтыгы менен дал келерин же дал келбестигин аныктайт. Статистикалык божомолдорду текшерүүдө, көп колдонуучу чен белгилер:

1. χ^2 чен белгиси, же Пирсондун чен белгиси;

2. Стүюденттин чен белгиси;

3. Фишердин чен белгиси;

4. Колмогоровдун чен белгиси.

Чен белги болуучу кокус чоңдук T -ны, жогоруда көрсөтүлгөн чен белгилердин бири боюнча тандап алышат. Пирсондун, Стьюденттин жана Фишердин чен белгилери, алардын бөлүштүрүүлөрүнүн формулалары боюнча (8чи гл., 14 чү, 20 чы, 21 чи параграфтарды кара) табылат.

<u>1 -мисал.</u> Көлөмү п = 366 болгон генералдык жыйындынын эмпирикапык жана теориялык жыштыктары (n_i жана n_i')

n_i	6	13	38	74	106	85	30	14
n_i'	3	14	42	82	99	76	37	13

берилген. Генералдык жыйындынын кадимкидей бөлүштүрүлгөндүгү тууралу H_0 божомолун, мaанилүүлүктүн деңгели 0,005 болгон учурда текшергиле.

<u>Чыгаруу.</u> Чен белгинин байкалуучу маанилери $\chi_{байк}{}^2 = \sum_{i=1}^{s} \left(n_i - n_i'\right)^2 / n_i$ формуласы менен, же ушул эле формуланын жөнөкөйлөтүлгөн түрү

$\chi^2{}_{байк} = \sum_{i=1}^{s} \left(n_i{}^2 / n_i'\right) - n$ формуласы менен эсептелет.

Мында $\mathrm{n} = \sum n_i = \sum n_i' = 366$ тандалманын көлөмү, s = 8 —тандалмалар бөлүнгөн группалардын саны. Акыркы формула боюнча

$$\chi^2{}_{байк} = 36/3 + 169/14 + 1444/42 + 5476/82 + 11236/99 + 7225/76 + 900/37 + 196/13 - $$
$$- 366 = 7{,}19.$$

Эркиндиктин даражасын табабыз: $k = s - 3 = 8 - 3 = 5$

(тандалмалардын группаларынын санынан Пирсондун бөлүштүрүүсүнүн эркиндик даражасы -бир менен кадимки бөлүштүрүүсүнүн эркиндик даражасы -экинин (кадимки бөлүштүрүү эки параметр -математикалык күтүү жана дисперсия менен мүнөздөлөт) суммасын алып таштоо керек). χ^2 бөлүштүрүүсүнүн кооптуу чекиттеринин таблицасы боюнча (4-тиркеме), маанилүүлүктүн $\alpha = 0{,}05$ деңгелин жана эркиндиктин даражасы 5 экенин эске алып χ^2 тын кооптуу мааниси $\chi_к{}^2 = 11{,}1$ болорун аныктайбыз. $\chi^2{}_{байк} < \chi_к{}^2$ болгондуктан, H_0 божомолун кабыл албай коюуга негиз жок. Башкача айтканда, эмпирикалык жана теоретикалык жыштыктар аз эле айырмалангандыктан,генералдык жыйындынын кадимкидей бөлүштүрүлгөндүгү жөнүндөгү божомол, байкалган маанилерге каршы келбейт деген жыйынтык чыгарууга болот.

§3. Кадимки бөлүштүрүүнүн теориялык жыштыктарын эсептөө ыкмалары

§2де көрсөтүлгөндөй, Пирсондун маакулдашуу чен белгисинин мааниси, эмпирикалык жана теориялык жыштыктарды салыштырууда жатат. Эмпирикалык жыштык тажрыйба жүзүндө алынары түшүнүктүү. Генералдык жыйынды кадимкидей бөлүштүрүлгөн болсо, теориялык жыштыктарды кантип табуунун жолу төмөндөгүдөй.

1. Х кокус чоңдугунун көлөмү п болгон статистикалык бөлүштүрүү берилсе, аны § 5те көрсөтүлгөндөй, бирдей алыстыктагы бөлүштүрүүгө келтиришет

x_i^*	x_1^* , x_2^* ,…., x_s^*
n_i^*	n_1^*, n_2^*,…., n_s^* .

Мында, $n_1^* + n_2^* + \ldots + n_s^* = n$, s -группалардын саны.

2. Көбөйтүндүлөр ыкмасы менен $\overline{x^*}$ - тандалма ортону жана σ^*- тандалма орто квадраттык кыйшайууну табышат.

3. Х кокус чоңдугун нормалап, $Z = (X - \overline{x^*})/\sigma^*$ чоңдугуна өтүшүп,

(z_i , z_{i+1}) интервалдарынын четтерин табышат:

$z_i = (x_i - \overline{x^*})/\sigma^*$, , $z_{i+1} = (x_{i+1} - \overline{x^*})/\sigma^*$, мында, Z тин эң кичине мааниси z_1 ди $-\infty$, эң чоң мааниси z_s ти ∞ деп алышат.

4. Х тин (x_i , x_{i+1}) интервалына тийиштүү болуш p_i ыктымалдыгын, $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ формуласы боюнча ($\Phi(z)$ – Лапластын функциясы) таап, андан кийин изделип жаткан теориялык жыштыкты $n_i' = n\, p_i$ табышат.

2-мисал. Кокус чоңдуктун байкалган x_1 , x_2 ,…., x_n үчүн, математикалык күтүү $a = a_0$ деген H_0 нөлүнчү (негизги) божомолду, альтернативдүү H_1 божомолу эки жактуу ($a \neq a_0$) болгон учурда, текшерүү талап кылынсын. Маанилүүлүктүн деңгели α берилген деп эсептелет.

Чыгаруу. H_0 негизги божомолду текшерүү үчүн, Т = $(\bar{x}-a_0)\sqrt{n/\bar{\sigma}}$ формуласы боюнча аныкталуучу кокус чоңдукту кабыл алабыз, мында $\bar{\sigma}$ -орто квадраттык кыйшайуунун чамалоосу. Т чоңдугу, эркиндик даражасы (п - 1) болгон Стьюденттин бөлүштүрүүсү боюнча бөлүштүрүлгөн. Стьюденттин бөлүштүрүүсүнүн таблицасы боюнча (төртүнчү тиркеме), эркиндиктин берилген п даражасын эске алып,

$P(|T(n-1)|<t_p)=p=1-\alpha$ ишеним интервалын аныктоочу, кооптуу чекит $t_{1-\alpha,n-1}=t_p$ ны табабыз. Анда, кооптуу интервал $|T(n-1)|>t_p$ барабарсыздыгы менен аныкталат. Эгерде

$$\left(|(\bar{x}-a_0)\sqrt{n/\bar{\sigma}}\ |<t_p\right) \text{ же } a_0\in\left(\bar{x}-t_p\sqrt{\bar{\sigma}/n}\,,\bar{x}+t_p\sqrt{\bar{\sigma}/n}\right) \qquad (71)$$

болсо, маанилүүлүктүн α деңгелинде, H_0 божомолу кабыл алынат (четке кагылбайт). Ал эми, ишенимдүүлүктүн (71) интервалы a_0 дү р ишеними менен камтыбаса, H_0 божомолу кабыл алынбайт (четке кагылат).

МАСЕЛЕЛЕР.

1. Х жана У генералдык жыйындыларынан алынган, көлөмдөрү п жана m болгон көз каранды эмес эки тандалма боюнча, $\bar{x}$ *жана* $\bar{y}$ тандалма ортолору табылган. D(X) жана D(У) генералдык дисперсиялары белгилүү. Эгерде:

а) п = 30, m = 20, D(X) = 120, D(У) = 100, маанилүүлүктүн деңгели $\sigma=0{,}005$;

б) п = 50, m = 40, D(X) = 50, D(У) = 120, маанилүүлүктүн деңгели $\sigma=0{,}01$ болсо,

математикалык күтүүлөрдүн барабардыгы M(X) = M(У) жөнүндөгү H_0 нөлүнчү божомолду, атаандаш божомол H_1: M(X) ≠ M(У) болгон учурда текшергиле.

Жообу. а) $Z_{байк}=1$, $Z_к=1{,}96$. Нөлүнчү божомолду кабыл албоого негиз жок; б) $Z_{байк}=10$, $Z_к=2{,}58$. Нөлүнчү гипотеза кабыл алынбайт.

