КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

**Е.С. Федорова, Н.С. Ткаченко**

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГИИ

**Методическое пособие**
**по специальности «Психология»**

Издательство Кыргызско-Российского
Славянского университета

Бишкек 2005

Ф 33

**Федорова Е.С., Ткаченко Н.С.**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГИИ: Методическое пособие по специальности «Психология». – Бишкек: КРСУ, 2005. – 172 с.

Рассмотрены основные методы расчета параметрических и непараметрических критериев. Теоретический материал снабжен примерами решения задач. В основу подготовки учебного пособия взята работа Е.В. Сидоренко «Методы математической обработки в психологии». По каждой теме кратко излагаются основные теоретические сведения, приводятся примеры решения задач; предлагаются задачи для самостоятельной работы и приложения для расчетов критериев.

Для студентов-психологов, изучающих математические методы в психологии, а также смежные дисциплины на медицинском и юридическом факультетах и др.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент *С.С. Мищенко*

Печатается по решению кафедры высшей математики
и РИСО КРСУ

## Введение

Связь психологии и математики в последние годы становится все белее тесной и многоплановой. Различные статистические методы, используются в психологии при анализе и обработке данных эксперимента, применяются различного рода математические методы и модели. Чем чаще идеи математического моделирования связывают с вопросами формализации психических процессов и явлений. Все это привело к разработке специальных вопросов методологии и теории, а применение математики в психологии стало предметом особой дисциплины – математической психологии.

Поэтому основная цель курса «Математические методы в психологии» состоит в том, чтобы научить студентов основным методам количественного анализа и обработки психических процессов и явлений и обеспечить им свободную ориентацию во всем многообразии существующих математических моделей и методов.

Задачи данного курса включают:

- формирование навыков составления и анализа математических моделей реальных задач в психологии и развитие соответствующей интуиции;
- обучение методам правильного сочетания качественного и количественного анализа психологических признаков;
- выработку навыков отбора данных, необходимых для количественного анализа психического процесса или явления, и оценки требуемой точности этих данных;
- обучение выбору наиболее подходящего метода исследования из всего спектра имеющихся;
- формирование привычки доведения исследования до практически приемлемых результатов;
- обучение методом контроля правильности решения задачи.

Изучение курса «Математические методы в психологии» базируется на знаниях, полученных студентами при изучении специальных дисциплин по психологии и разделов математики, изучаемых в школе и на первом, втором курсах вуза.

## Методика изучения курса «Математические методы в психологии»

Основной формой обучения является самостоятельная работа студента над учебным материалом; по данному курсу она складывается из чтения учебников, решения задач, выполнения контрольных заданий. В помощь студентам университет организует чтение лекций и практические занятия. Кроме этого, студент имеет возможность обращаться с вопросами к преподавателю для письменной или устной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольной работы. Однако студент должен помнить, что только при самостоятельной систематической и упорной работе помощь университета будет достаточно эффективной. Студент не должен допускать больших перерывов в работе над примерами.

Завершающим этапом изучения этого курса является сдача студентом экзамена или зачета.

### 1. Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к последующему материалу только после правильного понимания предыдущего, преодолевая на бумаге все вычисления, воспроизводя все имеющиеся в учебнике чертежи, диаграммы, таблицы и т.д.
2. Особое внимание следует обращать на определения основных понятий, которые отражают количественную сторону реальных объектов и процессов и возникают в результате абстракции из этих свойств и процессов.

Студент должен запоминать алгоритм решения той или иной задачи и пользоваться им при решении задачи, которую он должен придумать самостоятельно.

При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в которой заносить основные определения, правила, термины, алгоритмы, формулы и т.д.

На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для письменной или устной консультации с преподавателем.

### 2. Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, относящихся к изучаемому разделу курса, которое следует начинать с разбора решенных задач в учебниках и в настоящем пособии.
2. Прежде чем начать решать задачу, надо выяснить, что в ней дано и что надо найти. Затем надлежащим образом выбрать алгоритм решения.
3. Все задачи следует решать подробно, без пропусков, в специальной тетради; вычисления должны располагаться в определенном порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных.
4. Если решение задачи можно производить с использованием нескольких алгоритмов, то это следует сделать, а затем сравнить полученные результаты.
5. Полученный ответ задачи следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи и сопоставлять его с реальной возможностью.

## 3. Контрольные работы

1. В процессе изучения курса «Математические методы в психологии» студент должен выполнить одну контрольную работу. Главная цель контрольных работ – оказать студенту помощь в его работе.
2. Не следует приступать к выполнению контрольной работы, не разобрав подробно решения аналогичных задач в учебнике или в этом пособии. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.
3. Контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Не самостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю указать студенту на недостатки усвоения им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к экзамену или зачету.
4. При выполнении и оформлении контрольной работы студент должен придерживаться следующих правил:

а) контрольную работу надо выполнять в тетради, а не на отдельных листах, не пользуясь красным цветом, оставляя поля для замечаний преподавателя; указывать использованную литературу;

б) в заголовке контрольной работы должен быть четко написаны фамилия студента, его инициалы, номер шифра зачетной книжки, факультет, группа, курс, форма обучения, предмет, по которому выполнена контрольная работа, номер варианта;

в) контрольная работа должна быть зарегистрирована у методиста факультета;

г) решения контрольных задач следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях; перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие;

д) решения задач и объяснения к ним следует излагать подробно, аккуратно, без сокращения слов.

5. Контрольные работы, выполненные небрежно, без промежуточных вычислений, с пропусками задач и вообще без соблюдения изложенных выше правил, возвращаются обратно студенту для переработки. Также не зачитываются и возвращаются студенту контрольные работы, списанные с чужих работ или выполненные не по своему варианту.

6. По получении из института прорецензированной работы (как не зачтенной, так и зачтенной) студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты.

Если рецензент предлагает переделать в работе ту или иную задачу или выполнить работу над ошибками, то это необходимо сделать в конце этой же тетради и сдать ее на повторную проверку, вновь зарегистрировав работу у методиста деканата; обязательно к работе должна быть приложена рецензия.

7. Без зачтенной контрольной работы студент не допускается к сдаче экзамена или зачета.

