Ошский государственный университет

Джалал-Абадский государственный университет

Диссертационный совет Д 05.22.651

На правах рукописи
УДК 517.928.2

Омаралиева Гулбайра Абдималиковна

Асимптотика решения трех зонных бисингулярных задач

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ош – 2023

Работа выполнена на кафедре математического анализа Ошского государственного университета.

Научный руководитель: Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, доктор физико-математических наук, профессор, директор Высшей школы международных образовательных программ Ошского государственного университета.

Официальные оппоненты: Искандаров Самандар, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики.

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой прикладная математика, Ошского технологического университета

Ведущая организация: Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений Ферганского государственного университета, 112000, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19.

Защита состоится 29 ноября 2023 года в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 05.22.651 по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете и Джалал-Абадском государственном университете по адресу: 723500, г. Ош ул. Ленина, 331, ауд. 203.

Код онлайн трансляции защиты диссертации: https://vc.vak.kg/b/052-pvt-luj-9ih

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Ошского государственного университета (г. Ош, ул. Ленина 331) и Жалал-Абадского государственного университета им. Б. Осмонова (г. Жалал-Абад, ул. Ленина 57), а также на сайте Национальной аттестационной комиссии при Президенте Кыргызской Республики https://vak.kg/d_05_22_651/99335/.

Автореферат разослан 20 октября 2023 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.ф-м.н., доцент Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. В конце XIX столетия наука о движении жидкости распалась на два ветви, почти не связанные между собой: теоретическая гидродинамика, исходившая из уравнений, составленных Эйлером для движения жидкости без трения и экспериментальная гидродинамика, которая опиралась на большое число экспериментальных результатов и очень сильно отличалась от теоретической гидродинамики как своими методами, так и своей целью[1].

Во многих ранее исследованных задачах теории сингулярных возмущений, например, в работах А.Н. Тихонова (1952), А. Найфе (1984), С.А. Ломова (1984), А.Б. Васильевой (1985), В.Ф. Бутузова (2010), Н.Н. Нефедова (2022), М. Иманалиева (1988), А.М. Ильина (1989), К. Алымкулова (1992), А.С. Омуралиева (2009), К.С. Алыбаева (2001) и др. в области пограничного слоя существовал только один характерный предел. В данной диссертации впервые исследованы случаи, когда в пограничном слое имеются два характерных пределов. Поэтому результирующее разложение, кроме внешнего, включает в себя два внутренних разложения. Области пригодности каждого их этих разложений обычно называют зонами, а сама задача именуется в этом случае трех зонной задачей[2].

Диссертационная работа посвящена построению полных, равномерных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач – сингулярно возмущенные задачи с особой точкой и дополнительным (промежуточным) пограничным слоем. Полные, равномерные асимптотические разложения решений задач Коши и Дирихле строятся обобщенным методом пограничных функций, так как невозможно напрямую применять классический метод пограничных функций А.Б. Васильевой[3].

Задачи, исследованные автором, ранее не изучались.

Связь темы диссертации с приоритетными научными направлениями, крупными научными программами (проектами), основными научно-исследовательскими работами, проводимыми образовательными учреждениями. Работа выполнялась в рамках

---

[1] Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.

[2] Найфе А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.

[3] Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. − Москва: Высшая школа. – 1990. – 208 с.

научного проекта по Институту фундаментальных и прикладных исследований при ОшГУ по теме: «Задачи фазовых переходов и критические явления. Математические аспекты их уравнений, быстрые переходы и асимптотики», 2019 г.

Цель и задачи исследования:

Целю исследования является построение асимптотики решения трех зонных бисингулярных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Задачи исследования:

1) Найти достаточное и необходимое условия существования промежуточного пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

2) Построить полные равномерные асимптотические разложения решений начальной и краевой трех зонных задач, а также обосновать полученные разложения.

Научная новизна работы:

1) Впервые найдены достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Коши для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

2) Впервые построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений трех зонных задач Коши для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

3) Впервые найдены достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Дирихле для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

4) Впервые построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений трех зонных задач Дирихле для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Практическая значимость полученных результатов. Задачи, рассмотренные в диссертационной работе, представляют теоретический и практический интерес так как по многочисленности и разнообразию приложений трех зонная задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и трех зонная задача Дирихле для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка занимает особое место в математике.

Построение асимптотических приближений решений подобных задач с любой степенью точности по степеням малого параметра весьма важна для решения практических задач теории пограничного слоя.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Коши для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;
- построение равномерных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач Коши для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;
- обоснование построенных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач Коши для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;
- достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Дирихле для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка;
- построение равномерных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач Дирихле для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка;
- обоснование построенных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач Дирихле для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка;

Личный вклад соискателя. Все научные результаты, представленные в диссертации, принадлежат только автору. В совместных работах [2], [3] и [7] постановка задачи принадлежит научному руководителю, научные результаты и доказательства теорем осуществлено соискателем – Омаралиевой Г.А., а в обсуждении результатов и в оформлении статьей участвовали К.Г. Кожобеков, М.И. Маматбуваева, Ш.А. Раманкулова и Муса уулу Н.Э.

Апробации результатов исследования. Результаты работы докладывались и обсуждались на международных научных конференциях:

- «Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8» посвященная 80-летию А. Самойленко. – Чолпон-Ата, 2018 г.;
- «Проблемы современной математики и ее приложения», посвященная 70-летию академика А.А. Борубаева. – Бишкек: Институт математики НАН КР, 16-19 июня 2021 г.;
- "Актуальные проблемы теорий оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений" 50-летию научно-педагогической деятельности и 75-летнему юбилею профессору А.К. Керимбекова. – Бишкек: КРСУ, 23-25 июня 2022 г.

