УДК 517.9
DOI 10.53473/16946324_2023_3

Манапбаев Манас Исраилович
"КРЭАУ" мекемеси
программалык инженерия кафедрасынын окутуучусу
Кыдыралиев Торогелди Раимжанович
"КРЭАУ" мекемеси
ф-м.и.к., программалык инженерия кафедрасынын доценти

Манапбаев Манас Исраилович
Учреждение «МУКР»
преподаватель кафедры программной инженерии
Кыдыралиев Торогелди Раимжанович
Учреждение «МУКР»
к.ф-м.н., доцент кафедры программной инженерии

Manapbaev Manas Israilovich
Institution "IUKR"
Lecturer, Department of Software Engineering
tel. 0770277729
Email: manasbek@list.ru
Kydyraliev Torogeldi Raimzhanovich
Institution "IUKR"
Ph.D. (Physics and Mathematics),
Associate Professor of the
Department of Software Engineering
tel. 0771201549
Email: torogeldi1@mail.ru

ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕНИН БАШТАПКЫ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫМДУУЛУГУ

РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

SOLVABILITY OF THE INITIAL PROBLEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN HIGH-ORDER PARTIAL DERIVATIVES

Аннотациясы: *Бул макалада жогорку тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарылышы изилденген жана чыгарылышы интегралдык көрүнүштө табылган*
Негизги сөздөр: *Коши маселеси, интегро-дифференциалдык тендеме, кысып чагылтуу, жекече туунду, интегралдык көрүнүш.*

Аннотация: *В данной работе исследуются разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка и решение получено в интегральной форме.*
Ключевые слова: *задача Коши, интегро-дифференциальное уравнение, сжимающее отображение, частная производная, интегральная форма.*

Abstract: *In this paper, the solvability of the Cauchy problem for high-order partial integro-differential equations is studied and obtained in integral form.*
Keywords: *Cauchy problem, integro-differential equation, contraction mapping, partial derivative, integral form.*

Төмөндөгү жекече туундулуу интегро- дифференциалдык тендеме үчүн Коши маселесин карайбыз:

$$\begin{aligned} &u_{ttxy}+2\alpha u_{txy}+\gamma u_{ttx}+\beta u_{tty}+2\alpha\beta u_{ty}+\alpha^2 u_{xy}+\alpha^2\beta u_{y}+\\ &+2\gamma\alpha u_{tx}+\gamma\beta u_{tt}+2\alpha\beta\gamma u_{t}+\alpha^2\gamma u_{x}+\alpha^2\beta\gamma u=f\left(t,x,y,u\right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$u\left(0,x,y\right)=\varphi\left(x,y\right), \quad (2)$$

$$u_t\left(0,x,y\right)=\psi\left(x,y\right), \quad (3)$$

мында $\alpha,\beta,\gamma\in R_{+}\equiv\left(0,+\infty\right)$.

(1)-(3) маселесинин чечими төмөндөкү түрдө табылат:

$$u\left(t,x,y\right)=c\left(t,x,y\right)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}(t-s)Q\left(s,\mu,\nu\right)d\nu d\mu ds, \quad (4)$$

мында $c\left(t,x,y\right)$ төмөндөкү барабардыктары аткарылуучу белгилүү функция

$$c\left(0,x,y\right)=\varphi\left(x,y\right),\ c_t\left(0,x,y\right)=\psi\left(x,y\right)$$

Ал эми $Q\left(t,x,y\right)$ - изделүүчү функция.

Шарт:

мейли $f\left(t,x,y,u\right)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L\,|_u\right)$,

$$\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1,\ T_0\le T.$$

жана

$$\begin{aligned} H\left(t,x,y\right)=&c_{ttxy}+2\alpha c_{txy}+\beta c_{tty}+2\alpha\beta c_{ty}+\alpha^2 c_{xy}+\alpha^2\beta c_{y}+\\ &+\gamma c_{ttx}+2\gamma\alpha c_{tx}+\gamma\beta c_{tt}+2\alpha\beta\gamma c_{t}+\alpha^2 c_x\gamma+\alpha^2\beta\gamma c. \end{aligned}$$

Тандап алуунун негизинде $c\left(t,x,y\right)$ ти

$\max\limits_{[0,T]\times R\times R}\left\|H\left(t,x,y\right)\right\|<+\infty.$ деп эсептөөгө болот.