8. Контрольная работа должна быть сдана за 10 дней до начала сессии.

9. Выбор варианта контрольной работы производится по последней цифре номера (шифра) личного дела студента согласно следующей таблице.

| **Номер заканчивается цифрой** | **Номера задач** |
|---|---|
| 1 | 1, 11, 21, 31, 41. |
| 2 | 2, 12, 22, 32, 42. |
| 3 | 3, 13, 23, 33, 43. |
| 4 | 4, 14, 24, 34, 44. |

| | |
|---|---|
| 5 | 5, 15, 25, 35, 45. |
| 6 | 6, 16, 26, 36, 46. |
| 7 | 7, 17, 27, 37, 47. |
| 8 | 8, 18, 28, 38, 48. |
| 9 | 9, 19, 29, 39, 49. |
| 0 | 10, 20, 30, 40, 50. |

## ***Программа курса***

1. Введение. Значение математики в психологии.
2. Предмет и основные методы математической статистики.
3. Выборочный метод. Вариационные ряды. Графики рядов.
4. Числовые выборочные характеристики и их расчеты.
5. Статистическое оценивание.
6. Основные понятия, используемые в математической обработке психологических данных (признаки и переменные; шкалы измерений; распределение признака; параметры распределения; статистические гипотезы и критерии; уровни статистической достоверности).
7. Выявление различий в уровне исследуемого признака (критерий Розенбаумана; критерий Манна–Уитни; критерий Крускала-Уоллиса; критерий тенденций Джонкера).
8. Оценка достоверности сдвига в значениях исследуемого признака (критерии знаков, Вилкоксона, $X_r^S$, тенденций Пейджа).
9. Выявление различий в распределении признака (критерии Пирсона, критерий Колмогорова – Смирнова).
10. Многофункциональные статистические критерии (угловое преобразование Фишера (критерий $\varphi^*$)), биноминальный критерий *m.*
11. Ранговая корреляция.
12. Дисперсионный анализ.

## ***Литература***

*Основная*


1. *Сидоренко Е.В.* Методы математической обработки в психологии. Речь. – СПб., 2000.

2. Общий курс высшей математики (для экономистов) / Под ред. проф. В.И. Ермакова, разд. С, II, стр. 463-516. – М.: ИНФРА-М, 2001.
3. *Артемьева Е.Ю.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для психологов. – М., МГУ, 1969.

*Дополнительная*

4. Психология и математика. – М.: Наука, 1976.
5. *Голикова Т.И., Никитина Е.П., Терехин А.Т.* Математическая статистика. – М.: МГУ, 1981.
6. *Урбах В.Ю.* Биометрические методы. – М.: Наука, 1964.
7. *Лакин Г.Ф.* Биометрия. – М.: Высш. школа, 1980.
8. *Рокицкий П.Ф.* Биологическая статистика. Минск: В.ш. 1987.
9. *Пустыльнина Е.И.* Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, 1986.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

### Тема 1. *Построение вариационных рядов*

***Литература:*** [6] гл.1, § 1, § 2, стр.11–24; [7], гл. 2, стр. 30–39; [8], гл. 1, стр. 9–20.

При статистической обработке экспериментальных данных удобно представить их в виде вариационного ряда. Если изучаемый признак варьирует (изменяется) дискретно (число лиц, подверженных какому-либо психологическому эксперименту; число групп, на которые разбита вся исследуемая совокупность и т.д.), то ему соответствует дискретный вариационный ряд; если же признак варьирует непрерывно (время выполнения некоторого задания, скорость реакции на возбудитель и т.д.), то ему соответствует интервальный вариационный ряд.

***Пример 1.*** Построить вариационный ряд, имея протокол подсчета числа «холериков» среди 60 групп студентов различных курсов большого столичного вуза республики:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 5 | 4 | 6 | 4 | 2 | 4 | 4 | 5 | 3 | 1 | 3 | 5 | 4 |
| 3 | 5 | 4 | 2 | 4 | 4 | 5 | 5 | 2 | 2 | 3 | 5 | 6 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 5 | 4 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 4 | 3 | 4 | 5 | 3 |
| 4 | 3 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5 | 5 | 3 | 3 | 3 | 4 |

***Решение.*** Заготовим таблицу, разделенную на три вертикальные колонки. В первую колонку под названием «Варианты» запишем в порядке возрастания все возможные значения изучаемого признака. Просматривая подряд заданный протокол, заполняем вторую, более широкую колонку под названием «пометки». Так, в протоколе первым встречается число 5, поэтому во второй колонке мы ставим вертикальную черточку против варианты 5; вторым является число 3, и ставится черточка против варианты 3; третье число 4, поэтому ставим черточку против варианты 4; четвертое число тоже 4, поэтому ставим вторую черточку против варианты 4, и т. д. Для упрощения последующего подсчета удобно пометки группировать по пять (пятая черточка перечеркивает первые четыре). В третьей колонке под названием «Частота» подсчитываем число вертикальных черточек в каждой строке. Сумма частот ( $n_i$ ) должна совпадать с объемом протокола

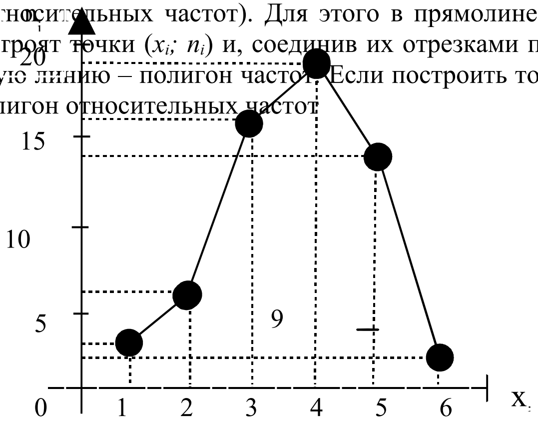
| Варианта ( $x_i$ ) | Пометки | Частоты ( $n_i$ ) | Частоты $n_i / n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | /// | 3 | 0,05 |
| 2 | //// / | 6 | 0,10 |
| 3 | //// //// //// / | 16 | 0,27 |
| 4 | //// //// //// //// | 19 | 0,32 |
| 5 | //// //// //// | 14 | 0,23 |
| 6 | // | 2 | 0,03 |
| $\sum$ | | 60 | 1,00 |

Здесь $\sum n_i = 0$ – объем изучаемой совокупности, т.е. $n = 60$;

$v_i = \dfrac{n_i}{n}$ – относительная частота (частость);

$v_1 = \dfrac{3}{60} = 0{,}05$ ; $v_2 = \dfrac{6}{60} = 0{,}1$ и т.д. Очевидно, что $\sum v_i = 1$.