На научных семинарах:

- “Актуальные проблемы дифференциальных уравнений”, руководители семинара: член корр. НАН КР, профессора К. Алымкулов и д.ф.-м.н., профессор К.С. Алыбаев (г. Ош. 2018-2023 гг);

- “Современные проблемы математической физики”, руководитель семинара академик Ш.А. Алимов (Институт математики имени В. И. Романовского академии наук Республики Узбекистан).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. По теме диссертации опубликованы 7 статей [1]-[7] и 2 тезиса [8], [9]. Из них две статьи [2], [3] опубликованы в научных рецензируемых, периодических математических журналах, цитируемых в базах Scopus и Web of Science. Одна статья [6] в научном рецензируемом, периодическом математическом журнале, цитируемой в базе RSCI. Все статьи опубликованы в журналах с ненулевым импакт-фактором. Импакт факторы журналов больше 0,1, где опубликованы статьи [1]-[3], [6]. По опубликованным статьям набрано 215 баллов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, четырех глав, разбитых на 10 параграфов, заключения и списка использованных источников из 81 наименований. В конце каждой главы приведены заключения. Работа изложена на 101 страницах машинописного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ» состоит из двух параграфов. В «§1.1. Обзор литературы по сингулярно возмущенным задачам» и «§ 1.2. Обзор литературы по бисингулярным задачам» дается обзор литературы по сингулярно возмущенным и бисингулярным задачам для дифференциальных уравнений, которые близки к теме диссертации. В двух параграфах проведен анализ научных результатов работ других авторов, наиболее близких к теме предлагаемой диссертационной работы. В заключении первой главы отмечено, что на основании проведенных анализов диссертационное исследование актуально, оригинально, своевременно и имеет определенный теоретический и практический интерес.

Вторая глава «МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» состоит из двух параграфов. В «§ 2.1. Объекты и предметы исследования» подробно изложены объекты и предметы исследования.

Объекты исследования: Объектом исследования третьей главы являются трех зонные бисингулярные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x)+(x^\gamma q(x)+\varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in[0,T],\ \ y_\varepsilon(0)=a,$$

где $n,\ m,\gamma\in\mathbf{N},\ n>m(1+1/\gamma)$, a=const, $f(0)\neq 0$, $f,q,p\in C^\infty[0,T]$, $0<\alpha_0<q(x),\ \ 0<\alpha_0<p(x):x\in[0,T]$.

Объектом исследования четвертой главы являются трех зонные бисингулярные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\varepsilon^n y_\varepsilon''(x)+x^k p(x)y_\varepsilon'(x)-(x^k q(x)+\varepsilon^m r(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in[0,1],$$

$$y_\varepsilon(0)=a,\ \ y_\varepsilon(1)=b,$$

где $p,q,r,f\in C^\infty[0,1]$, $f(0)\neq 0$, $0<p(0)$, $0<q(0)$, $0<r(0)$, $n>m$, $1<k$, $(n,\ k,\ m\in N)$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Предметом исследования являются:

- найти условия при которых появляются промежуточные пограничные слои в бисингулярных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков;

- построение равномерных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач с любой степенью точности по малому параметру.

В «§ 2.2. Методы исследования» подробно изложены многократно используемые в данной диссертации определения, теоремы и методы. В диссертации основном используются методы: интегрирования по частям, интегрирования линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков, малого параметра, классический метод пограничных функций, обобщенный метод пограничных функций, сравнения, дифференциальных неравенств и принцип максимума.

Основные научные оригинальные результаты диссертации приведены в главах 3, 4.

Сингулярности задач: первая сингулярность – присутствие малого параметра перед старшей производной искомой функции; вторая – решение соответствующей невозмущенной (вырожденной) задачи не является гладкой функцией на рассматриваемом отрезке, т.е. имеет особую точку; третья особенность – появление промежуточного пограничного слоя.

В третьей главе «ТРЕХ ЗОННЫЕ БИСИНГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА» для одного класса бисингулярных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка получены достаточное и необходимое условия существования промежуточного пограничного слоя.

Третья глава состоит из трех параграфов, в первом параграфе для наглядности подробно изложен самый простой случай:

$$\varepsilon^3 y'_\varepsilon(x)+(x+\varepsilon)y_\varepsilon(x)=f_\varepsilon(x),\ x\in[0,T],\quad y_\varepsilon(0)=a, \tag{1}$$

где a – некоторая постоянная не зависящая от малого параметра ε, $f_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(x),\ f_k\in C^\infty[0,T],\quad f_0(0)\neq 0$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Требуется построить равномерное асимптотическое приближение решения начальной задачи (1) на отрезке $[0,T]$, при $\varepsilon\to 0$.

Доказана

Теорема 1. Асимптотическое решение трех зонной бисингулярной задачи Коши (1) на отрезке $[0,T]$ при стремлении малого параметра к нулю представимо в виде асимптотического ряда:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^j v_j(x)+\varepsilon^{-1}\sum_{j=0}^{s+1}\varepsilon^j(w_j(t)+\pi_j(\tau))+O(\varepsilon^s),\ \varepsilon\to 0,$$

где $v_j(x)=\dfrac{f_j(x)-v_{j-1}(x)-v'_{j-3}(x)-h_j}{x},\ j=0,1,...,\ v_s(x)\equiv 0, s<0,$

$$h_0=f_0(0),\ h_1=f_1(0)-v_0(0),\ h_2=f_2(0)-v_1(0),$$

$$h_j=f_j(0)-v_{j-1}(0)-v'_{j-3}(0),\ 2<j\in\mathbf{N},\ v_j\in C^\infty[0,T],\ j=0,1,...$$

$$w_0(t)=\frac{h_0}{t+1};\quad w_1(t)=\frac{h_1-w'_0(t)}{t+1},\quad w_j(t)=\frac{h_j-w'_{j-1}(t)}{t+1},\ j=0,1,...$$

$$\pi_j(\tau)=e^{-\tau}c_j+e^{-\tau}(c_{j,0}\tau+c_{j,1}\tau^2+...+c_{j,s}\tau^{s+1}),\ \ c_j,\ c_{j,k}=const.$$

Во втором параграфе «§ 3.2. Линейный рост сингулярности в начальной точке» исследована задача Коши:

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x)+(xq(x)+\varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in[0,T],\ y_\varepsilon(0)=a, \tag{2}$$

где $n,m\in\mathbf{N}$, a – const, $f(0)\neq 0$, $f,q,p\in C^\infty[0,T],\ 0<c_0<q(x),$ $0<c_0<p(x):x\in[0,T]$.

Доказывается теорема

Теорема 2. Если в начальной задаче (2) параметры n и m удовлетворяют неравенству $n>2m$, то в окрестности начальной точки $x=0$ существует промежуточный (дополнительный) пограничный слой.

Доказательство. Если в области пограничного слоя существует не один, а несколько характерных пределов, то говорят соответственно о многозонной задаче. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что при выполнении условия $n>2m$ в области пограничного слоя, т.е. в окрестности точки x=0 существует два характерных предела, и при $n \le 2m$ в окрестности точки x=0 существует только один характерный предел.