2. Нормалдуу бөлүштүрүлгөн генералдык жыйындыдан, көлөмү п = 16 болгон тандалма алынып, анын тандалма ортосу $\bar{x}=12{,}4$ жана "оңдолгон" орто квадраттык кыйшайуусу s = 1,2 болору табылган. Маанилүүлүктүн деңгели 0,05 болгон учурда, атаандаш

божомол H_1 : а $\neq 11,8$ деп эсептеп, математикалык күтүү а = 11,8 болот деген H_0 нөлүнчү божомолду текшергиле.

Жообу. $T_{байк} = 2$, $t_k(0,05; 15) = 2,13$. Нөлүнчү божомолду кабыл албай коюга негиз жок.

3. Кадимкидей бөлүштүрүлгөн Х жана У генералдык жыйындыларынан, көлөмдөрү, тиешелүү түрдө, $n = 5$ жана $m = 6$ болгон, эки көз каранды эмес тандалмалар алынган. Алардын тандалма ортолору $\bar{x} = 15,9$, $\bar{y} = 14,1$ жана оңдолгон тандалма дисперсиялары $s_x^2 = 14,76$, $s_y^2 = 4,92$. Маанилүүлүктүн деңгели 0,05 болгон учурда, атаандаш божомол H_1: M(X) $\neq$ M(У) деп эсептеп, математикалык күтүүлөр барабар болот M(X) = M(У) деген H_0 нөлүнчү божомолду текшергиле.

Көрсөтмө. Алдын ала дисперсияларды салыштыргыла.

Жообу.$T_{байк} = 0,88$, $t_k(0,05;\ 9) = 2,26$. Нөлүнчү божомолду кабыл албай коюуга негиз жок.

Студенттердин билимин текшерүүгө арналган текшерүү иштин (тесттин) тапшырмалары.

Текшерүү ишти (тестти) өткөрүүгө 15 варианттан турган маселелер сунуш кылынды. Ар бир вариантка ондон эсеп киргизилди. Ар бир маселеге бештен же төрттөн жоол жазылды. Ал жооптордун бирөө гана туура. Туура жооптор таблица түрүндө тапшырмалардын аягында берилди. Варианттардагы маселелерди экиге бөлүп, текшерүү ишти кокус окуялар теориясы боюнча (1-5 маселелер) жана кокус окуялар менен математикалык статистиканын элементтери боюнча (6-10 маселелер) өз алдынча жүргүзсө да болот. Студенттердин калдык билимин текшерүү үчүн ар бир варианттагы 10 маселенин ичинен төрт-бештен маслени тандап алуу сунуш кылынат. Мисал катары биз сунуш кылган маселелер варианттары боюнча тестин аягында берилди.

1-вариант

1.Кутуда 1 ден 20 га чейин номерленген 20 чүкө бар. Чүкөлөр аябай аралаштырылган.Көрбөй туруп кутудан бир чүкө алынды. Алынган чүкөнүн номери 3 кө бөлүнүүчү сан болуунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,4; 2. 0,2; 3. 0,3; 4. 0,5; 5. 0,1.

2.Бардык грандары боелгон куб бирдей өлчөмдөгү 1000 кичине кубдарга таарылып бөлүнгөн жана алар аябай аралаштырылган. Көрбөй туруп алынган бир кубдун бир граны боелгон болуу ыктмалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,385; 2. 0,384; 3. 0,386; 4. 0,382; 5. 0,378.

3. Лотереяга чыгарылган 1000 билеттин 500 ү утуштуу. Сатып алынган эки билеттин экөө тең утуштуу болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,2915; 2. 0,2832; 3. 0,2262; 4. 0,2685; 5. 0,2497.

4. Группадагы 12 студенттин 8 и отличниктер. Болжоосуз тандалып алынган 9 студенттин бешөө отличник болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,267; 2. 0,243; 3. 0,255; 4. 0,235; 5. 0,248.

5. А окуясынын ар бир сыноодогу аткарылуу ыктымалдыгы 0,1 болгон, көз каранды эмес 8 сыноо жүргүзүлгөн. А окуясынын жок дегенде эки жолу аткарылыш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,16; 2. 0,19; 3. 0,21; 4. 0,25. 5. 0,27.

6. Ар бир сыноодо А окуясы 0,9 ыктымалдыгы менен аткарылса, көз каранды эмес эки сыноодо А окуясынын аткарылыш санынын бөлүштүрүү законун тапкыла.

Жообу: 1.

0	1	2
0,1;	0,18;	0,72;

2.

0	1	2
0,01	0,18	0,81

3.

0	1	2
0,2	0,2	0,6

4.

0	1	2
0,03	0,15	0,82

7. Бирдей бөлүштүрүлгөн көз каранды эмес 16 кокус чоңдуктун ар биринин квадаттык орто кыйшайуусу 10. Бул чоңдуктардын арифметикалык орто чоңдугунун квадраттык орто кыйшайуусун тапкыла.

Жообу: 1.1,5; 2. 1,9; 3. 2,5; 4. 3,2. 5. 3,6.

8. Кокус чоңдуктардын бөлүштүрүү закондору берилген:

X	2	3	4
p	0,4	0,5	0,1

У	3	1	6
q	0,3	0,5	0,2

X-4У кокус чодугунун дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 1. 59,13; 2. 59,44; 3. 59,67; 4. 59,36; 5. 61,29.

9. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{эгер } x < a - l,\ x > a + l \text{ болсо}, \\ \dfrac{1}{2l}, & \text{эгер } a - l \le x \le a + l \text{ болсо}. \end{cases}$$

X тин дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 1. l^2 ; 2. l^2/3; 3. l^2/2; 4. l^2/4 5 l^2/5.

10. Көлөмү п = 10 болгон тандалманын статистикалык бөлүштүрүүсү берилген:

x_i	102	104	108
ni	2	3	5

Шарттуу варианталарга өтүү аркылуу тандалма дисперсияны тапкыла.

Жообу: 1. 6,21; 2. 6,24; 3. 6,32; 4. 6,53; 5. 6,72.

2-вариант

1.Ящикте 1 ден 100 гө чейинки номерлүү жетондор бар. Ящиктен болжоосуз алынган бир жетондун номеринде 5 цифрасы жок болушунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,73; 2. 0,95; 3. 0,62; 4. 0,89; 5. 0,85.

2. Группадагы 12 студенттин 8 и отличниктер. Болжоосуз тандалып алынган 8 студенттин төртөө отличник болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,26; 2. 0,23; 3. 0,21; 4. 0,14; 5. 0,24.

3. Мылтык менен бута атканда, ага тийүүнүн салыштырма жыштыгы 0,85 болду. Эгерде 140 жолу бута атылса, анын канчасы бутага тийди?

Жообу: 1. 117; 2. 119; 3.121; 4. 125; 5. 105.

4. А окуясынын ар бир сыноодогу аткарылуу ыктымалдыгы 0,2 болгон,көз каранды эмес 8 сыноо жүргүзүлгөн. А окуясынын жок дегенде эки жолу аткарылыш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,495; 2. 0,494; 3. 0,496; 4. 0,502; 5. 0,516.

5. Биринчи кутуда 20 тетик бар, анын 15-и стандарттуу; экинчи кутуда 30 тетик бар, 24-ү стандарттуу ; үчүнчү кутудагы 10 тетиктин алтоо стандарттуу. Кокустан алынган кутудан,көрбөй туруп алынган тетиктин стандарттуулук ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,76; 2. 0,93; 3. 0,65; 4. 0,81; 5. 0,72.

6.Кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери 2; 5; 8. Биринчи эки маанинин ыктымалдыктары 0,5; 0,1. Кокус чоңдуктун үчүнчү маанисинин ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,1; 2. 0,4; 3. 0,17; 4. 0,25; 5. 0,28.