Графиком составленного вариационного ряда служит полигон частот (или относительных частот). Для этого в прямолинейной системе координат строят точки ($x_i;\ n_i$) и, соединив их отрезками прямых, получают ломаную линию – полигон частот. Если построить точки ($x_i;\ v_i$), то получим полигон относительных частот



***Замечание:*** *В данной задаче признак – «число холериков» – варьирует дискретно, поэтому был построен дискретный вариационный ряд.*

Если изучаемый признак варьирует непрерывно, то строят интервальный вариационный ряд. В этом случае надо решить вопрос о числе интервалов. При выборе числа интервалов *«k»* обычно руководствуются тем, чтобы характерные особенности распределения признака не были бы завуалированы, а нехарактерные, случайные колебания, были бы сглажены.

Предлагается следующая ориентировочная таблица выбора числа *«k»* в зависимости от объема *«n»* протокола измерения признака (автор Н.А. Плохинский)

| n | 6–11 | 12–22 | 23–46 | 47–93 | 94–187 | 188–377 | 378–755 | 756–1515 | 1516 и более |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

***Правило построения интервального ряда:***

1) определить число «*n*» – объем протокола измерения признака;
2) по таблице Плохинского выбрать число *k*;
3) в заданном протоколе найти наибольшую $x_{max}$ и наименьшую $x_{min}$ варианты и определить их разность, называемую размахом (диапазоном) варьирования признака: $R = x_{max} - x_{min}$;
4) найти длину каждого интервала (в большинстве случаев для удобства обработки экспериментальных данных строят интервалы одинаковой длины) по формуле: $\Delta x = \dfrac{R}{k}$.

Заметим, что обычно, за редким исключением, $R$ не делится нацело на $k$. В этом случае производят округление чаще всего в сторону увеличения;

5) за начало первого интервала берут $x_{\min} - \frac{1}{2}\Delta x$. Делается это для того, чтобы варианты протокола не совпадали с границами интервалов. В случае совпадения варианты с границей интервала условимся относить ее к тому интервалу, который начинается этим числом. Например, построены интервалы: 5,30–5,35; 5,35–5,40; 5,40–5,45 и т.д., а в протоколе встретилась варианта $x$=5,40, тогда ее следует отнести к третьему интервалу;
6) чтобы получить конец первого интервала, к его началу прибавляют ширину $\Delta x$. Конец первого интервала служит началом второго интервала, а чтобы получить его конец, к началу прибавляют ширину $\Delta x$ и т.д. до тех пор, пока не будет получен интервал, содержащий $x_{max}$;
7) после построения всех интервалов, просматривая по столбцам протокол, с помощью пометок подсчитывают частоты всех интервалов.

***Замечание.*** *Вариационный интервальный ряд считается построенным удачно, если график частот имеет только одну вершину. В противном случае следует уменьшить k на одну единицу.*

*Пример 2.* Построить иртервальный вариационный ряд, если задан протокол времени решения контрольной задачи учениками 4-го класса (в секундах):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 60 | 41 | 51 | 33 | 42 | 45 | 21 | 53 | 60 |
| 68 | 52 | 47 | 46 | 49 | 49 | 14 | 57 | 54 | 59 |
| 77 | 47 | 28 | 48 | 58 | 32 | 42 | 58 | 61 | 20 |
| 61 | 35 | 47 | 72 | 41 | 45 | 44 | 55 | 30 | 40 |
| 67 | 65 | 39 | 48 | 43 | 60 | 54 | 42 | 59 | 50 |

*Решение.*

Применим указанную методику.

Объем протокола: $n$=50.

По таблице Плохинского найдем $k$ = 7.

Найдем диапазон варьирования $R$ = 77–14 = 63.

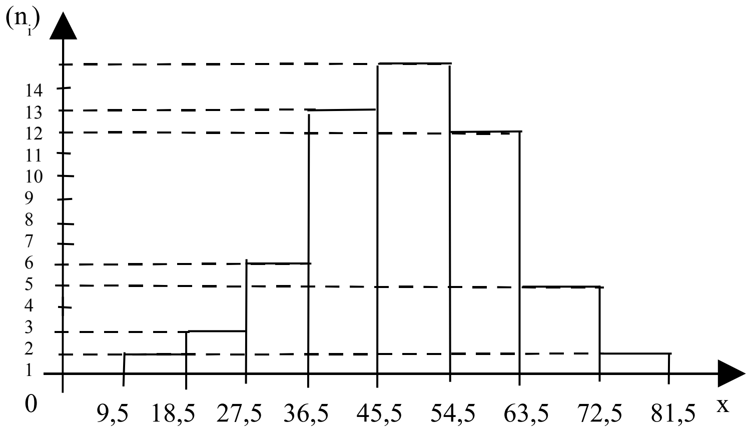
Длина каждого интервала составит $\Delta x$ =63:7=9.

За начало первого интервала возьмем $x_{\min} - \frac{1}{2}\Delta x = 14 - \frac{1}{2}\cdot 9 = 9{,}5.$

Получим интервальный вариационный ряд:

| № | Интервал | Пометки | Частоты ( $n_i$ ) |
|---|---|---|---|
| 1 | 9,5 – 18,5 | / | 1 |
| 2 | 18,5 – 27,5 | // | 2 |
| 3 | 27,5 – 36,5 | //// | 5 |
| 4 | 36,5 – 45,5 | //// //// // | 12 |
| 5 | 45,5 – 54,5 | //// //// //// | 14 |
| 6 | 54,5 – 63,5 | //// //// / | 11 |
| 7 | 63,5 – 72,5 | //// | 4 |
| 8 | 72,5 – 81,5 | / | 1 |
| $\sum$ | | | 50 |

Графиком интервального ряда служит гистограмма частот: это примыкающие друг к другу столбики, высоты которых равны соответствующим частотам ($n_i$), а ширина каждого столбика одинаковая и равна длине интервала $\Delta x$.