Пусть x=$\varepsilon^\alpha t$, α>0, тогда dx=ε^αdt и уравнение (2) перепишется в виде:

$$\varepsilon^{n-\alpha} \frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} + (\varepsilon^\alpha t q(\varepsilon^\alpha t) + \varepsilon^m p(\varepsilon^\alpha t)) y_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t) . \quad (3)$$

а) Пусть $n > 2m$.

1) При α=n/2:

$$\varepsilon^{\frac{n}{2}-m} \left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + tq(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t) \right) + p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t) ; \quad (4)$$

2) при α=n–m:

$$\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + tq(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t) \right) + \varepsilon^{n-2m} p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t) ; \quad (5)$$

3) при α=m:

$$\varepsilon^{n-2m} \frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + (tq(\varepsilon^\alpha t) + p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t) , \quad (6)$$

где $\psi_\varepsilon(t) = \varepsilon^m y_\varepsilon(t)$.

В пограничном слое имеем два уравнения (5) и (6), решения которых обладают свойством погранфункций.

Так как n–m>m, поэтому изменение масштаба $\tau = \varepsilon^{m-n} x$ описывает пограничный слой вблизи начальной точки x=0, которую будем называть левой зоной, а изменение масштаба $t = \dfrac{x}{\varepsilon^m}$, определяет другую область, ее назовём средней зоной, так как она лежит между левой зоной и областью внешнего разложения – правой зоной.

б) Пусть $n \le 2m$, т.е. не выполняется $n > 2m$. Докажем, что в этом случае имеется только один характерный предел.

Рассмотрим сначала знак равенства, т.е. случай n =2m. При α=m, мы получим:

$$\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + (tq(\varepsilon^\alpha t) + p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t) , \quad (7)$$

где $\psi_\varepsilon(t) = \varepsilon^m y_\varepsilon(t)$.

Исследуем теперь случай, когда n < 2m. 1) При α=n/2:

$$\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + tq(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t) \right) + \varepsilon^{m-\frac{n}{2}} p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t) ; \quad (8)$$

2) при α=n–m:

$$\varepsilon^{2m-n}\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+tq(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)\,; \qquad (9)$$

3) при $\alpha=m$:

$$\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+\varepsilon^{2m-n}(tq(\varepsilon^\alpha t)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)\,, \qquad (10)$$

где $\psi_\varepsilon(t)=\varepsilon^m y_\varepsilon(t)$.

В пограничном слое имеем только (10).

Необходимость условия $n>2m$ можно доказать еще с помощью внешнего решения. Пусть $n=km$, $2<k\in\mathbf{N}$. Внешнее решение начальной задачи (2), ищется в виде:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_j(x)\,, \qquad (11)$$

где $y_j(x)$ – пока неизвестные функций.

Формально подставляя ряд (11) в уравнение (2) имеем:

$$\varepsilon^n\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y'_j(x)+(xq(x)+\varepsilon^m p(x))\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_j(x)=f(x),\ \ x\in[0,T],$$

последнее равенство можно записать в виде:

$$y'_{j-n}(x)+xq(x)y_j(x)+p(x)y_{j-m}(x)=f(x),\quad j=0,1,\ldots\qquad y_s(x)\equiv 0,\ s<0.$$

Отсюда находим:

$$y_j(x)=\frac{f(x)-p(x)y_{j-m}(x)-y'_{j-n}(x)}{xq(x)}\,,$$

в частности, при j=0: $y_0(x)=\dfrac{f(x)}{xq(x)}$. По условию $n=km$, $2<k\in\mathbf{N}$, поэтому

$$y_m(x)=-\frac{p(x)y_0(x)}{xq(x)}\,;\ \ y_{2m}(x)=-\frac{p(x)y_m(x)}{xq(x)}\,;$$

а при $j=n$:

$$y_n(x)=-\frac{p(x)y_{n-m}(x)+y'_0(x)}{xq(x)}\ \text{ или }\ y_{jm}(x)=-\frac{p(x)y_{m(j-1)}(x)+y'_0(x)}{xq(x)}\,.$$

Из этих выражений следует, что

$$y_k(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon^m}{x}\right)^k\tilde{y}_k(x),\ \ k\in N_0=N\cup\{0\},\ \ \tilde{y}_k\in C^\infty[0,1].$$

Это означает, что члены ряда

$$y_\varepsilon(x)=\frac{f(x)}{xq(x)}+\frac{1}{x}\frac{\varepsilon^m}{x}\tilde{y}_1(x)+\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon^m}{x}\right)^2\tilde{y}_2(x)+...+\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon^m}{x}\right)^j\tilde{y}_j(x)+... \qquad (12)$$

где $\tilde{y}_j\in C^\infty[0,1],\ j\in\mathbf{N}$, обладают свойством "нарастающей особенности", которое свойственно бисингулярным задачам.

Ряд (12) подсказывает каким должна быть внутренняя переменная в пограничном слое, т.е. $x=\varepsilon^m t$.

В уравнении (2) сделаем преобразование $x=\varepsilon^m t$:

$$\varepsilon^{m(k-1)}\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+(\varepsilon^m tq(\varepsilon^m t)+\varepsilon^m p(\varepsilon^m t))y_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^m t) \qquad (13)$$

если ввести обозначение $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-m}w_\varepsilon(t)$, тогда (13) примет вид:

$$\varepsilon^{m(k-2)}\frac{dw_\varepsilon(t)}{dt}+(tq(\varepsilon^m t)+p(\varepsilon^m t))w_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^m t) \qquad (14)$$

В левой части последнего равенства главным является выражение $(tq(\varepsilon^m t)+p(\varepsilon^m t))w_\varepsilon(t)$, потому что при ε=0 в левой части (14) остается только $(tq(0)+p(0))w_0(t)$. Мы получаем не дифференциальное уравнение. Это означает, что вблизи начальной точки существует еще одна погранслойная функция – решение дифференциального уравнения первого порядка, с помощью которой устраняется невязка (несогласованность) в начальной точке x=0.

Функция, удовлетворяющая равенству (14) будет промежуточным пограничным слоем.

Теорема доказана.