7.Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү тыгыздыгы берилген:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{эгер } x \le 0 \text{ же } x > \pi \\ \sin(x/2) & \text{эгер } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Кокус чоңдуктун $(0, \pi/4)$ интервалында жаткан маанилерге ээ болу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$; 2. $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; 3. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; 4. $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

8. Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун бөлүштүрүү тыгыздыгы берилген:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{эгер } x \le 0 \text{ же } x > \pi/2 \\ \cos x & \text{эгер } 0 < x \le \pi/2 \end{cases}$$

Бул кокус чоңдуктун математикалык күтүүсүн тапкыла.
Жообу: 1. 0,4π; 2. 2+$\pi/2$; 3. 1+$\pi/2$; 4. 2π; 5. $2\pi/3$.
9. Көлөмү $n = 10$ болгон тандалманын статистикалык бөлүштүрүүсү берилген:

x_i	102	104	108
ni	2	3	5

Шарттуу варианталарга өтүү аркылуу генералдык дисперсиянын жылышпаган чамалоосун тапкыла.
Жообу: 1. 6,8,5; 2. 6,89; 3. 6,93; 4. 6,98; 5. 7,12.
10. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы

$$F(x)=\begin{cases} 0 & эгер \quad x \le -1 \\ 3(x+1)/4 & эгер \quad -1 < x \le 1/3 \\ 1 & эгер \quad x > 1/3 \end{cases}$$

Сыноонун натыйжасында Хтин маанилери]0;1/3[интервалында жатуу ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 1/3; 2. 2/3; 3. 1/4; 4. 3/4; 5. 2/5.

3-вариант

1. Яшикте 60 окшош тетик бар, анын ону сырдалган.Болжоосуз эле бир тетик алынган. Анын сырдалган тетик болуш ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,17; 2. 0,19; 3. 0,35; 4. 0,14; 5. 0,27.
2. Ящикте 1 ден 100 гө чейинки номерлүү жетондор бар.Ящиктен болжоосуз алынган бир жетондун номеринде үчкө бөлүнгөн сандар жок болушунун ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,73; 2. 0,67; 3. 0,62; 4. 0,89; 5. 0,85.
3.Бардык грандары боелгон куб бирдей өлчөмдөгү 1000 кичине кубдарга таарылып бөлүнгөн жана алар аябай аралаштырылган. Көрбөй туруп алынган бир кубдун үч граны боелгон болуу ыктмалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,038; 2. 0,014; 3. 0,006; 4. 0,008; 5. 0,023.
4.Биринчи кутудагы 10 чүкөнүн бешөө , экинчи кутудагы 20 чүкөнүн тогузу жана үчүнчү кутудагы 15 чүкөнүн жетөө оң чүкөлөр. Кокустан алынган кутудан, көрбөй туруп алынган чүкөнүн оң чүкө болуш ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,51; 2. 0,54; 3. 0,43; 4. 0,47; 5. 0,56.

5. Группадагы 10 студенттин 6 и отличниктер. Болжоосуз тандалып алынган 4 студенттин үчөө отличник болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,32; 2. 0,36; 3. 0,38; 4. 0,41; 5. 0,48.

6. Ар бир сыноодо А окуясы 0,7 ыктымалдыгы менен аткарылса, көз каранды эмес эки сыноодо А окуясынын аткарылыш санынын бөлүштүрүү законун тапкыла.

Жообу: 1.

0	1	2
0,19;	0,42;	0,39;

2.

0	1	2
0,21	0,47	0,32

3.

0	1	2
0,25	0,45	0,30

4.

0	1	2
0,09	0,42	0,49

7. Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү закону берилген:

X	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4

Бул чоңдуктун квадраттык орто кыйшайуусун тапкыла.

Жообу: 1. 1,8; 2. 2,2; 3. 2,5; 4. 2,9; 5. 3,8.

8. Кокус чоңдуктардын бөлүштүрүү закондору берилген:

X	1	3	4
p	0,4	0,5	0,1

У	2	3	5
q	0,2	0,3	0,5

XУ кокус чодугунун математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 1. 8,13; 2. 8,36; 3. 8,56; 4. 8,74; 5. 8,92.

9. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{эгер} \quad x \le -1 \\ 3(x+1)/4 & \text{эгер} \quad -1 < x \le 1 \\ 1 & \text{эгер} \quad x > 1 \end{cases}$$

Сыноонун натыйжасында Xтин маанилери]0;1[интервалында жатуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 3/4; 2. 1/3; 3. 1/4; 4. 2/3; 5. 2/5.

10. Көлөмү $n = 51$ болгон тандалмадан,генералдык дисперсиянын жылышкан чамалоосу 5 болору табылган. Генералдык дисперсиянын жылышпаган чамалоосун тапкыла.

Жообу: 1. 5,8; 2. 5,3; 3. 5,5; 4. 4,9; 5. 5,1.

4-вариант

1.Кутуда 1 ден 20 га чейин номерленген 20 чүкө бар. Чүкөлөр аябай аралаштырылган.Көрбөй туруп кутудан бир чүкө алынды. Алынган чүкөнүн номери 2 кө бөлүнүүчү сан болуунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,6; 2. 0,2; 3. 0,3; 4. 0,5; 5. 0,4.

2. Кутудагы 20 чүкөнүн ичинде,көлөмү чүкөлөрдүкү менен бирдей бир сака бар.

Болжоосуз алынган 3 чүкөнүн ичинде сака да болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,20; 2. 0,26; 3. 0,25; 4. 0,30; 5. 0,32.

3. Группадагы 25 студенттин төртөө контролдук иштен беш, тогузу төрт, сегизи үч, калганы 2 алышты. Болжоосуз доскеге чыгарылган эки студенттин бирөө 5 экинчиси 4 алган студенттер болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,23; 2. 0,32; 3. 0,12; 4. 0,43; 5. 0,51.

4.Бир жолу атканда аткычтын бутага тийгизүү ыктымалдыгы 0,9. Аткыч үч жолу атты. Үчөө тең бутага тийиштин ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,721; 2. 0,725; 3. 0,729; 4. 0,732; 5. 0,738.

5. Тыйын алты жолу ташталганда экиден аз жолу герб түшүүнүн ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,11; 2. 0,15; 3. 0,17; 4. 0,19; 5. 0,23.

6.Кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери 2; 5; 8. Биринчи эки маанинин ыктымалдыктары 0,6; 0,1. Кокус чоңдуктун үчүнчү маанисинин ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,3; 2. 0,4; 3. 0,2; 4. 0,5; 5. 0,7.

7. Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү закону

X	5;	3;	7;	У	3	6	1
P	0,1;	0,7;	0,2	q	0,4	0,3	0,3

2X + У кокус чоңдугунун математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 1. 9,4; 2. 10,3; 3. 10,6; 4. 11,3; 5. 12,1.

8. Көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \textit{эгер } x \le 0 \\ 10e^{-10x} & \textit{эгер } \; 0 < x \end{cases}$$. Анын дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 1. 0,05; 2. 0,01 3. 0,03; 4. 0,07; 5. 0,.09

9. Эки өлчөмдүү (X,У) кокус чоңдугунун

бөлүштүрүү закону:

Y	X		
	2	6	8
1	0,1	0,07	0,2
2	0,08	0,12	0,16
3	0,14	0,06	0,07

(Х,У) тин Х түзүүчүсүнүн У = 3 болгондогу шарттуу бөлүштүрүү законун тапкыла.

Жообу: 1. 2 6 8 2. 2 6 8
0,21; 0,13; 0,66; . 0,14 0,21 0,65
3. 2 6 8 2. 2 6 8
0,52; 0,22; 0,26; . 0,27 0,18 0,55

10. Бир өлчөгүч аркылуу төрт жолу системалуу ката кетирилбей өлчөнүп, белгилүү бир физикалык чоңдуктун маанилери 8, 9, 11, 12 табылган. Өлчөөнүн жыйынтыктарынын тандалма ортосун тапкыла.

Жообу: 1. 11; 2. 10; 3. 12; 4. 13; 5. 15.

5-вариант

1. Ящикте 70 окшош тетик бар, анын жетөө сырдалган.Болжоосуз эле бир тетик алынган. Анын сырдалган тетик болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,10; 2. 0,19; 3. 0,23; 4. 0,22; 5. 0,25.

2. Лотереяга чыгарылган 1000 билеттин 500-ү утуштуу. Сатып алынган эки билеттин бирөө гана утуштуу болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,29; 2. 0,38; 3. 0,42; 4. 0,68; 5. 0,50.

3.Кутудагы 30 чүкөнүн 12-си кызыл түскө боелгон чүкөлөр. Болжоосуз алынган бир чүкөнүн кызыл түстөгү чүкө болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,6; 2. 0,4; 3. 0,3; 4. 0,7; 5. 0,1.

4. Группадагы 12 студенттин 6 и отличниктер. Болжоосуз тандалып алынган 6 студенттин төртөө отличник болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,26; 2. 0,24; 3. 0,27; 4. 0,31; 5. 0,34.