(4) түн t боюнча жекече туундусу төмөндөгүнү берет:

$$\begin{aligned} u_t\left(t,x,y\right)=&c_t\left(t,x,y\right)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q\left(s,\mu,\nu\right)d\nu d\mu ds-\\ &-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y (t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q\left(s,\mu,\nu\right)d\nu d\mu ds, \end{aligned}$$

Мындан (4) түн негизинде

$$\begin{aligned} &u_t\left(t,x,y\right)+\alpha u\left(t,x,y\right)=\alpha c\left(t,x,y\right)+c_t\left(t,x,y\right)+\\ &+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q\left(s,\mu,\nu\right)d\nu d\mu ds. \end{aligned} \quad (5)$$

(5) тин t боюнча жекече туундусу:

$$u_{tt}(t,x,y)+\alpha u_t(t,x,y)=\alpha c_t(t,x,y)+c_{tt}(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu d\mu- \tag{6}$$
$$-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds.$$

Анда (6) жана (5)тен төмөндөгү келип чыгат:

$$u_{tt}(t,x,y)+2\alpha u_t(t,x,y)+\alpha^2 u(t,x,y)=c_{tt}(t,x,y)+2\alpha c_t(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2 c(t,x,y)+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu d\mu\,. \tag{7}$$

(7) нин x боюнча жекече туундусу:

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 u_x(t,x,y)=c_{ttx}+2\alpha c_{tx}+\alpha^2 c_x+$$
$$+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu-\beta\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu d\mu.$$

Мындан төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 u_x(t,x,y)=c_{ttx}+2\alpha c_{tx}+\alpha^2 c_x+$$
$$+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu-\beta[u_{tt}(t,x,y)+2\alpha u_t(t,x,y)+\alpha^2 u(t,x,y)-$$
$$-c_{tt}-2\alpha c_t-\alpha^2 c],$$

же

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\beta u_{tt}(t,x,y)+2\alpha\beta u_t(t,x,y)+\alpha^2 u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta u(t,x,y)=$$
$$=c_{ttx}+2\alpha c_{tx}+\alpha^2 c_x+\beta c_{tt}+2\alpha\beta c_t+\alpha^2\beta c+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu. \tag{8}$$

(8)ди y боюнча туундулап төмөндөгүнү алабыз:

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta u_{ty}(t,x,y)+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)=c_{ttxy}+2\alpha c_{txy}+\alpha^2 c_{xy}+\beta c_{tty}+ \tag{9}$$
$$+2\alpha\beta c_{ty}+\alpha^2\beta c_y+Q(t,x,y)-\gamma\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu.$$

(8)ди γ га көбөйтүп, (9) менен мүчөлөп топтоштурабыз

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta u_{ty}(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+ \tag{11}$$
$$+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)+\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=H(t,x,y)+Q(t,x,\nu).$$

(11)ден , (1) теңдеменин негизинде, (4)деги $Q(t,x,y)$ белгисиз функциясын аныктоо үчүн сызыктуу эмес интегралдык теңдемени алабыз

$$Q(t,x,y)=f\left[t,x,y,c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds\right]+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds-H(t,x,y)\equiv PQ, \tag{12}$$

(12) теңдемесине кысып чагылтуу принцибин пайдаланып чыгарабыз.
Мейли

$$Q=\left\{Q(t,x,y):Q(t,x,y)\in C\left([0,T_0]\times R\times R\right)\cap\ \left\|Q(t,x,y)\right\|\le h\right\}.$$

анда (11) теңдемесинен $\|PQ\|\le M+N+KT_0$ ээ болобуз,

мында $M\equiv\max f(t,x,y,u),\ N\equiv\max\left\|H(t,x,y)\right\|,\mathrm{K}\equiv\max\mathrm{K}(t,s,x,y,u)$.