Теорема 3. Для решения задачи Коши (2) на отрезке $x\in[0,T]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^{mj}v_j(x)+\varepsilon^{-m}\sum_{j=0}^{s+1}\varepsilon^j(w_j(t)+\pi_j(\tau))+O(\varepsilon^{ms}),\ \varepsilon\to 0,$$

где $v_j(x)=\dfrac{f(x)-p(x)v_{j-1}(x)-v'_{j-k}(x)-h_j}{xq(x)}$, $2<k\in\mathbf{N}$, $v_j\in C^\infty[0,T]$,

$$h_0=f(0),\ h_1=-p(0)v_0(0),\ h_j=-(p(0)v_{j-1}(0)+v'_{j-k}(0)),$$

$$w_0(t)=\frac{h_0}{tq(t\varepsilon^m)+p(t\varepsilon^m)};\quad w_j(t)=\frac{h_j-w'_{(j-k+2)m}(t)}{tq(t\varepsilon^m)+p(t\varepsilon^m)},\ w_s\equiv 0, s<0.$$

$$\pi_j(\tau)=e^{-p_0\tau}c_j+e^{-p_0\tau}(c_{j,0}\tau+c_{j,1}\tau^2+...+c_{j,s}\tau^{s+1}),\ \ c_j,\ c_{j,k}=const.$$

Здесь для остаточного члена получена начальная задача:

$$MR_{s,\varepsilon} \equiv \varepsilon^n R'_{s,\varepsilon}(x) + (xq(x) + \varepsilon^m p(x))R_{s,\varepsilon}(x) = O(\varepsilon^{ms+m}),$$
$$x \in [0,T],\ R_{s,\varepsilon}(0) = 0 \tag{15}$$

Решение задачи (15) оценена двумя способами:

1-й способ. Интегрированием по частям явного решения:

$$R_{s,\varepsilon}(x) = O(\varepsilon^{ms+m-n}) e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} \int_0^x e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} d\xi =$$

$$= O(\varepsilon^{ms+m-n}) e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} \int_0^x \frac{\varepsilon^n}{\xi q(\xi) + \varepsilon^m p(\xi)} de^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} =$$

$$= O(\varepsilon^{ms+m-n}) e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} \left(\frac{\varepsilon^n}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)} e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} - \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^m p(0)} \right) +$$

$$+ O(\varepsilon^{ms+m}) e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} \int_0^x \frac{q(\xi)+\xi q'(\xi)+\varepsilon^m p'(\xi)}{(\xi q(\xi)+\varepsilon^m p(\xi))^2} e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} d\xi,\ \varepsilon \to 0.$$

Отсюда имеем: $R_{s,\varepsilon}(x) = O(\varepsilon^{ms}),\ \varepsilon \to 0.$

2-й способ. Методом сравнения (или методом барьерных функций) используя теорему Чаплыгина оценим решение задачи (15).

Пусть $d = \max\limits_{x\in[0,T]} \Phi(x,t,\tau)$,

$$z^{up}(x) = \frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)}\varepsilon^{ms+m},\quad z^{down}(x) = -\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)}\varepsilon^{ms+m},\ x\in[0,T].$$

Тогда

$$Mz^{up} > 0,\ Mz^{down} < 0,\ z^{up}(0) = \frac{d+1}{p(0)}\varepsilon^{ms} > 0,\ z^{down}(0) = -\frac{d+1}{p(0)}\varepsilon^{ms} < 0.$$

Действительно,

$$Mz^{up} \equiv \varepsilon^n \left(\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)}\varepsilon^{ms+m} \right)' + \varepsilon^{ms+m} + \varepsilon^{ms+m}(d-\Phi) =$$

$$= \varepsilon^{ms+m}\left(1 - \varepsilon^n \frac{(xq(x)+\varepsilon^m p(x))'}{(xq(x)+\varepsilon^m p(x))^2} d \right) + \varepsilon^{ms+m}\left(d-\Phi\right) > 0,\ 0<\varepsilon<<1;$$

$$Mz^{down} \equiv \varepsilon^n \left(-\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)} \varepsilon^{ms+m} \right)' - \varepsilon^{ms+m} - \varepsilon^{ms+m}(d+\Phi) =$$

$$= -\varepsilon^{ms+m} \left(1 - \varepsilon^n \frac{(xq(x)+\varepsilon^m p(x))'}{(xq(x)+\varepsilon^m p(x))^2} d \right) - \varepsilon^{ms+m} \left(d+\Phi \right) < 0,\ 0 < \varepsilon << 1;$$

Выполняются все условия теоремы Чаплыгина, поэтому

$$z^{down}(x) < R_\varepsilon(x) < z^{up}(x), x \in [0,T].$$

$$-\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)} \varepsilon^{ms+m} < R_\varepsilon(x) < \frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)} \varepsilon^{ms+m},\ \ x \in [0,T].$$

Приведен пример.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^3 y'_\varepsilon(x) + (x+\varepsilon) y_\varepsilon(x) = 1+2x,\ \ x \in [0,1],\ \ y_\varepsilon(0) = 1.$$

В приведенном примере *n=3, m=1, f(x)=1+2x.*

Внешнее решение:

$$y_\varepsilon(x) = \frac{1}{x}\left(1+2x+\frac{\varepsilon}{x}(2x^2-x-1)+\ldots+\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^k \tilde{y}_k(x)+\ldots \right).$$

Асимптотическое решение:

$$y_\varepsilon(x) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\Big(w_0(t)+\pi_0(\tau)+\varepsilon(w_1(t)+\pi_1(\tau))+\varepsilon^2(w_2(t)+\pi_2(\tau)) \Big) + O(\varepsilon^2),$$

где $x = \varepsilon t$, $x = \varepsilon^2 \tau$, $h_\varepsilon = 1-2\varepsilon$,

$$v_0(x) = \frac{1+2x-1}{x} = 2 \Rightarrow v_0(x) = 2\ \ v_1(x) = -\frac{2-2}{x} \Rightarrow v_1(x) \equiv 0;$$

$$w_0(t) = \frac{1}{1+t};\ \ w_1(t) = -\frac{2(t+1)^2-1}{(t+1)^3};\ \ w_2(t) = -\frac{2t^2+4t-1}{(t+1)^5};$$

$$\pi_0(\tau) = -e^{-\tau},\ \ \pi_1(\tau) = \frac{1}{2}\tau^2 e^{-\tau},\ \ \pi_2(\tau) = e^{-\tau} + \frac{1}{8}\tau^4 e^{-\tau}.$$

В следующих таблицах 1, 2 и 3 приведены результаты численного расчета, проведенной в системе Maple:

Таблица 1.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\mid y_\varepsilon(x) - \tilde{y}_\varepsilon(x) \mid$ **ε=0,1**	0,2	$8{,}2*10^{-2}$	$1{,}9*10^{-3}$	$5{,}1*10^{-4}$	$1{,}7*10^{-5}$	$7{,}2*10^{-6}$
$\mid y_\varepsilon(x) - \tilde{y}_\varepsilon(x) \mid$ ε=0,01	0,02	0	10^{-9}	10^{-9}	10^{-9}	0

Таблица 2.