5. Ар бир сыноодо А окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы 0,7. Көз каранды эмес алты сыноо жүргүзүлгөн. А окуясынын 4 жолу аткарылыш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,28; 2. 0,30; 3. 0,32; 4. 0,38; 5. 0,41

6.Кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери 2; 5; 8. Биринчи эки маанинин ыктымалдыктары 0,6; 0,3. Кокус чоңдуктун үчүнчү маанисинин ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,4; 2. 0,2; 3. 0,3; 4. 0,1;   5. 0,6.

7. Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү закону

X	-2	3	6	7
p	0.1	0,2	0.3	0,4

2X+3 чоңдугунун математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 1. 13;   2. 13,5;   3.   14;   4. 14,5;   5.   15.

Жообу: 1.   4,8;   2. 5,2;   3. 5,6;   4. 5,9;   5. 6,3.

8.Кокус чоңдуктардын бөлүштүрүү закондору

X	2	1	3
P	0,4	0,5	0,1

У	3	4	6
q	0,3	0,5	0,2

берилген.

3X - 4У   чоңдугунун дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 1.   23,3;   2. 21,4;   3. 24,8;   4. 25,2;   5. 25,7

9. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы

$$F(x)=\begin{cases} 0 & эгер \quad x \le 2 \\ 0{,}5x & эгер \quad 2 < x \le 4 \\ 1 & эгер \quad x > 4 \end{cases}$$

Сыноонун натыйжасында Xтин маанилери]3;4[интервалында жатуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,8; 2. 0,5; 3. 0,9; 4. 0,4;   5. 0,7

10. Генералдык жыйындыдан, көлөмү n=50 болгон тандалма алынган:

x_i	2	5	7	10
n_i	9	11	18	12.

Тандалма ортону тапкыла.

Жообу: 1. 7,13; 2. 6,95 3. 6,53; 4. 6,38;   5. 6,73.

6-вариант

1. Кутуда 5 кызыл, 3 көк, 2 сары чүкө бар. Көрбөй турул алынган бир чүкөнүн кызыл чүкө болуп калыш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,50; 2. 0,48; 3. 0,30; 4. 0,46;   5. 0,53.

2. Тыйын эки жолу чимирип ташталган. Экөөндө тең герб түшүүнүн ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,15; 2. 0,25; 3. 0,35; 4. 0,45;   5. 0,55.

3.Биринчи аткычтын бутага тийгизүү ыктымалдыгы 0,7, экинчисиники 0,9. эки аткыч тең бутага бирден ок чыгарышты.Бутага эки октун бири гана тийиш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,34; 2. 0,38; 3. 0,42; 4. 0,44;   5.0,46.

4. Ящиктеги он тетиктин экөө стандарттуу эмес. Кокустан алынган 6 тетиктин ичинде бирден ашык эмес стандартсыз тетик болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 1/3; 2. 2/3; 3. 1/4; 4. 3/4; 5. 1/2.

5. 30 жолу атылган октун 26сы бутага тийген. Бутага тийген октордун салыштырма жыштыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,65; 2. 0,76; 3. 0,87; 4. 0,91; 5.0,95

6.Кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери 2; 5; 8. Биринчи эки маанинин ыктымалдыктары 0,5; 0,2. Кокус чоңдуктун үчүнчү маанисинин ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,4; 2. 0,3; 3. 0,2; 4. 0,5; 5. 0,8.

7. Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү закону

X	3;	5;	2;
P	0,1;	0,6;	0,3 .

4X - 3 кокус чоңдугунун математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 1. 12,2; 2. 12,4; 3. 12,6; 4. 12,9; 5. 13,4.

8. Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)}, & x \geq 0 \end{cases}$$

болсо, анын бөлүштүрүү функциясын тапкыла.

Жообу: 1. $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{(1+x^2)}, & x \geq 0 \end{cases}$. 2. $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{1+x^2}{x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$.

3. $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2+2}{x^2+1}, & x \geq 0 \end{cases}$. 4. $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{3x+5}{x^2+1}, & x \geq 0 \end{cases}$.

9. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \textit{эгер } x < -1,\ x > 0 \quad \textit{болсо}, \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \textit{эгер } -1 < x < 1 \ \textit{болсо}. \end{cases}$$

X тин математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 1. 0,5; 2. 1; 3. 0; 4. 2; 5.2,5.

10. Бир эле өлчөгүч аркылуу төрт жолу системалык ката кетирилбей өлчөнүп, кандайдыр бир физикалык чоңдуктун маанилери 8; 9; 11; 12 алынган. Өлчөгүчтүн каталарынын тандалма дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 1. 3,5; 2. 3,1; 3. 2,2; 4. 2,5; 5. 3,9.

7-вариант

1. Кутуда 5 кызыл, 3 көк, 2 сары чүкө бар.Көрбөй турул алынган бир чүкөнүн көк чүкө болуп калыш ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,35; 2. 0,33; 3. 0,31; 4. 0,30; 5. 0,28.
2. Тыйын эки жолу чимирип ташталган. Герб бир гана жолу түшүүнүн ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,3; 2. 0,5; 3. 0,4; 4. 0,6; 5. 0,7.
3.Биринчи ящикте 1ден 5ке чейин номерленген, экинчи ящикте 6дан 10го чейин номерленген шарлар бар. Ар бир ящиктен бирден алынган шарлардын номерлеринин суммасы 11ден кем эмес болуш ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,4; 2. 0,5; 3. 0,4; 4. 0,7; 5.0,6.
4. Ящиктеги он тетиктин экөө стандарттуу эмес. Кокустан алынган 6 тетиктин ичинде эки стандартсыз тетик болуш ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 2/3; 2. 1/3; 3. 1/5; 4. 3/5; 5. 2/5.
5.Биринчи мешоктогу 12 шардын бешөө кызыл, экинчи мешоктогу 15 шардын алтоо кызыл. Ар бир мешоктон көрбөй туруп бирден шар алып, ал экөөнөн кайра бир шар кокустан тандалып алынган. Алынган шар кызыл шар болуу ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,41; 2. 0,46; 3. 0,59; 4. 0,55; 5.0,39.
6. Ар бир сыноодо A окуясы 0,7 ыктымалдыгы менен аткарылса, көз каранды эмес үч сыноодо A окуясынын аткарылыш санынын бөлүштүрүү законун тапкыла.
Жообу: 1. 0 1 2 3 2. 0 1 2 3
0,027; 0,189; 0,441; 0,343. 0,027 0,289 0,341 0,343
3. 0 1 2 3 4. 0 1 2 3
0,017 0,199 0,421 0,363 0,057 0,299 0,371 0,273
7. Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ эгер } x \le -\frac{\pi}{2} \text{ же } x > \frac{\pi}{2} \\ a\cos\varphi \text{ эгер } -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

а коеффицентин тапкыла.
Жообу: 1. 1/2; 2. 2/3; 3. 1/4; 4. 3/5; 5. 2/5.

8. Кокус чоңдуктардын бөлүштүрүү закондору берилген:

Х	2	3	4	У	3	1	6
p	0,4	0,5	0,1	q	0,3	0,5	0,2

3Х+7У кокус чодугунун математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 1. 27,68; 2. 27,75; 3. 27,95; 4. 28,15; 5. 28,43

9. Эки өлчөмдүү (Х,У) кокус чоңдугунун бөлүштүрүү закону:

Y	X		
	2	6	8
1	0,1	0,07	0,2
2	0,08	0,12	0,16
3	0,14	0,06	0,07

(Х,У) тин У түзүүчүсүнүн бөлүштүрүүчү законун тапкыла.

Жообу: 1. 1 2 3; 0,32; 0,39; 0,29; . 2. 1 2 3; 0,37 0,36 0,27

3. 1 2 3; 0,34; 0,41; 0,25; . 4. 1 2 3; 0,35 0,37 0,28

10. Көлөмү п = 20 болгон тандалманын статистикалык бөлүштүрүүсү берилген:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
ni	2	3	10	4	1

Шарттуу варианталарга өтүү аркылуу тандалма ортону тапкыла.

Жообу: 1. 2618; 2. 2775; 3. 2625; 4. 2621; 5. 2627.