## Тема 2. Расчет выборочных числовых характеристик

***Литература:*** [2], раздел С, II, п.9.2; 9.4, стр. 469 – 473; [6], гл. 1, § 3 – § 8, стр. 24 – 52; [7], гл.3, стр. 40 – 66; [8], гл.2, стр. 9 – 51;

### *Характеристики генеральной и выборочной совокупностей*

Пусть задана генеральная совокупность объема $N$, а распределение интересующего нас признака $X$ в ней представлено следующей таблицей:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $N_i$ | $N_1$ | $N_2$ | … | $N_m$ |

Здесь $x_i$ – значения признака $X$ в генеральной совокупности;

$N_i$ – соответствующие им частоты; причем $\sum_{i=1}^{m} N_i = N$.

Фактически такое распределение бывает неизвестным. Мы предполагаем его заданным лишь теоретически.

Тогда *генеральной средней арифметической* назовем:

$$\overline{x_2} = \frac{\sum x_i N_i}{N}, \tag{1}$$

а *генеральной дисперсией*

$$\delta_r^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x_r})^2 N_i}{N}. \tag{2}$$

Генеральная дисперсия характеризует разброс, рассеивание, отклонение вариант генеральной совокупности относительно их генеральной средней.

Арифметический корень из дисперсии называют *генеральным средним квадратическим отклонением или генеральным стандартом:*

$$\delta_2 = \sqrt{\delta_2^2}. \tag{3}$$

*Генеральной долей признака A* называют отношение числа $M$ членов генеральной совокупности, обладающих этим признаком, к объему $N$ генеральной совокупности:

$$P_r = \frac{M}{N}. \tag{4}$$

Пусть из генеральной совокупности образована выборка объема $n$ и пусть распределение интересующего признака X в ней представлено таблицей:

(5)

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_m$ |

Здесь $x_i$ – значения признака в выборке. Естественно, что эти значения такие же, как и в генеральной совокупности, а частоты $n_i$ – другие, причем $\sum_{i=1}^{m} n_i = n.$

Тогда *выборочной средней арифметической* назовем:

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n}, \tag{6}$$

а выборочной дисперсией –

$$\sigma_в^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x_в})^2 n_i}{n}. \tag{7}$$

Если ряд интервальный, то в формулах (6) и (7) в качестве $x_i$ берут середины соответствующих интервалов.

На практике удобно выборочную дисперсию вычислять по формуле:

$$\sigma_в^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\overline{x_в})^2. \tag{8}$$

Эта формула получается из (7) с помощью несложных преобразований. Выборочная дисперсия характеризует разброс, рассеивание, отклонение вариант выборочной совокупности относительно их выборочной средней.

*Выборочным средним квадратическим отклонением* назовем:

$$\sigma_в = \sqrt{\delta_в^2}. \tag{9}$$

*Выборочной долей* признака $A$ называют отношение числа $m$ членов выборки, обладающих этим признаком, к объему $n$ выборки:

$$P_в = \frac{m}{n}. \tag{10}$$

Пусть выборка представлена рядом (5). Обозначим $m_x$ – число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака $\mathrm{X}$ меньшее $x$. Очевидно, что относительная частота события $\mathrm{X} < x$ составит тогда $\frac{m_x}{n}$. С изменением $x$, вообще говоря, изменяется и относительная частота $\frac{m_x}{n}$, т.е. она является функцией *x*. Так как эта функция находится опытным путем, то ее называют *эмпирической функцией распределения* и обозначают $F^*(x)$.

Итак,

$$F^*(x) = \frac{m_x}{n} \tag{11}$$

Заметим, что *теоретико-вероятностным* аналогом ряда (5) служит закон распределения дискретной случайной величины *X*:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_m$ |

где $x_1$ – возможные значения *X*, а $p_i$ – их соответствующие вероятности.

Теоретико-вероятностным аналогом функции $F^*(x)$ служит интегральная функция распределения случайной величины *X*:

$F(x) = P(X < x)$,

где $P(X < x)$ – вероятность события $X<x$.

Помимо выборочной средней применяют также средние описательного характера – моду и медиану.

*Мода* – это наиболее часто встречающееся значение признака в данном вариационном ряду.

Для дискретных рядов мода определяется как значение признака с наибольшей частотой.

Если интервальный вариационный ряд имеет постоянную ширину *h* интервалов, то мода вычисляется по формуле:

$$M_0 \approx x_{M_0} + h\frac{n_{M_0} - n_{M_0-1}}{(n_{M_0} - n_{M_0-1}) + (n_{M_0} - n_{M_0+1})}, \tag{12}$$

где $x_{M_0}$ – начало модального интервала, т.е. интервала с наибольшей частотой; $n_{M_0}$ – частота модального интервала; $n_{M_0-1}$ – частота интервала, предшествующего модальному; $n_{M_0+1}$ – частота интервала следующего за модальным.

*Медианой* вариационного ряда назначают значение признака, относительно которого выборочная совокупность делится на две равные по объему части. Для дискретного распределения медиана находится непосредственно на основании определения.

Если же распределение интервальное с постоянной шириной *h* интервалов, то медиана вычисляется по формуле:

$$Me \approx x_{Me} + h\frac{\frac{n}{2} - S_{Me-1}}{n_{Me}}, \tag{13}$$

где $x_{Me}$ – начало медианного интервала т.е. интервала, которому среди накопленных частот соответствует частота, равная половине объема ряда или первая большая половины объема ряда;
$n$ – объем ряда; $S_{Me-1}$ – накопленная частота, соответствующая интервалу, предшествующему медианному; $n_{Me}$ – частота медианного интервала.