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\lvert y_\varepsilon(x)-\tilde{y}_\varepsilon(x)\rvert$ **ε=0,001**	0,002	2*10^{-8}	1*10^{-8}	1*10^{-8}	0	0

Таблица 3.

x	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005
$\lvert y_\varepsilon(x)-\tilde{y}_\varepsilon(x)\rvert$ **ε=0,0001**	0,0002	10^{-6}	0	0	0	0

В третьем параграфе обобщается задача, исследованная в предыдущем параграфе 3.2. Выяснено влияние кратности особой точки на промежуточный пограничный слой. Найдено условие при выполнениях которого появляется промежуточный пограничный слой.

Исследуется задача Коши

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x)+(x^\gamma q(x)+\varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in[0,T],\quad y_\varepsilon(0)=a, \qquad (16)$$

где $n, m, \gamma\in\mathbf{N}$, a – const, $f(0)\neq 0$, $f, q, p\in C^\infty[0,T]$, $0<c_0<q(x)$, $0<c_0<p(x): x\in[0,T]$, γ – кратность особой точки x=0.

Доказаны

Теорема 4. Если $n>m+\dfrac{m}{\gamma}$, то начальная задача (16) является трех зонной бисингулярной задачей.

Для удобства вычислений будем считать, что $n=mk,\ 1+\dfrac{1}{\gamma}<k\in N$ и введем обозначение $\varepsilon^m=\lambda$ – малый параметр. Тогда задача (16) примет вид:

$$\lambda^k y'_\lambda(x)+(x^\gamma q(x)+\lambda p(x))y_\lambda(x)=f(x),\ x\in[0,T],\quad y_\varepsilon(0)=a, \qquad (17)$$

Теорема 5. Для решения задачи Коши (17) при $k>1+\dfrac{1}{\gamma}$ на отрезке $x\in[0,T]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y_\lambda(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j v_j(x)+\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w_j(t)+\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi_j(\tau),\ \varepsilon\to 0.$$

где $v_i(x)=\dfrac{f(x)-p(x)v_{i-1}(x)-v'_{i-k}(x)-h_i(x)}{x^\gamma q(x)}$, $2<k\in\mathbf{N}$, $v_j\in C^\infty[0,T]$,

$$h_j(x)=\sum_{i=0}^{\gamma-1}f_{j,i}x^i,\quad f_{j,i}=\frac{1}{i!}f_j^{(i)}(0),\ f_0(x)\equiv f(x),\ f_1(x)=-p(x)v_0(x),$$

$$f_j(x)=-(p(x)v_{j-1}(x)+v'_{j-k}(x)),\ \ v_s(x)\equiv 0, s<0;\ w_0(t)=\frac{h_0(t\mu)}{t^\gamma q(t\mu)+p(t\mu)},$$

$$w_j(t)\equiv 0,\quad j=0,1,...,\gamma(k-1)-2;\ w_{\gamma(k-1)-1}(t)=-\frac{w'_0(t)}{t^\gamma q(t\mu)+p(t\mu)},$$

$$w_{\gamma j}(t)=\frac{h_j(t\mu)-w'_{j\gamma-\gamma(k-1)+1}(t)}{t^\gamma q(t\mu)+p(t\mu)},\ \ w_s(t)=-\frac{w'_{s-\gamma(k-1)+1}(t)}{t^\gamma q(t\mu)+p(t\mu)},\ s\neq\gamma j;$$

$$\pi_j(\tau)=e^{-p_0\tau}c_j+e^{-p_0\tau}(c_{j,0}\tau+c_{j,1}\tau^2+...+c_{j,s}\tau^{s+1}),\ \ c_j,\ c_{j,k}=const.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^2 y'_\varepsilon(x)+(x^3+\varepsilon)y_\varepsilon(x)=1-x^2+x^4+x^5,\ \ x\in[0,1],\ \ y_\varepsilon(0)=2.$$

В данном примере

n=2, m=1, γ=3, $f(x)=1-x^2+x^4+x^5$, a=2, $x=t\mu,\ \mu=\varepsilon^{1/3},\ x=\tau\varepsilon$.

Поэтому

$$y_\varepsilon(x)=v_0(x)+\varepsilon v_1(x)+\varepsilon^2 v_2(x)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left(w_0(t)+\mu w_1(t)+\mu^2 w_2(t)+\mu^3 w_3(t)+\mu^4 w_4(t)+\mu^5 w_5(t)+\mu^6 w_6(t)\right)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(\pi_0(\tau)+\varepsilon\pi_1(\tau)+\varepsilon^2\pi_2(\tau))+O(\varepsilon^2),\ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,T].$$

где $v_0(x)=\dfrac{1-x^2+x^4+x^5-h_0(x)}{x^3}=x+x^2,\quad h_0(x)=1-x^2;$

$$v_1(x)=-\frac{v_0(x)+h_1(x)}{x^3}=-\frac{x+x^2+h_1(x)}{x^3}=0,\ \ h_1(x)=-x-x^2;$$

$$v_2(x)=-\frac{v_1(x)+v'_0(x)+h_2(x)}{x^3}=-\frac{1+2x+h_2(x)}{x^3}=0,\ \ h_2(x)=-1-2x;$$

$$v_i(x)\equiv 0,\ h_i(x)\equiv 0;\ 2<i\in\mathbf{N};$$

$$w_0(t)=\frac{1-t\mu}{t^3+1},\quad w_1(t)\equiv 0,\quad w_2(t)=-\frac{w'_0(t)}{t^3+1},\ w_3(t)=-\frac{t\mu+(t\mu)^2}{t^3+1},$$

$$w_4(t)=-\frac{w'_2(t)}{t^3+1},\ w_5(t)=-\frac{w'_3(t)}{t^3+1},\ w_6(t)=-\frac{1+2t\mu+w'_4(t)}{t^3+1},$$

$$\pi_0(\tau)=-(1-\varepsilon)e^{-\tau},\ \ \pi_1(\tau)=(2-\varepsilon)e^{-\tau},\ \pi_2(\tau)=-6e^{-\tau}+\frac{\tau^4}{4}(1-\varepsilon)e^{-\tau}.$$

В главе под названием “ГЛАВА 4. ТРЕХ ЗОННЫЕ БИСИНГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА” найдены достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Дирихле для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений трех зонных бисингулярных задач Дирихле.