8-вариант

1. Ящикте 7 жашыл , 3 кызыл, 10 күрөң шар бар.Көрбөй турул алынган бир шардын күрөң же жашыл шар болуп калыш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,75; 2. 0,70; 3. 0,80; 4. 0,85; 5. 0,90

2.Биринчи ящикте 1ден 5ке чейин номерленген, экинчи ящикте 6дан 10го чейин номерленген шарлар бар. Ар бир ящиктен бирден алынган шарлардын номерлеринин суммасы 10дон кем эмес болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,45; 2. 0,57; 3. 0,68; 4. 0,71; 5.0,76.

3. Кутудагы 12 чүкөнүн беши оң чүкө. Көрбөй туруп алынган 4 чүкөнүн бири оң чүкө болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,12; 2. 0,18; 3. 0,20; 4. 0,22; 5.0,26.

4. Эгер ар бир сыноодо окуянын аткарылуу ыктмалдыгы 0,2 болсо, 6 сыноодо окуянын 3 жолу аткарылыш ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,02; 2. 0,06; 3. 0,08; 4. 0,12; 5.0,18.
5.Биринчи мешоктогу 12 шардын бешөө кызыл, экинчи мешоктогу 15 шардын сегизи кызыл. Ар бир мешоктон көрбөй туруп бирден шар алып, ал экөөнөн кайра бир шар кокустан тандалып алынган. Алынган шар кызыл шар болуу ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,455; 2. 0,460; 3. 0,465; 4. 0,475; 5.0,485.
6. Ар бир сыноодо A окуясы 0,6 ыктымалдыгы менен аткарылса, көз каранды эмес үч сыноодо A окуясынын аткарылыш санынын бөлүштүрүү законун тапкыла.
Жооб: 1.

0	1	2	3
0,064;	0,268;	0,452;	0,216.

2.

0	1	2	3
0,064	0,288	0,432	0,216

3.

0	1	2	3
0,084	0,248	0,457	0,221

4.

0	1	2	3
0,164	0,332	0,328	0,176

7. Бирдей бөлүштүрүлгөн көз каранды эмес 16 кокус чоңдуктун ар биринин квадраттык орто кыйшайуусу (четтөөсү) 6. Бул чоңдуктардын арифметикалык орто чоңдугунун квадраттык орто кыйшайуусун тапкыла.
Жообу: 1. 2,5; 2. 1,5; 3. 3,7; 4. 4,3; 5.5,3
. 8. Кокус чоңдуктардын бөлүштүрүү закондору берилген:

X	2	3	4
p	0,4	0,5	0,1

У	3	1	6
q	0,3	0,5	0,2

6X-2У кокус чодугунун дисперсиясын тапкыла.
Жообу: 1. 46,6; 2. 46,3; 3. 46,5; 4. 46,9; 5. 47,2.

9. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{эгер } x < -1 \,,\, x > 0 \quad \text{болсо,} \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{эгер } -1 < x < 1 \text{ болсо.} \end{cases}$$

X тин дисперсиясын тапкыла.
Жообу: 1. 1,2; 2. 0,5; 3. 1,5; 4. 2,1 5 2,8.
10. Бир эле өлчөгүч аркылуу төрт жолу системалык ката кетирилбей өлчөнүп, кандайдыр бир физикалык чоңдуктун маанилери 10; 11;

14;   15 алынган. Өлчөгүчтүн каталарынын тандалма ортосун тапкыла.

Жообу: 1.1 3,0; 2. 12,5; 3. 11,0,2; 4. 11,5;   5.1 3,4.

9-вариант

1. Ящикте 50 окшош тетик бар, анын бешөө сырдалган. Болжоосуз эле бир тетик алынган. Анын сырдалган тетик болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,3; 2. 0,4. 3. 0,2; 4. 0,6; 5. 0,1.

2. Мылтык менен бута атканда, ага тийүүнүн салыштырма жыштыгы 0,8 болду. Эгерде 90 жолу бута атылса, анын канчасы бутага тийди?

Жообу: 1. 72; 2. 74; 3.73; 4. 77; 5. 75.

3. Группадагы 25 студенттин төртөө контролдук иштен беш, тогузу төрт, сегизи үч, калганы 2 алышты. Болжоосуз доскеге чыгарылган эки студенттин экөө тең 2 алган студенттер болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,03; 2. 0,025; 3. 0,02; 4. 0,04; 5. 0,05.

4. Кутудагы 20 чүкөнүн ичинде,көлөмү чүкөлөрдүкү менен бирдей бир сака бар.

Болжоосуз алынган 5 чүкөнүн ичинде сака да болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,2; 2. 0,22; 3. 0,25; 4. 0,27; 5. 0,29.

5. Цехтеги 5 мотордун ар биринин,убакыттын белгилүү бир учурунда иштеп жатыш ыктымалдыгы 0,8. Берилген учурда 4 мотор иштеп туруу ыктымалдыгын
тапкыла.

Жообу: 1. 0,38; 2. 0,39; 3. 0,40; 4. 0,41; 5. 0,42.

6.Кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери 2; 5; 8. Биринчи эки маанинин ыктымалдыктары 0,5; 0,3. Кокус чоңдуктун үчүнчү маанисинин ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,4; 2. 0,7; 3. 0,2; 4. 0,5;   5. 0,6.

7.Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү тыгыздыгы берилген:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{эгер } x \le 0 \textit{ же } x > \pi \\ \sin(x/2) & \textit{эгер } \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Бөлүштүрүү функцсиясын тапкыла.

Жообу: 1. F(x)=$\begin{cases} 0 & эгер \quad x \le 0 \\ (cosx-1)/2 & эгер \quad 0 < x \le \pi \\ 1 & эгер \quad x > \pi \end{cases}$

2.F(x)=$\begin{cases} 0 & эгер \quad x \le 0 \\ (1-cosx)/2 & эгер \quad 0 < x \le \pi \\ 1 & эгер \quad x > \pi \end{cases}$

3.F(x)= $\begin{cases} 0 & эгер \quad x \le 0 \\ (1+cosx)/2 & эгер \quad 0 < x \le \pi \\ 1 & эгер \quad x > \pi \end{cases}$

4.F(x)=$\begin{cases} 0 & эгер \quad x \le 0 \\ (1+cos2x)/2 & эгер \quad 0 < x \le \pi \\ 1 & эгер \quad x > \pi \end{cases}$.

8. Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x < 0 \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)}, & x \ge 0 \end{cases}$$ болсо, анын

математикалык күтүүсүн тапкыла.
Жообу: 1. $\pi/3$; 2. $\pi/4$; 3. $\pi/2$; 4. $\pi/6$; 5. π.

9. Эки өлчөмдүү (Х,У) кокус чоңдугунун
бөлүштүрүү закону:

Y	X		
	2	6	8
1	0,1	0,07	0,2
2	0,08	0,12	0,16
3	0,14	0,06	0,07

(Х,У) тин Х түзүүчүсүнүн бөлүштүрүү
законун тапкыла.

Жообу:

1.
2	6	8
0,31	0,53	0,25

2.
2	6	8
0,41	0,36	0,23

3.
2	6	8
0,21	0,42	0,37

4.
2	6	8
0,32	0,25	0,43

10. Көлөмү $n = 20$ болгон тандалманын статистикалык бөлүштүрүүсү берилген:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
ni	2	3	10	4	1

Шарттуу варианталарга өтүү аркылуу тандалма дисперсияны тапкыла.

Жообу: 1. 919; 2. 918; 3. 922; 4.927; 5. 932.

10-вариант

1.Бардык грандары боелгон куб бирдей өлчөмдөгү 1000 кичине кубдарга таарылып бөлүнгөн жана алар аябай аралаштырылган. Көрбөй туруп алынган бир кубдун эки граны боелгон болуу ыктмалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,098; 2. 0,095; 3. 0,096; 4. 0,082; 5. 0,078.

2.Кутуда 1 ден 20 га чейин номерленген 20 чүкө бар. Чүкөлөр аябай аралаштырылган.Көрбөй туруп кутудан бир чүкө алынды. Алынган чүкөнүн номери 4 кө бөлүнүүчү сан болуунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,74; 2. 0,25; 3. 0,33; 4. 0,45; 5. 0,2.

3.Кутудагы 30 чүкөнүн тогузу кызыл түскө боелгон чүкөлөр. Болжоосуз алынган бир чүкөнүн кызыл түстөгү чүкө болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,5; 2. 0,4; 3. 0,3; 4. 0,7; 5. 0,2.

4. Группадагы 25 студенттин төртөө контролдук иштен беш, тогузу төрт, сегизи үч, калганы 2 алышты. Болжоосуз доскеге чыгарылган эки студенттин экөө тең 4 алган студенттер болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,13; 2. 0,15; 3. 0,12; 4. 0,14; 5. 0,05.