К характеристикам рассеивания, разброса признака $X$ помимо дисперсии и среднего квадратического отклонения, *относят среднее абсолютное отклонение:*

$$\Delta = \frac{\sum_i \left| x_i - \overline{x}_в \right| \cdot n_i}{n}, \tag{14}$$

*коэффициент вариации:*

$$V = \frac{\delta_в}{\overline{\overline{x_в}}} \cdot 100\%, \tag{15}$$

*размах* или *диапазон варьирования:*

$$R = x_{\max} - x_{\min.} \tag{16}$$

Для характеристики распределения признака относительно некоторой величины служат *моменты.*

Моментом порядка $S$ вариационного ряда относительно некоторого числа $a$ называют:

$$M_S = \frac{\sum_i (x_i - a)^S n_i}{n}. \tag{17}$$

Если $a=0$ (начало отсчета), момент называется *начальным:*

$$\alpha_S = \frac{\sum x_i^S n_i}{n}. \tag{18}$$

Если $a = \overline{x_в}$ (центр распределения). Момент называется *центральным:*

$$M_S = \frac{\sum (x_i - \overline{x}_в)^S n_i}{n}. \tag{19}$$

Из (18) при $S=1$ следует $\alpha_1 = \frac{\sum\limits_i x_i n_i}{n} = \bar{x}_в,$ т.е. выборочная средняя – есть начальный момент первого порядка.

Из (19) при $S=2$ следует $M_2 = \frac{\sum (x_i - x_в)^2 n_i}{n} = \delta_в^2$, т.е. дисперсия есть центральный момент второго порядка.

Центральные моменты удобно вычислять через начальные.

Например, $M_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$,

$$M_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3, \tag{20}$$

$$M_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 \tag{21}$$

и т.д.

Заметим, что $M_1 = 0$ для любого распределения.

Заметим также, что

$$\sigma_в^2 = M_2 = \alpha_2 - \alpha_1. \tag{22}$$

Симметричность графика распределения признака можно измерить численно. Мерой симметричности служит *коэффициент асимметрии*:

$$A_S = \frac{M_3}{\sigma_в^3}, \tag{23}$$

где $M_3$ – третий центральный момент; $\delta_в$ – выборочное среднее квадратичекое отклонение.

При $A_S = 0$ распределение симметрично.

Показателем степени крутости кривой распределения признака по сравнению с крутостью нормального распределения служит *эксцесс:*

$$E_x = \frac{M_4}{\sigma_6^4} - 3. \tag{24}$$

При $E_x=0$ распределение нормальное.

Если $E_x>0$, то кривая распределения имеет более острую вершину, чем нормальная. Если $E_x<0$ то более плоскую.

Расчет всех перечисленных выше числовых характеристик по приведенным формулам называют *непосредственным расчетом.*

Существуют еще ***упрощенные способы расчета числовых характеристик выборки.***

Упрощенные методы расчета основаны на свойствах числовых характеристик. Рассмотрим, например, свойства выборочной средней арифметической и выборочной дисперсии.

1. Если все варианты ряда увеличить или уменьшить на одно и то же постоянное число *C*, то средняя арифметическая увеличивается или уменьшается на это же число *C*, а дисперсия не изменится.
2. Если все варианты ряда увеличить или уменьшить на одно и то же постоянное число *h*, то средняя арифметическая увеличится или уменьшится в это же число *h* раз, а дисперсия – в $h^2$ раз.

Если выборка задана в виде распределения равностоящих вариант (разность между любыми двумя соседними вариантами постоянна и называется шагом ряда), расположенных в порядке возрастания, и соответствующих им частот, то отмеченные выше свойства позволяют $\overline{x}_в$ – выборочную среднюю и $\delta_в^2$ – выборочную дисперсию рассчитывать не по заданным вариантам, называемых *истинными,* а по уменьшенным или увеличенным вариантам, называемых *условными.* Переход от истинных вариант $x_i$ к условным вариантам $u_i$ удобно осуществлять по формуле:

$$u_i = \frac{x_i - C}{h} \qquad (25)$$

Формула (25) называется формулой *кодирования.*

Если выборка задана дискретным вариационным рядом с равноотстоящими вариантами, то в качестве *C* рекомендуется выбирать варианту, расположенную приблизительно в середине ряда, или варианту с наибольшей частотой. В качестве числа *h* берут шаг ряда.

Если выборка задана интервальным вариационным рядом с одинаковой шириной интервалов, то в качестве *C* рекомендуется брать середину интервала с наибольшей частотой или же середину интервала, расположенного примерно в середине ряда. В качестве числа *h* берут ширину интервалов.

Число *C* принято называть *«условным нулем»* или *«ложным нулем»*, а метод расчета числовых выборочных характеристик – *методом «условного нуля»*. Иногда этот метод еще называют *методом «условных моментов»* или методом произведений.

Этот метод удобен тем, что позволяет сразу записать нуль в расчетной таблице в графе $u_i$ – условные варианты – в строке с наибольшей частотой или в строке, соответствующей приблизительно середине ряда.

Над нулем последовательно записать условные варианты $u_i$ -1, -2, -3, …, а под нулем –1, 2, 3, ….

Внимание! Если варианты в вариационном ряду расположены в порядке убывания, то над нулем следует записать последовательно -1, -2 , -3, …, а под нулем 1, 2, 3,….

При этом числовые характеристики выборки вычисляют по формулам:

$$\overline{x}_в = h\overline{u} + C, \qquad (26)$$

где

$$\overline{u} = \frac{\sum u_i n_i}{n} = \alpha_1^*, \qquad (27)$$

здесь $\overline{u}$ – условная средняя арифметическая выборки или условный начальный момент первого порядка.

$$\sigma_в^2 = h^2(\overline{u^2} - \overline{u}^2), \qquad (28)$$

где

$$\overline{u^2} = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n} = \alpha_2^*, \qquad (29)$$

здесь $\overline{u^2} = \alpha_2^*$ – условный начальный момент второго порядка.