В параграфе 4.1 построена асимптотика решения трех зонной задачи Дирихле:

$$\varepsilon^3 y_\varepsilon''(x) + x^4 y_\varepsilon'(x) + (x^4 - \varepsilon) y_\varepsilon(x) = f(x), \ x \in [0,1], \tag{18}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \ y_\varepsilon(1) = b, \tag{19}$$

где a, b – известные постоянные, $f \in C^\infty[0,1], \ f(0) \neq 0$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

С помощью преобразования $y_\varepsilon(x) = be^{1-x} z_\varepsilon(x)$, где $z_\varepsilon(x)$ – новая неизвестная функция, задача (18)-(19) приводится к виду:

$$\varepsilon^3 z_\varepsilon''(x) + (x^4 - 2\varepsilon^3) z_\varepsilon'(x) + (\varepsilon^3 - \varepsilon) z_\varepsilon(x) = \tilde{f}(x), \ x \in [0,1], \tag{20}$$

$$z_\varepsilon(0) = \tilde{a}, \ z_\varepsilon(1) = 1, \tag{21}$$

где $\tilde{f}(x) = \dfrac{1}{b} e^{x-1} f(x)$.

Доказана

Теорема 6. Для решения двухточечной краевой задачи (18) и (19) на отрезке $x \in [0,1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y_\varepsilon(x) = be^{1-x} \left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(x) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k \pi_k(\tau) + \frac{1}{\mu^3} \sum_{k=0}^{3n+3} \mu^k w_k(t) \right) + O(\varepsilon^n), \ \varepsilon \to 0,$$

где $v_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(x)$ – гладкое внешнее решение; $w_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{\mu^3} \sum_{k=0}^{3n+3} \mu^k w_k(t)$ – промежуточное не экспоненциально, а степенным характером убывающее погранслойное решение, $t = x/\mu, \ \mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$;

$\pi_\varepsilon(\tau) = \dfrac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k \pi_k(\tau)$ – экспоненциально убывающее погранслойное решение, $\tau = x/\varepsilon$.

В § 4.2 исследован случай квадратичного роста сингулярности в сингулярной точке x=0.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\varepsilon^4 y''_\varepsilon(x) + x^2 p(x) y'_\varepsilon(x) - \varepsilon q(x) y_\varepsilon(x) = f(x), \ x \in [0,1], \tag{20}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \ y_\varepsilon(1) = b, \tag{21}$$

где a, b – известные постоянные, $0 < c_0 < p(x), \ 0 < c_0 < q(x), f(x)$ – бесконечно дифференцируемые известные функций на отрезке $x \in [0,1]$,

$p(0)=p_0$, $q(0)=q_0$, а $y'_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Доказана

Теорема 7. Решение краевой задачи (20), (21) на отрезке $x\in[0,1]$, при $\varepsilon\to 0$ представимо в виде

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n+1}\varepsilon^k w_k(t)+\frac{1}{\mu^2}\sum_{k=0}^{2n+2}\mu^k\pi_k(\tau)+R_{n,\varepsilon}(x),$$

где $|R_{n,\varepsilon}(x)|\le \varepsilon^n c,\ 0<c-\text{const},\ v_k\in C^\infty[0,1],$

$$v_0(x)=\int_1^x\frac{f(s)-(h_{0,0}+h_{0,1}s)}{s^2p(s)}ds+b\ ,\ h_{0,0}=f(0),\ h_{0,1}=f'(0),$$

$$v_1(x)=\int_1^x\frac{q(s)v_0(s)-(h_{1,0}+h_{1,1}s)}{s^2p(s)}ds\ ,$$

$$h_{1,0}=q(0)v_0(0),\ h_{1,1}=q'(0)v_0(0)+q(0)v'_0(0),$$

$$v_k(x)=\int_1^x\frac{q(s)v_{k-1}(s)-v''_{k-4}(s)-(h_{k,0}+h_{k,1}s)}{s^2p(s)}ds,\ k\in N,\ v_s(x)\equiv 0,\ s<0\ ,$$

$$h_{k,0}=q(0)v_{k-1}(0)-v''_{k-4}(0),\ h_{k,1}=q'(0)v_{k-1}(0)+q(0)v'_{k-1}(0)-v'''_{k-4}(0)\ ,$$

$$w_0(t)=e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon\varphi}{\varphi^2p(\varepsilon\varphi)}e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}d\varphi\,,$$

$$w_k(t)=e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{h_{k,0}+h_{k,1}\varepsilon\varphi-w''_{k-1}(\varphi)}{\varphi^2p(\varepsilon\varphi)}e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}d\varphi,\ \ k\in N.$$

$$\pi_0(\tau)=-w_0(0)e^{-\sqrt{q_0}\,\tau},\ \pi_2(\tau)=(a-v_0(0)-w_1(0))e^{-\sqrt{q_0}\,\tau}+P_1(\tau,\mu\tau)e^{-\sqrt{q_0}\,\tau},$$

$$\pi_{2k}(\tau)=-(v_{k-1}(0)+w_k(0))e^{-\sqrt{q_0}\,\tau}+P_{2k}(\tau,\mu\tau)e^{-\sqrt{q_0}\,\tau},\ \pi_{2k-1}(\tau)=P_{2k-1}(\tau,\mu\tau)\mathrm{e}^{-\sqrt{q_0}\,\tau},$$

$P_s(\tau,\mu\tau)$ – полиномы, при τ=0: $P_s(0,0)\equiv 0$.

В § 4.3 обобщается результаты предыдущих параграфов. Рассматривается уравнение:

$$\varepsilon^n y_\varepsilon''(x)+x^k p(x)y_\varepsilon'(x)-(x^kq(x)+\varepsilon^m r(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ \ x\in[0,1],\quad (22)$$

с краевыми условиями (21), где a,b – известные постоянные числа, $p,q,r,f\in C^\infty[0,1],\ f(0)\ne 0$, $0<c_0<p(0)$, $0<c_0<q(0)$, $0<r(0)$, $n>m$, $1<k$, $(n,k,m\in N)$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Доказана теорема

Теорема 8. Если $m < \dfrac{n(k-1)}{k+1}$, то в задаче Дирихле (22), (21) в окрестности левой граничной точки $\boldsymbol{x}$=0 существует еще один пограничный слой – промежуточный не экспоненциальный пограничный слои, кроме классического пограничного слоя, т.е. (22), (21) будет трех зонной бисингулярной задачей.