5. Кутудагы 20 чүкөнүн ичинде,көлөмү чүкөлөрдүкү менен бирдей бир сака бар.

Болжоосуз алынган 4 чүкөнүн ичинде сака да болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,20; 2. 0,30; 3. 0,25; 4. 0,17; 5. 0,29

6. Ар бир сыноодо А окуясы 0,8 ыктымалдыгы менен аткарылса, көз каранды эмес үч сыноодо А окуясынын аткарылыш санынын бөлүштүрүү законун тапкыла.

Жообу:

1.

0	1	2	3
0,012;	0,92;	0,374;	0,522.

2.

0	1	2	3
0,025	0,175	0,415	0,385

3.

0	1	2	3
0,008	0,096	0,384	0,512

4.

0	1	2	3
0,036	0,164	0,405	0,395

7. Бирдей бөлүштүрүлгөн көз каранды эмес 9 кокус чоңдуктун ар биринин дисперсиясы 16. Бул чоңдуктардын арифметикалык орто чоңдугунун дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 1. 2,4; 2. 1,78; 3.1,98; 4. 2,13; 5. 2,67

8.Кокус чоңдуктардын бөлүштүрүү закондору берилген:

X	2	4	3
P	0,4	0,5	0,1

У	3	1	6
q	0,3	0,5	0,2

X - 4У чоңдугунун дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 1. 59,13; 2. 59,44; 3.59,67; 4. 59,36; 5. 59,47

9. Үзгүлтүксүз кокус чоңдуктун бөлүштүрүү тыгыздыгы берилген:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{эгер } x \le 0 \text{ же } x > \pi/2 \\ \cos x & \text{эгер } 0 < x \le \pi/2 \end{cases}$$

Бул кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясын тапкыла.

Жообу:1. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{эгер } x \le 0 \\ \sin x & \text{эгер } 0 < x \le \pi/2 \\ 1 & \text{эгер } x > \pi/2 \end{cases}$ 2. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{эгер } x \le 0 \\ -\sin x & \text{эгер } 0 < x \le \pi/2 \\ 1 & \text{эгер } x > \pi/2 \end{cases}$

3. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{эгер } x \le 0 \\ 2\sin x & \text{эгер } 0 < x \le \pi/2 \\ 1 & \text{эгер } x > \pi/2 \end{cases}$ 4. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{эгер } x \le 0 \\ (\sin x)/2 & \text{эгер } 0 < x \le \pi/2 \\ 1 & \text{эгер } x > \pi/2 \end{cases}$

10. Бир эле өлчөгүч аркылуу төрт жолу системалык ката кетирилбей өлчөнүп, кандайдыр бир физикалык чоңдуктун маанилери 10; 11; 14; 15 алынган. Өлчөгүчтүн каталарынын тандалма дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 1. 3,81; 2. 3,93; 3. 4,38; 4. 4,25; 5.4,42.

11-вариант

1.Кутуда 1 ден 20 га чейин номерленген 20 чүкө бар. Чүкөлөр аябай аралаштырылган.Көрбөй туруп кутудан бир чүкө алынды. Алынган чүкөнүн номери бешке бөлүнүүчү сан болуунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,20; 2. 0,32; 3. 0,37; 4. 0,15; 5. 0,17

2. Мылтык менен бута атканда, ага тийүүнүн салыштырма жыштыгы 0,9 болду. Эгерде 110 жолу бута атылса, анын канчасы бутага тийди?

Жообу: 1. 72; 2. 84; 3.93; 4. 97; 5. 99.

3. Группадагы 25 студенттин төртөө контролдук иштен беш, тогузу төрт, сегизи үч, калганы 2 алышты. Болжоосуз доскеге чыгарылган эки студенттин экөө тең 5 алган студенттер болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,03; 2. 0,05; 3. 0,02; 4. 0,04; 5. 0,08.

4. Ящиктеги 10 тетиктин экөө стандарттуу эмес. Кокустан алынган 6 тетиктин ичинде, бирден ашык эмес стандартсыз тетик болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1.1/3; 2. 2/3; 3. 1/4; 4. 3/4; 5. 1/2.

5. А окуясынын ар бир сыноодогу аткарылуу ыктымалдыгы 0,1 болгон, көз каранды эмес 8 сыноо жүргүзүлгөн. А окуясынын жок дегенде үч жолу аткарылыш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,031; 2. 0,033; 3. 0,021; 4. 0,052. 5. 0,064.

6.Кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери 2; 5; 8. Биринчи эки маанинин ыктымалдыктары 0,8; 0,1. Кокус чоңдуктун үчүнчү маанисинин ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,1; 2. 0,3; 3. 0,2; 4. 0,5; 5. 0,4.

7. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы

$$F(x)=\begin{cases} 0 & эгер \quad x \le -1 \\ x/3+1/3 & эгер \quad -1 < x \le 2 \\ 1 & эгер \quad x > 2 \end{cases}$$

Сыноонун натыйжасында Хтин маанилери]0;1[интервалында жатуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 1/5; 2. 1/4; 3. 1/3; 4. 1/2; 5. 2/3.

8. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad эгер\ x < a - l\ , x > a + l \quad болсо, \\ \frac{1}{2l}, \quad эгер\ a - l \le x \le a + l\ болсо. \end{cases}$$

Х тин математикалык күтүүсүн апкыла.
Жообу: 1.2а; 2. а/2; 3. а/3; 4. а 5 2а/3.

9. Эки өлчөмдүү (Х,У) кокус чоңдугунун бөлүштүрүү закону берилген:

Y	X			
	1	3	4	8
3	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,3	0,1	0,03	0,07

(Х,У) тин Х түзүүчүсүнүн бөлүштүрүү законун тапкыла.
Жообу:

1. 1 3 4 8
   0,48 0,19 0,22 0,11
2. 1 3 4 8
   0,45 0,16 0,28 0,11
3. 1 3 4 8
   0,35 0,25 0,13 0,27
4. 1 3 4 8
   0,41 0,12 0,43 0,34

10. Көлөмү п $= 10$ болгон тандалманын статистикалык бөлүштүрүүсү берилген:

x_i	102	104	108
ni	2	3	5

Шарттуу варианталарга өтүү аркылуу тандалма ортону тапкыла.
Жообу: 1. 104,5; 2. 105,1; 3. 105,6; 4. 105,9; 5. 106,2.

12-вариант

1.Бардык грандары боелгон куб бирдей өлчөмдөгү 1000 кичине кубдарга таарылып бөлүнгөн жана алар аябай аралаштырылган. Көрбөй туруп алынган бир кубдун эч бир граны боелбогон болуу ыктмалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,510; 2. 0,508; 3. 0,512; 4. 0,532; 5. 0,537.
2.Кутудагы 30 чүкөнүн алтоо кызыл түскө боелгон чүкөлөр. Болжоосуз алынган бир чүкөнүн кызыл түстөгү чүкө болуу ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,1; 2. 0,4; 3. 0,3; 4. 0,6; 0,2.

3. Мылтык менен бута атканда, ага тийүүнүн салыштырма жыштыгы 0,7 болду. Эгерде 80 жолу бута атылса, анын канчасы бутага тийди?

Жообу: 1. 51; 2. 54; 3.56; 4. 59; 5. 65.

4.Биринчи кутудагы 10 чүкөнүн алтоо , экинчи кутудагы 20 чүкөнүн ону жана үчүнчү кутудагы 15 чүкөнүн сегизи оң чүкөлөр. Кокустан алынган кутудан, көрбөй туруп алынган чүкөнүн оң чүкө болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,54; 2. 0,57; 3. 0,44; 4. 0,49; 5. 0,53.

5. Группадагы 12 студенттин алтоо отличниктер. Болжоосуз тандалып алынган 5 студенттин төртөө отличник болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,108; 2. 0,112; 3. 0,102; 4. 0,097; 5. 0,048.

6.Кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери 2; 5; 8. Биринчи эки маанинин ыктымалдыктары 0,5; 0,1. Кокус чоңдуктун үчүнчү маанисинин ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,21; 2. 0,40; 3. 0,17; 4. 0,25; 5. 0,34.

7. X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{эгер} \quad x \le -1 \\ x/3+1/3 & \text{эгер} \quad -1 < x \le 2 \\ 1 & \text{эгер} \quad x > 2 \end{cases}$$

Сыноонун натыйжасында Хтин маанилери]0;1[интервалында жатуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 1/5; 2. 1/4; 3. 1/3; 4. 1/2; 5. 2/3.