Эгерде T_0 жана h ды так тандасак,

$$M+N+KT_0\le h \tag{13}$$

анда PQ оператору $PQ:Q\to Q$ болот.

Эми PQ оператору кысуу оператору экендигин көрсөтөбүз.

(11)ден шарттын негизинде төмөндөгүнү алабыз

$$\left\|PQ_1-PQ_2\right\|\le(L+L_1t)\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}d\nu d\mu ds\times\left\|Q_1-Q_2\right\|\le$$

$$\le\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}\left\|Q_1-Q_2\right\|. \tag{14}$$

Жогорудагы келтирилген баалоодо кийинки барабарсыздыктар колдонулган.

$$\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}d\nu d\mu ds\le\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\mu)}\left(\int_{-\infty}^y e^{-\gamma(y-\nu)}d\nu\right)d\mu\right]ds\le$$

$$\le\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\mu)}\left(\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma y}\cdot e^{\gamma\nu}\Big|_{\nu=-\infty}^{y}\right)d\mu\right]ds\le\frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

$\alpha,\beta,\gamma\in R_+ uT_0$ турактууларын $\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1$ барабарсыздыгы орун ала тургандай тандайбыз. Анда (T) божомолдоосунун негезинде (14)төн PQ оператору Q көптүгүндө кысуу оператору экендиги келип чыгат. (12) сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер системасы кысып чагылтуу принциби боюнча жалгыз үзгүлтүксүз чыгарылышка ээ болору келип чыгат $Q(t,x,y)\in Q$. Табылган функцияны (4)ге коюп, (1)-(3) Коши маселесинин чыгарылышын алабыз.

Эми (1)-(3) Коши маселесинин чыгарылышынын дифференциалдык касиетин изилдейбиз. Баардык $Q(t,x,y)\in Q$ үчүн (4) барабардыгынан алынган, төмөндөгү барабарсыздык келип чыгат

$$\left\|u(t,x,y)\right\|\le\left\|c(t,x,y)\right\|+\left\|\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds\right\|\le$$

$$\le C_0+\frac{T_0h}{\alpha\beta\gamma}=M_0=const.$$

(5)тен төмөндөгүнү келип чыгат

$$\left\|u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)\right\|\le\left\|\alpha c(t,x,y)+c_t(t,x,y)\right\|+$$

$$+\left\|\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds\right\|\le C_1+\frac{h}{\alpha\beta\gamma}=M_1=const.$$

Ошондой эле (7)-(9)дагы (1) теңдемеге кирген баардык жекече туундуларды бир калыпта чектелгенин далилдөөгө болот.

Төмөндөгү теорема келип чыгат

Теорема. Шарт аткарылсын. Анда (1)-(3) Коши маселеси чыгарылышка ээ болот жана аны $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,1,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)$, (4) көрүнүштө жазууга мүкүн болот.

АДАБИЯТТАР

1. Imanaliev M.I., Baizakov A.B.,Kydyraliev T.R. Sufficient conditions for the existense of solutions of the Cauchy problem of partial differential eguations of third order.Proceedings of V Congress of the Turkic World mathematicians. Bishkek, 2014.-v.1.-P.121-126.
2. Baizakov A.B., Dzheenbaeva G.A., Sharshenbekov M.M. On the structure of solutions of the ini- tial problem of nonlinear integro-differential equations in partial derivatives of the fourth order. Вестник Института математики НАН КР. - 2022.-№1.- С.32-38.
3. Байзаков А.Б., Кыдыралиев Т.Р. Применение метода преобразования решений к начальной задаче интегро-дифференциальных уравнений в частных производных пятого порядка// Из- вестия ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2018. №3, С 26-31.

Байзаков А.Б., Кыдыралиев Т.Р., Асанкулова А.С. Начальной задаче интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Вестник ИМ АН КР, Бишкек.2014. №1, С. 84-90