Теорема 9. Для решения двухточечной краевой задачи Дирихле (22), (21) на отрезке $x \in [0,1]$ при $m < \dfrac{n(k-1)}{k+1}$ и ε→0 справедливо асимптотическое разложение:

$$y_\varepsilon(x) = \left(\sum_{j=0}^{s} \varepsilon^{jm} v_j(x) + \frac{1}{\mu^{(k-1)m}} \sum_{j=0}^{(k-1)(s+1)m} \mu^j w_j(t) + \frac{1}{\lambda^{2m}} \sum_{j=0}^{2m(s+1)} \lambda^j \pi_j(\tau) \right) e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds} + O(\varepsilon^{ms}),$$

где $\sum_{j=0}^{s} \varepsilon^{jm} v_j(x)$ – гладкое внешнее решение; $\sum_{j=0}^{(k-1)(s+1)m} \mu^j w_j(t)$ – промежуточное не экспоненциально, а степенным характером убывающее погранслойное решение, $t = x/\mu^m$, $\mu = \sqrt[k-1]{\varepsilon}$;

$\sum_{j=0}^{2m(s+1)} \lambda^j \pi_j(\tau)\ \pi_\varepsilon(\tau)$ – экспоненциально убывающее погранслойное решение, $\tau = x/\lambda^{n-m}, \lambda = \sqrt{\varepsilon}$. Приведен конкретный пример.

Пример 3. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^4 y''_\varepsilon(x) + x^2 y'_\varepsilon(x) - (x^2+\varepsilon) y_\varepsilon(x) = 1 + x + x^2, \quad y_\varepsilon(0) = -1,\ y_\varepsilon(1) = 1. \quad (23)$$

Тогда асимптотическое решение задачи (23) представимо в виде:

$$y_\varepsilon(x) = e^{x-1}\left(1 + \int_1^x \frac{(1+s+s^2)e^{1-s} - e}{s^2} ds + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \int_1^x \frac{1}{s^2}\left(1 + \int_1^s \frac{(1+u+u^2)e^{1-u} - e}{u^2} du - 3 + e - \frac{e}{2}s\right) ds - \frac{1}{\varepsilon} e\left(1 - e^{\varepsilon - \frac{1}{t}}\right) + \right.$$

$$+ e^{-\frac{1}{t}}\left(-\frac{3-e}{t} + \frac{e}{2}\varepsilon \ln t - \frac{1}{2t^4} e^{1+\varepsilon} + \frac{1}{5t^5} e^{1+\varepsilon} + \varepsilon(3-e) - \frac{e}{2}\varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon^4}{2} e^{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon^5}{5} e^{1+\varepsilon}\right) -$$

$$- \varepsilon e^{-\frac{1}{t}} \int_{1/\varepsilon}^{t} \frac{w''_1(s) + 2w'_0(s)}{s^2} e^{\frac{1}{s}} ds + \frac{1}{\lambda^2} e^{1-\tau} - \frac{1}{12\lambda} e^{1-\tau} \tau(2\tau^2 + 3\tau + 3) +$$

$$- (4-e)e^{-\tau} + \tau \frac{20\tau^5 + 24\tau^4 + 15\tau^3 - 30\tau^2 - 45\tau - 45}{1440} e^{1-\tau} +$$

$$+\lambda\tau P_8(\tau)e^{1-\tau} - \lambda^2(v_1(0+w_1(0))e^{-\tau} + \lambda^2\tau P_{11}(\tau)e^{1-\tau} + O(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследованы трех зонные бисингулярные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Впервые:

- найдены достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Коши для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.
- построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений трех зонных бисингулярных задач Коши.
- найдены достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса бисингулярных задач Дирихле для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.
- построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений трех зонных бисингулярных задач Дирихле.

С помощью оригинального подхода, суть которого в том, что вместо универсального метода согласования асимптотических разложений, разработанного и успешно применяемого в научной школе А.М. Ильина, используется метод вспомогательной функции, позволяющий получить равномерное асимптотическое разложение для рассматриваемого класса задач с помощью более простой процедуры.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Рекомендуем использовать научные результаты диссертации в физике, химии, в биологии, теории движения, гидродинамике, аэродинамике и других областях науки.

Надеемся, что разработанные алгоритмы построения асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков найдут практические применения.

Результаты исследования также могут быть использованы при чтении лекционных курсов по теории возмущений, преподавании спецкурсов по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Физико-математическое образование», «Математика и компьютерные науки» для аспирантов, PhD докторов, магистров и бакалавров. Кроме того, мы рекомендуем использовать научные результаты при решении теоретических задач в области математики, физики, техники и других наук, связанных с качественной теорией дифференциальных уравнений.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Омаралиева, Г.А.** Достаточное условие существования дополнительной зоны в сингулярно возмущенных краевых задачах второго порядка [Текст] / Г.А. Омаралиева // Бюллетень науки и практики. – 2023. – Т. 9. – № 2. – С. 10-16. DOI: 10.33619/2414-2948/87/01

2. **Омаралиева, Г.А.** Промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенных уравнениях первого порядка [Текст] / Г.А. Омаралиева, Д.А. Турсунов // Труды Института математики и механики Уральского отделения Российской академии наук. – 2022. –Т. 28. – № 2. – С. 193-200. DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-193-200

3. **Omaralieva, G.A.** Asymptotics of the Solution of Bisingular Boundary Value Problems with a Biboundary Layer [Text] / G.A. Omaralieva, K.G. Kozhobekov, D.A. Tursunov // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022. – Vol. 43. – no. 11. –P. 166–172. DOI: 10.1134/S1995080222140190

4. **Омаралиева, Г.А**. Бисингулярно возмущенное уравнение первого порядка с бипограничным слоем [Текст] / Г.А. Омаралиева, Д.А. Турсунов, Н. Э. Муса уулу // Вестник ОшГУ. – 2022. – № 4. – С. 244-251. DOI: 10.52754/16947452_2022_4_244

5. **Омаралиева, Г.А.** Асимптотика решения трех зонной задачи Коши [Текст] / Г.А. Омаралиева // Вестник ЖАГУ. – 2022. – № 4. – С. 17-22. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50422789

6. **Омаралиева, Г.А.** Асимптотика решения двух зонной двухточечной краевой задачи [Текст] / Г.А. Омаралиева, Д.А. Турсунов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13. – № 2. – С. 40–46. DOI: 10.14529/mmph210207

7. **Омаралиева, Г.А.** Сингулярно возмущенная задача с двойным пограничным слоем [Текст] / Г.А. Омаралиева, Д.А. Турсунов, М.И. Маматбуваева, Ш.А. Раманкулова // Вестник ОшГУ. – 2021. – Т. 1. – № 1. – С. 102-109. DOI: 10.52754/16947452_2021_1_1_102

8. **Omaralieva, G.A.** Three-band boundery boundary value problem [Text] / G.A. Omaralieva, D.A. Tursunov, M.O. Orozov // Theses of international scientific conference “Problem of modern mathematics and its applications”. Kyrgyzstan, Bishkek-Issyk-Kul, 16-19 June, 2021. – P. 67.