С учетом (27)и (29) формулы (26) и (28) можно записать в виде:

$$\overline{x}_в = h\alpha_1^* + C, \qquad (26')$$

$$\sigma_в^2 = h^2(\alpha_2^* - \alpha_1^{*2}) . \qquad (28')$$

Условный начальный момент порядка $S$ находят по формуле

$$\alpha_S^* = \frac{\sum u_i^S n_i}{n} \qquad (29)$$

Истинный и условный начальные моменты связаны формулой:

$$\alpha_S = h^3 \alpha_S^* . \qquad (30)$$

Поэтому, например, центральные моменты третьего и четвертого порядков, применяемые в расчетах асимметрии и эксцесса, можно рассчитывать с помощью метода «условного нуля» по формулам:

$$M_3 = (\alpha_3^* - 3\alpha_2^*\alpha_1^* + 2\alpha_1^{*3})h^3, \qquad (31)$$

$$M_4 = (\alpha_4^* - 4\alpha_3^*\alpha_1^* + 6\alpha_2^*\alpha_1^{*2} - 3\alpha_1^{*4})h^4 . \qquad (32)$$

Тогда коэффициент асимметрии и эксцесс заданного распределения будут вычисляться по формулам:

$$A_S = \frac{M_3}{\delta_в^3} = \frac{\alpha_3^* - 3\alpha_2^*\alpha_1^* + 2\alpha_1^{*3}}{(\alpha_2^* - \alpha_1^{*2})\sqrt{\alpha_2^* - \alpha_1^{*2}}}$$

$$E_x = \frac{M_4}{\delta_в^4} - 3 = \frac{\alpha_4^* - 4\alpha_3^*\alpha_1^* + 6\alpha_2^*\alpha_1^{*2} - 3\alpha_1^{*4}}{(\alpha_2^* - \alpha_1^{*2})^2} - 3 .$$

Иногда сводят первоначальные варианты к равноотстоящим. Для этого интервал, в котором заключены все варианты выборки, делят на несколько равных, длины $h$, частичных интервалов (каждый частичный интервал должен содержать не менее 8–10 вариант). Затем находят середины частичных интервалов, которые и образуют последовательность равноотстоящих вариант. В качестве частоты каждой середины интервала принимают сумму частот вариант, которые попали в соответствующий частичный интервал.

При вычислении выборочной дисперсии для уменьшения ошибки, вызванной группировкой (особенно при малом числе интервалов), делают поправку Шеппарда по формуле

$$(\sigma_в^2)^1 = \sigma_в^2 - \frac{1}{12}h^2 . \quad (33)$$

## Решение типовых задач

*Задача 1.* Даны выборочные варианты $x_i$ и соответственные частоты $n_i$ количественного признака $X$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| $n_i$ | 6 | 16 | 50 | 24 | 4 |

Найти методом «условного нуля» (методом произведений, методом моментов) выборочные среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, асимметрию и эксцесс.

*Решение.*

Составим вспомогательную расчетную таблицу. Для этого:

1) запишем варианты $x_i$ в первый столбец;

2) запишем частоты $n_i$ во второй столбец; суммы частот ( $\sum n_i = 100$ ) поместим в нижнюю клетку столбца;
3) переход к условным вариантам осуществим по формуле (25): $u_i = \dfrac{x_i - 20}{5}$, т.е. в качестве «условного нуля» взята варианта

$c$=20, имеющая наибольшую частоту, а в качестве числа $h$ – шаг ряда, т.е. разность между двумя любыми соседними вариантами: 15-10=5.

Запишем условные варианты $u_i$ в третий столбец;

4) произведения частот $n_i$ на условные варианты $u_i$ записываем в четвертый столбец; отдельно находим сумму отрицательных (-28) и отдельно сумму положительных (32) чисел; сложив эти числа, их сумму (4) помещаем в нижнюю клетку столбца;
5) произведения частот $n_i$ на квадраты условных вариант $u_i^2$ запишем в пятый столбец (для этого перемножим третий и четвертый столбцы); сумму чисел столбца (80) помещаем в нижнюю клетку столбца;
6) произведения частот $n_i$ на кубы условных вариант $u_i^3$ запишем в шестой столбец; отдельно находим сумму отрицательных (-64) и отдельно сумму положительных (56) чисел; сложив эти числа, их сумму (-8) помещаем в нижнюю клетку столбца;
7) произведения частот $n_i$ на условные варианты в четвертой степени $u_i^4$ запишем в седьмой столбец; сумму чисел столбца (200) помещаем в нижнюю клетку столбца;
8) произведения частот $n_i$ на четвертую степень условных вариант, увеличенных на 1 запишем в восьмой (контрольный) столбец, сумму чисел столбца (764) помещаем в нижнюю клетку столбца.

В итоге получим следующую расчетную таблицу:

| $x_i$ | $n_i$ | $u_i$ | $u_in_i$ | $u_i^2n_i$ | $u_i^3n_i$ | $u_i^4n_i$ | $(u_i+1)^4n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 6 | -2 | -12 | 24 | -48 | 96 | 6 |
| 15 | 16 | -1 | -16 | 16 | -16 | 16 | 0 |
| 20 | 50 | 0 | -28 | 0 | -64 | 0 | 50 |
| 25 | 24 | 1 | 24 | 24 | 24 | 24 | 384 |
| 30 | 4 | 2 | 8 | 16 | 32 | 64 | 324 |
| | | | 32 | | 56 | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sum$ | 100 | | 4 | 80 | -8 | 200 | 764 |

Контроль: $\sum (u_i + 1)^4 n_i = 764$,

$$\sum u_i^4 n_i + 4\sum u_i^0 n_i + 6\sum u_i^2 n_i + 4\sum u_i n_i + n = 200 + 4\cdot(-8) + 6\cdot 80 + 4\cdot 4 + 100 = 764.$$

Совпадение найденных сумм свидетельствует о том, что вычисления произведены правильно.

Вычислим условные начальные моменты:

$$\alpha_1^* = \frac{\sum u_i n_i}{n} = \frac{4}{100} = 0{,}04\,; \quad \alpha_2^* = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n} = \frac{80}{100} = 0{,}8\,;$$

$$\alpha_3^* = \frac{\sum u_i^3 n_i}{n} = \frac{-8}{100} = -0{,}08\,; \quad \alpha_4^* = \frac{\sum u_i^4 n_i}{n} = \frac{200}{100} = 2\,.$$

По условию задачи $C$=20, $h$=5.

Найдем искомую выборочную среднюю:

$$\overline{x}_в = h\alpha_1^* + C = 5\cdot 0{,}04 + 20 = 20{,}2\,.$$

Найдем искомую выборочную дисперсию:

$$\delta_в^2 = h^2(\alpha_2^* - \alpha_1^{*2}) = 5^2(0{,}8 - 0{,}04^2) = 19{,}96\,.$$

Найдем искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\delta_в = \sqrt{\delta_в^2} = \sqrt{19{,}96} \approx 4{,}47\,.$$

Найдем искомый коэффициент вариации

$$V = \frac{\delta_в}{x_в}100\% = \frac{4{,}47}{20{,}2}\cdot 100\% \approx 22{,}13\%\,.$$

Приступим к вычислению асимметрии и эксцесса.