8.Кокус чоңдуктардын бөлүштүрүү закондору

X	2	1	3	У	3	4	6
P	0,4	0,5	0,1	q	0,3	0,5	0,2

берилген.

X - 2У чоңдугунун дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 1. 4,8; 2. 5,2; 3. 5,6; 4. 5,9; 5. 6,3.

9. Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы берилген:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{эгер} \quad x \le 2 \\ 0{,}5x & \text{эгер} \quad 2 < x \le 4 \\ 1 & \text{эгер} \quad x > 4 \end{cases}$$

Кокус чоңдуктун (2, 3) интервалына тиешелүү болуш ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,8; 2. 0,6; 3. 0,7; 4. 0,5; 5. 0,3.

10. Тандалманын жыштык бөлүштүрүүсү:

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10.

Тандалма ортону тапкыла.
Жообу: 1. 2,65; 2. 3,56; 3. 4,83; 4. 6,92; 5. 5,23.

13-вариант

1. Мылтык менен бута атканда, ага тийүүнүн салыштырма жыштыгы 0,6 болду. Эгерде 100 жолу бута атылса, анын канчасы бутага тийди?
Жообу: 1. 45; 2. 50; 3.55; 4. 60; 5. 65.
2. Группадагы 25 студенттин төртөө контролдук иштен беш, тогузу төрт, сегизи үч, калганы 2 алышты. Болжоосуз доскеге чыгарылган эки студенттин бирөө 5 экинчиси 3 алган студенттер болуу ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,102; 2. 0,125; 3. 0,172; 4. 0,107; 5. 0,115.
3. Кутудагы 20 чүкөнүн ичинде,көлөмү чүкөлөрдүкү менен бирдей бир сака бар.
Болжоосуз алынган 4 чүкөнүн ичинде сака да болуш ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,19; 2. 0,21; 3. 0,27; 4. 0,32; 5. 0,39.
4.Биринчи кутудагы 10 чүкөнүн алтоо , экинчи кутудагы 20 чүкөнүн онбири жана үчүнчү кутудагы 15 чүкөнүн жетөө оң чүкөлөр. Кокустан алынган кутудан, көрбөй туруп алынган чүкөнүн оң чүкө болуш ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,53; 2. 0,55; 3. 0,44; 4. 0,47; 5. 0,54.
5. Тыйын алты жолу ташталганда экиден кем эмес жолу герб түшүүнүн ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,71; 2. 0,75; 3. 0,79; 4. 0,85; 5. 0,89.
6.Кокус чоңдуктун мүмкүн болгон маанилери 2; 5; 8. Биринчи эки маанинин ыктымалдыктары 0,7; 0,1. Кокус чоңдуктун үчүнчү маанисинин ыктымалдыгын тапкыла.
Жообу: 1. 0,3; 2. 0,2; 3. 0,1; 4. 0,5; 5. 0,4.

7. Кокус чоңдуктардын бөлүштүрүү закондору:

X	5	3	7	У	3	6	1
P	0,1	0.7	0,2	q	0,4	0,3	0,3

XУ кокус чоңдугунун математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 1. 11,3; 2. 11,9 3. 13,2; 4. 12,7; 5. 12,9

8. Көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн кокус чоңдуктун бөлүштүрүү функциясы

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{эгер } x \le 0 \\ 10e^{-10x} & \text{эгер } 0 < x \end{cases}$$.Анын

математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 1. 0,25; 2. 0,10 3. 0,15; 4. 0,20; 5. 0,49.

9. Эки өлчөмдүү (X,У) кокус чоңдугунун

бөлүштүрүү закону:

Y	X		
	2	6	8
1	0,1	0,07	0,2
2	0,08	0,12	0,16
3	0,14	0,06	0,07

(X,У) тин X=8 болгон учудагы У түзүүчүсүнүн бөлүштүрүү законун тапкыла.

Жообу:

1.	1	2	3	2.	1	2	3
	0,47	0,37	0,16		0,37	0,47	0,16
3.	2	6	8	4.	2	6	8
	0,46	0,38	0,16		0,37	0,18	0,45

10. Генералдык жыйындыдан, көлөмү n=50 болгон тандалма алынган:

x_i	2	5	7	10
n_i	9	11	18	12.

Тандалма дисперсияны тапкыла.

Жообу: 1. 6,98; 2. 7,56 3. 7,16; 4. 7,68; 5. 7,89.

14-вариант

1.Аябай аралаштырылган домино оюнунун толук 28 сөөгүнөн көрбөй туруп эки жолу бирден сөөк алынган.Эгерде биринчи алынган сөөк дубль болсо ага экинчи алынган сөөктү улаштырып коюга мүмкүнболуунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 1/9; 2. 2/9; 3. 3/7; 4. 1/3; 5. 4/9.

2. Мылтык менен бута атканда, ага тийүүнүн салыштырма жыштыгы 0,8 болду. Эгерде 130 жолу бута атылса, анын канчасы бутага тийди?

Жообу: 1. 100; 2.102; 3.104; 4. 110; 5. 120.

3. Группадагы 25 студенттин төртөө контролдук иштен беш, тогузу төрт, сегизи үч, калганы 2 алышты. Болжоосуз доскеге чыгарылган эки студенттин бирөө 3 экинчиси 2 алган студенттер болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 1/25; 2.4/75; 3. 1/15; 4. 7/75; 5. 8/75 .

4. Кутудагы 20 чүкөнүн ичинде,көлөмү чүкөлөрдүкү менен бирдей бир сака бар.

Болжоосуз алынган 7 чүкөнүн ичинде сака да болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,30; 2. 0,32; 3. 0,35; 4. 0,37; 5. 0,39.

5.Биринчи кутудагы 10 чүкөнүн тогузу, экинчи кутудагы 16 чүкөнүн алтоо жана үчүнчү кутудагы 20 чүкөнүн 12-си оң чүкөлөр. Кокустан алынган кутудан, көрбөй туруп алынган чүкөнүн оң чүкө болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,615; 2. 0,620; 3. 0,625; 4. 0,630; 5. 0,635.

6. Ар бир сыноодо А окуясы 0,3 ыктымалдыгы менен аткарылса, көз каранды эмес эки сыноодо А окуясынын аткарылыш санынын бөлүштүрүү законун тапкыла.

Жообу: 1. 0 1 2 2. 0 1 2

0,49; 0,42; 0,009; 0,36 0,27 0,37

3. 0 1 2 4. 0 1 2

0,15 0,62 0,27 0,25 0,38 0,37

7. Кокус чоңдуктун бөлүштүрүү закону

X	-2	3	6	7
p	0.1	0,2	0.3	0,4

3X-1 чоңдугунун математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 1. 13; 2. 14; 3. 15; 4. 12; 5. 16.

8. Кокус чоңдуктардын бөлүштүрүү закондору

X	2	1	3
p	0.4	0,5	0,1

У	3	4	6
q	0,3	0,5	0,2

XУ кокус чоңдугунун математикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 1. 6,38; 2. 6,56; 3. 6,68; 4. 6,79; 5. 6,87.

9. Көрсөткүчтүү бөлүштүрүлгөн X кокус чоңдугунун бөлүштүрүү функциясы

$$f(x)=\begin{cases} 0 & эгер\ x \le 0 \\ 10e^{-10x} & эгер\quad 0 < x \end{cases}$$

X^2 кокус чоңдугунун м атематикалык күтүүсүн тапкыла.

Жообу: 1. 0,06; 2. 0,08 3. 0,13 4. 0,02; 5. 0,19.

10. Тандалманын жыштык бөлүштүрүүсү:

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10.

Бул тандалманын салыштырма жыштык бөлүштүрүүсүн тапкыла.

1.

x_i	4	7	8	12
n_i	0,2 5	0,10	0,15	0,50.

2

x_i	4	7	8	12
n_i	0,2	0,15	0,25	0,40.

3.

x_i	4	7	8	12
n_i	0,35	0,15	0,30	0,20.

4.

x_i	4	7	8	12
n_i	0,30	0,20	0,15	0,35.

15-вариант

1.Аябай аралаштырылган домино оюнунун толук 28 сөөгүнөн көрбөй туруп эки жолу бирден сөөк алынган.Эгерде биринчи алынган сөөк дубль эмес болсо ага экинчи алынган сөөктү улаштырып коюга мүмкүн болуунун ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 1/8; 2. 3/8; 3. 5/8; 4. 2/9; 5. 4/9.