9. **Omaralieva, G.A.** Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem with additional boundary layer [Text] / G.A. Omaralieva, D.A. Tursunov // MADEA-8 International Conference. Kyrgyzstan-Turkey-Ukraine. Bishkek. – 2018. – P. 128.

Омаралиева Гулбайра Абдималиковнанын «Үч зоналуу бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасы» деген темадагы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: үч зоналуу маселе, аралык чектик катмар, экспоненциалдуу эмес чектик катмар, кичи параметр, асимптотикалык чыгарылыш, сингулярдык козголгон маселе, бисингулярдык маселе, өзгөчө чекит, дифференциалдык барабарсыздыктар методу, жалпыланган чектик функциялар методу.

Изилдөө объектиси: Үч зоналуу бисингулярдык маселелер.

Изилдөө предмети: 1) биринчи жана экинчи тартиптеги сызыктуу бисингулярдуу кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн маселелерде аралык чектик катмардын пайда болуу шарттарын табуу; 2) үч зоналуу бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларын тургузуу.

Иштин максаты. Биринчи жана экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасын тургузуу.

Изилдөөнүн методдору жана аппараты: бөлүктөп интегралдоо, биринчи жана экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелерди интегралдоо, кичи параметр, чектик функциялардын классикалык, чектик функциялардын жалпыланган методдоруу, салыштыруу, дифференциалдык барабарсыздык методу жана максимум принцип.

Алынган натыйжалар жана алардын жаңылыгы. Алгачкы жолу биринчи жана экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу бисингулярдык маселелердин бир классында аралык экспоненциалдуу эмес түрдө кемүүчү чектик катмарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттар табылды. Алгачкы жолу биринчи жана экинчи тартиптеги үч зоналуу бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын толук, бир калыптагы асимптотикалык ажыралмалары тургузулду жана негизделди.

Колдонуу даражасы же колдонуу боюнча сунуштар. Жумуш теориялык мазмунда болгону менен, анын натыйжалары козголуулар теориясында, гидродинамикада, аэродинамикада жана илимдин башка тармактарында колдонулушу мүмкүн.

Колдонуу жааты. Ушул сыяктуу маселелер гидродинамикада, физикада, аэродинамикада, океанологияда, астрономияда ж.б. илимдин аймактарында жана техникада кездешет.

РЕЗЮМЕ

Диссертации Омаралиевой Гулбайры Абдималиковны на тему: «Асимптотика решения трех зонных бисингулярных задач» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: трех зонная задача, промежуточный пограничный слой, не экспоненциальный пограничный слой, малый параметр, асимптотическое решение, сингулярно возмущенная задача, бисингулярная задача, особая точка, метод дифференциальных неравенств, обобщенный метод погранфункций.

Объект исследования: Трех зонные бисингулярные задачи.

Предмет исследования: найти условия при которых появляются промежуточные пограничные слои в линейных бисингулярных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнениях первого и второго порядков; построение равномерных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач.

Цель работы. Построение асимптотики решения трех зонных бисингулярных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Методы исследования и аппаратура: интегрирования по частям, интегрирования линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков, малого параметра, классический метод пограничных функций, обобщенный метод пограничных функций, сравнения, дифференциальных неравенств и принцип максимума.

Полученные результаты и их новизна. Впервые найдены достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса трех зонных бисингулярных задач первого и второго порядков. Впервые построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений трех зонных бисингулярных задач первого и второго порядков.

Степень использования или рекомендации по использованию. Научные результаты могут быть применены в теории возмущений, гидродинамике, аэродинамике и в других отраслях науки.

Область применения. Подобные задачи встречаются в гидродинамике, физике, аэродинамике, океанологии, астрономии и др. областях науки и техники.

SUMMARY

Omaralieva Gulbayra Abdimalikovna Dissertation «Asymptotics of solving three zone bisingular problems» for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences (specialty 01.01.02 **–** differential equations, dynamical systems and optimal control**)**

Key words: three zone problem, intermediate boundary layer, nonexponential boundary layer, small parameter, asymptotic solution, singularly perturbed problem, bisingular problem, singular point, method of differential inequalities, generalized method of boundary layer functions.

Object of research. Three-zone bisingular problems.

Subject of research: to find the conditions under which intermediate boundary layers appear in linear bisingular problems for ordinary differential equations of the first and second orders; construction of uniform asymptotic expansions of solutions to three zone bisingular problems.

Purpose of work. Construction of asymptotics for the solution of three zone bisingular problems for ordinary differential equations of the first and second orders.

Research methods and equipment: integration by parts, integration of linear inhomogeneous ordinary differential equations of the first and second orders, small parameter, classical method of boundary functions, generalized method of boundary functions, comparison, differential inequalities and the maximum principle

The results obtained and their novelty. For the first time, sufficient and necessary conditions for the existence of an intermediate non-exponentially decreasing boundary layer for one class of three zone bisingular problems of the first and second orders are found. For the first time, complete, uniform asymptotic expansions of solutions of three zone bisingular problems of the first and second orders were constructed and justified.

Degree of use or recommendations for use. Scientific results can be applied in perturbation theory, hydrodynamics, aerodynamics and other branches of science.

Application area. Similar problems are encountered in hydrodynamics, physics, aerodynamics, oceanology, astronomy, and other fields of science and technology.

Подписано в печать: 19.10.2023 г.
Обьем: 1,5 п.л. Заказ № __
Формат 60х90 1/16. Тираж 120 экз.

Редакционно-издательский отдел “Билим” ОшГУ
г. Ош, ул. Ленина, 331.