С этой целью предварительно рассчитаем центральные моменты третьего и четвертого порядков, используя формулы (31) и (32):

$$M_3 = (\alpha_3^* - 3\alpha_2^*\alpha_1^* + 2\alpha_1^{*3})h^3 = (-0{,}08 - 3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}04 + 2\cdot 0{,}04^3)\cdot 5^3 = -21{,}984\,.$$

$$M_4 = (\alpha_4^* - 3\alpha_3^*\alpha_1^* + 6\alpha_2^{*3}\alpha_1^{*2} - 3\alpha_1^{*4})h^4 =$$
$$= (2 - 4(-0{,}08)\cdot 0{,}04 + 6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}04^2 - 3\cdot 0{,}04^4)\cdot 5^4 = 1262{,}7952.$$

Тогда $A_S = \dfrac{M_3}{\delta_в^3} = \dfrac{-21{,}984}{19{,}96\cdot 4{,}47} \approx -0{,}25.$

$$E_x = \frac{M_4}{\delta_в^4} - 3 = \frac{1262,7952}{(19,96)^2} - 3 \approx 0,17.$$

***Дополнения к теме 2.***

Наряду с модой и медианой к структурным характеристикам вариационного ряда относятся так называемые *квантили,* отсекающие в пределах ряда определенную часть его членов (вариант). К ним относятся *квартили*, *децили* и перцентили (процентили).

*Квартиль* – величина, отсекающая 1/4 членов ряда. Три квартиля – $q_1$, $q_2$, $q_3$ – делят весь вариационный ряд на четыре равночисленные части (кварты).

*Дециль* – величина, отделяющая 1/10 всех членов ряда. Девять децилей $d_i$ ($i$=1, 2, 3,…9) делят вариационный ряд на десять равных частей.

*Перцентиль* (процентиль) – величина, отделяющая 1/100 всех членов ряда. 99 всех перцентилей $P_i$ ($i$ =1,99) делят всю совокупность наблюдений на 100 равночисленных частей.

На практике используются обычно перцентили $P_3$, $P_{10}$, $P_{25}$, $P_{50}$, $P_{75}$, $P_{90}$, $P_{97}$, причем 50-й перцентиль равен медиане, т.е. $P_{50}=Me$. Кроме того, $P_{50}=q_2=d_5$. Это означает, что между $P_{25}$ и $P_{75}$, и соответственно между $q_1$ и $q_3$ находится 50% всех членов совокупности, т.е. $P_{25}= q_1$, $P_{75}= q_3$.

Любой перцентиль можно найти по формуле:

$$P_i = x_H + \Delta x\left(\frac{K - n_s}{n_p}\right),$$

где $P_i$ – выбранный перцентиль, $n_p$ – частота интервала, содержащего перцентиль $P_i$, $\Delta x$ = длина интервала; $n_s$ – первая накопленная частота, которая равна или которую превосходит число $K = P_i \frac{n}{100}$, где $n$ – объем выборки (объем вариационного ряда).

Квантили используются для установления границ тех или иных нормативов, например, при оценке физического развития человека, спортивных достижений и т. д.

***Пример 3:*** Найти 50-й перцентиль для распределения числа «холериков» среди 60 групп студентов:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $n_i$ | 3 | 6 | 16 | 19 | 14 | 2 |
| $n_s$ | 3 | 9 | 25 | 44 | 58 | 60 |

В данном случае $K = 50 \cdot \frac{60}{100} = 30.$ Эта величина превосходит $n_s$=25, но

меньше $n_s$ = 44. Следовательно, $x_H = \frac{3+4}{2} = 3{,}5.$ Поэтому $P_{50} = 3{,}5 + 1 \cdot \frac{30-25}{19} \approx 3{,}76.$

***Пример 4.*** Найти 50-й перцентиль времени решения контрольной задачи учеником 4-го класса:

| Интер-валы | 9,5–18,5 | 18,5–27,5 | 27,5–36,5 | 36,5–45,5 | 45,5–54,5 | 54,5–63,5 | 63,5–72,5 | 72,5–81,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 2 | 5 | 12 | 14 | 11 | 4 | 1 |
| $n_s$ | 1 | 3 | 8 | 20 | 34 | 45 | 49 | 50 |

В данном случае $K = 50 \cdot \frac{50}{100} = 25.$ Эта величина больше $n_s$=20, но меньше $n_s$=34. Следовательно, $x_H$ = 45,5, $n_p$=14. Поэтому $P_{50} = 45{,}5 + 9\left(\frac{25-20}{14}\right) \approx 48{,}71$.

Сделаем общие замечания, которые будут относиться к следующим темам: № 3, 4, 5 и 6.

*Признаки и переменные* – это измеряемые психологические явления (время решения задачи; количество допущенных ошибок, уровень тревожности, показатель интеллекта, интенсивность агрессивных реакций, угол поворота корпуса в беседе и др.)

Психологические переменные являются величинами случайными. *Математическая обработка* – это оперирование со значениями признака, полученными у испытуемых в психологическом исследовании (эти значения называют вариантами).

*Распределением признака* называется закономерность встречаемости разных его значений.

В психологических исследованиях чаще всего встречается *нормальное распределение.*

*Параметры распределения* – это числовые значения признака (математическое ожидание или среднее значение, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, асимметрия, эксцесс и др.)

В реальных психологических исследованиях обычно оперируют не параметрами, а их статистическими оценками, которые вычисляются по выборкам.

При решении ряда задач психолог-исследователь выдвигает предположение – гипотезу и проверяет ее статистическими методами, располагая выборкой из генеральной совокупности.

Статистические гипотезы подразделяются на нулевые (основные) и альтернативные (противоречащие основной), направленные и ненаправленные.