2.Яшиктеги 30 шардын бешөө кызыл түскө боелгон шарлар. Болжоосуз алынган бир шардын кызыл түстөгү шар болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1.1/3; 2. 1/2; 3. 1/6; 4. 2/3; 5.5/6.

3. Кутудагы 20 чүкөнүн ичинде,көлөмү чүкөлөрдүкү менен бирдей бир сака бар.

Болжоосуз алынган 6 чүкөнүн ичинде сака да болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,4; 2. 0,5; 3. 0,3; 4. 0,2; 5. 0,45

4. Группадагы 12 студенттин сегизи отличниктер. Болжоосуз тандалып алынган 6 студенттин төртөө отличник болуу ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 6/11; 2. 5/11; 3. 4/11; 4. 3/11; 5. 2/11.

5. Цехтеги 5 мотордун ар биринин,убакыттын белгилүү бир учурунда иштеп жатыш ыктымалдыгы 0,8. Берилген учурда 3 мотор иштеп туруу ыктымалдыгын
тапкыла.

Жообу: 1. 0,1; 2. 0,3; 3. 0,2; 4. 0,4; 5. 0,6.

6.Кокус чоӊдуктун мүмкүн болгон маанилери 2; 5; 8. Биринчи эки маанинин ыктымалдыктары 0,7; 0,2. Кокус чоӊдуктун үчүнчү маанисинин ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,5; 2. 0,3; 3. 0,6; 4. 0,1; 5. 0,4.

7. Кокус чоӊдуктардын бөлүштүрүү закондору:

X	5	3	7	У	3	6	1
P	0,1	0.7	0,2	q	0,4	0,3	0,3

2X-3У кокус чоӊдугунун дисперсиясын тапкыла.

Жообу: 1. 41,76; 2. 43,89 3. 45,68; 4. 43,39; 5. 42,21.

8. Кокус чоӊдуктун бөлүштүрүү функциясы берилген:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{эгер} \quad x \le 2 \\ 0{,}5x & \text{эгер} \quad 2 < x \le 4 \\ 1 & \text{эгер} \quad x > 4 \end{cases}$$

Кокус чоӊдуктун (2,5; 3,5) интервалына тиешелүү болуш ыктымалдыгын тапкыла.

Жообу: 1. 0,1; 2. 0,15; 3. 0,05 4. 0,25; 5. 0,3.

9. Эки өлчөмдүү (X,У) кокус чоӊдугунун бөлүштүрүү закону берилген:

Y	X			
	1	3	4	8
3	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,3	0,1	0,03	0,07

(X,У) тин У түзүүчүсүнүн бөлүштүрүү законун тапкыла.

Жообу:

1.	3	6	2.	3	6	3.	3	6	4.	3	6
	0,5	0,5		0,4	0,6		0,6	0,4		0,7	0,3.

10. Генералдык жыйындыдан, көлөмү n=50 болгон тандалма алынган:

x_i	2	5	7	10
n_i	9	11	18	12.

Генералдык ортонун жылышпаган чамалоосун тапкыла.

Жообу: 1. 6,26; 2. 6,15 3. 6,38; 4. 645; 5. 6,53.

Тесттеги маселелердин туура жооптору (тесттин ачкычтары)

Маселенин номери	Варианттын номери				
	1	2	3	4	5
1	0,3	0,89	1/6	0,5	0,1
2	0,384	0,14	0,67	0,2	0,5
3	0,2495	119	0,008	0,12	0,4
4	0,255	0,496	0,47	0,729	0,24
5	0,19	0,72	0,38	0,11	0,32
6	X 0 1 2 p 0,01 0,18 0,81	0,4	0 1 2 0,09 0,42 0,49	0,3	0,1
7	2,5	$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$	2,2	11,3	13
8	59,13	$1+\pi/2$	8,74	0,01	21,4
9	$l^2/3$	6,93	3,4	2 6 8 0,52 0,22 0,26	0,5
10	10/3	1/4	5,1	10	6,38

Маселенин номери	Варианттын номери		
	6	7	8
1	0,48	0,3	0,85
2	0,25	0,5	0,76
3	0,34	0,6	0,22
4	2/3	1/3	0,08
5	0,87	0,39	0,475
6	0,3	0 1 2 3 0,027 0,189 0,441 0,343	X 0 1 2 3 p 0,064 0,288 0,432 0,216
7	12,6	0,5	1,5
8	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1+x^2}{x^2}, & x>0\end{cases}$	28,15	46,6
9	0	1 2 3 0,37 0,36 0,27	0,5
10	2,5	2621	12,5

Маселенин номери	Варианттын номери		
	9	10	11
1	0,1	0,96	0,2
2	72	0,25	99
3	0,02	0,3	0,02
4	0,25	0,12	0,4
5	0,41	0,2	0,033
6	0,2	X 0 1 2 3 p 0,008 0,96 0,384 0,512	0,1
7	$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ (1-\cos x)/2 & 0<x\le\pi\\ 1 & x>\pi\end{cases}$	1,78	1/3
8	π/2	9,65	a
9	2 6 8 0,32 0,25 0,43	$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \sin x & 0<x\le\pi/2\\ 1 & x>\pi/2\end{cases}$	1 3 4 8 0,45 0,16 0,28 0,11
10	919	4,25	105,6

Маселенин номери	Варианттын номери			
	12	13	14	15
1	0,512	60	2/9	4/9
2	0,2	0,107	104	1/6
3	56	0,27	8/75	0,3
4	0,54	0,54	0,35	5/11
5	0,097	0,89	0,625	0,1
6	0,4	0,2	X 0 1 2 p 0,49 0,42 0,09	0,4
7	30,4	13,2	14	43,89
8	4,8	0,1	6,56	0,05
9	0,5	Y 1 2 3 q 0,47 0,37 0,16	0,02	3 6 0,5 0,5
10	3,56	7,16	x_i 4 7 8 12 w_i 0,25 0,1 0,15 0,5	6,38

Студенттердин калдык билимин текшкерүү ишинин тапшырмалары.

Калдык билимди текшерүүгө жогоруда көрсөтүлгөн варианттардын төрт маселеси төмөнкү таблица боюнча сунуш кылынат:

Варианттын номери	Маселелердин номерлери			
1.	1;	3;	6;	7.
2.	1;	3;	6;	10.
3.	1;	2;	7;	9.
4.	1;	4;	6;	7.
5.	2;	3;	6;	9.
6.	1;	3;	6;	7.
7.	1;	2;	6;	7.
8.	1;	3;	6;	8.
9.	1;	2;	6;	9.
10.	2;	3;	6;	9.
11.	2;	4;	6;	8.
12.	2;	3;	6;	9.
13.	1;	5;	6;	8.
14.	2;	4;	6;	7.
15.	2;	3;	6;	8.

ТИРКЕМЕЛЕР

1-тиркеме

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ функциясынын маанилерин таблицасы

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-тиркеме

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}} dz$ **функциясынын маанилерин таблицасы**

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
1,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

3 -тиркеме

$t_\nu = t(\nu, n)$ маанилеринин таблицасы

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

4 - тиркеме

χ^2 бөлүштүрүүсүнүн кооптуу чекиттери

Эркиндик даражанын саны k	Маанилүүлүктүн деңгели α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,98
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,6	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	43,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

5 -тиркеме

Стьюденттин бөлүштүрүүсүнүн кооптуу чекиттери

Эркиндик даражанын саны k	Маанилүүлүктүн деңгели α (эки жактуу кооптуу обл.)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,04
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Маанилүүлүктүн деңгели α (бир жактуу коопту обл.)					

М А З М У Н У

Б и р и н ч и   г л а в а

Э к и н ч и   г л а в а

Карабакиров Рымбек Карабакирович
Карабакиров Кубат Рымбекович

Ыктымалдыктар теориясы жана математикалык статистика

Техникалык жогорку окуу
жайлардын студенттери үчүн окуу китеби

Басуга 28.04.09. кол коюлду
Кагаздын форматы 60x80/16. 16. шарттуу басма табак.
Нускасы 500. Заказ 992

Н.Исанов атындагы кыргыз мамлекеттик курулуш,
транспорт жана архитектура университети
720023 Бишкек ш. Малдыбаева көчөсү 34, «б»