*Нулевая гипотеза* – это гипотеза об отсутствии различий. Она обозначается $H_0$ и называется нулевой потому, что содержит число *0*: $X_1$ -$X_2$=$0$, где $X_1$ и $X_2$ – сопоставляемые значения признаков. Нулевая гипотеза – это то, что мы хотим опровергнуть, если перед нами стоит задача доказать значимость различий.

*Альтернативная гипотеза* – это гипотеза о значимости различий. Она обозначается $H_1$. Альтернативная гипотеза – это то, что мы хотим доказать.

*Направленные гипотезы:*

$H_0$: $X_1$ не превышает $X_2 (X_1 \leq X_2)$

$H_1$: $X_1$ превышает $X_2 (X_1 > X_2)$.

*Ненаправленные гипотезы:*

$H_0$: $X_1$ не отличается от $X_2 (X_1 = X_2)$

$H_1$: $X_1$ не отличается от $X_2 (X_1 \neq X_2)$.

Проверка гипотез осуществляется с помощью статистических критериев.

*Статистический критерий* – это решающее правило, обеспечивающее принятие истинной и отклонение ложной гипотезы с высокой степенью надежности (вероятности).

Статистический критерий – это случайная величина, точное или приближенное распределение которой заранее известно.

Критерии делятся на параметрические и непараметрические. *Параметрические* включают в расчетную формулу параметры распределения признака (средняя, дисперсия и др.). *Непараметрические* не включают в расчетную формулу параметры распределения, а основываются на оперировании частотами или рангами.

Предлагается следующая таблица, характеризующая параметрические и непараметрические критерии и помогающая выбрать тот или иной статистический критерий при решении предлагаемой задачи.

| | Параметрический критерий | Непараметрический критерий |
|---|---|---|
| 1 | Позволяют прямо оценить различия в *средних,* полученных в двух выборках (t-критерий Стьюдента) | Позволяют оценить лишь средние тенденции, например, ответить на вопрос, чаще ли в одной выборке встречаются более высокие, а в другой выборке – более низкие значения признака (критерии Q, U, $\varphi^*$ и др.) |
| 2 | Позволяют прямо оценить различия в дисперсиях (критерий Фишера) | Позволяют оценить лишь различия в диапазонах варьирования признака (критерий $\varphi^*$) |
| 3 | Позволяют выявить тенденции изменения признака при переходе от одного условия к другому условию (однофакторный дисперсионный анализ), но лишь *при условии нормального распределения* признака | Позволяют выявить тенденции изменения признака при переходе от одного условия к другому условию *при любом распределении* признака (критерий тенденций L и S) |
| 4 | Позволяют оценить взаимодействие двух и более факторов в их влияние на изменения признака (двухфакторный дисперсионный анализ) | Эта возможность отсутствует |
| | **Параметрический критерий** | **Непараметрический критерий** |
| 5 | Экспериментальные данные должны отвечать двум, а иногда трем условиям:<br>а) значения признака представлены в виде интервалов;<br>б) распределение признака является нормальным;<br>в) в дисперсионном анализе должно соблюдаться требование равенства дисперсий в ячейках комплекса | Экспериментальные данные могут не отвечать ни одному из этих условий:<br>а) значения признака могут быть представлены в любом виде;<br>б) распределение признака может быть любым;<br>в) требование равенства дисперсий отсутствует |
| 6 | Сложные математические расчеты | Математические расчеты по большей части просты и занимают мало времени (за исключением критериев $X^2$ и $\lambda$) |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | Если условия, перечисленные в п.5, выполняются, параметрические критерии оказываются несколько более мощными, чем непараметрические | Если условия п. 5 не выполняются, непараметрические критенрии оказываются более мощными, чем параметрические, т.к. они менее чувствительны к «засорениям». |

Проверка гипотезы всегда сопровождается заданным уровнем значимости (*p*). Уровень значимости (*p*) – это вероятность того, что мы сочли различия существенными, а они на самом деле случайны, т.е. это вероятность отклонения нулевой гипотезы, в то время как она верна.

В психологических исследованиях чаще всего используют 5% или 1%-ный уровни значимости ( $\rho \le 0{,}05$ или $\rho \le 0{,}01$ ).

Ошибка, состоящая в том, что мы отклоняем гипотезу $H_0$, в то время как на самом деле она верна, называется *ошибкой первого рода* (иногда вместо $\rho$ она называется $\alpha$ ).

Ошибка, состоящая в принятии гипотезы $H_0$, в то время как на самом деле она неверна, называется *ошибкой второго рода* ( $\beta$ ).

Мощность критерия – это его способность (вероятность) выявлять различия, если они есть, т.е. это способность отклонить нулевую гипотезу, если она неверна, иначе – не допустить ошибку второго рода. Поэтому мощность критерия равна $1-\beta$ .

### *Правило отклонения $H_0$ и принятия $H_1$.*

Для каждого статистического критерия *K* есть таблица критических точек, по которой в зависимости от объемов выборок и принятых уровней значимости, находят критическое значение критерия $K_{кр}$. Затем сравнивают эмпирическое значение критерия $K_{эмп}$, рассчитанное по заданным выборкам, с критическим $K_{кр}$, найденным по таблице. Вывод делают по следующим правилам:

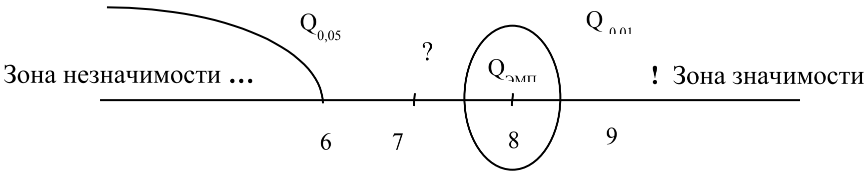
1) если $K_{эмп} \ge K_{кр}(p \le 0{,}05)$, то $H_0$ отклоняется. Но мы еще не можем определенно принять $H_1$;
2) если $K_{эмп} \ge K_{кр}(p \le 0{,}01)$, то $H_0$ отклоняется и принимается $H_1$.

*Исключения:* для критерия знаков *G*, критерия *T* Вилкоксона, критерия *U* Манна-Уитни устанавливаются обратные соотношения.

Чтобы облегчить процесс принятия или непринятия гипотезы, можно использовать «ось значимости».

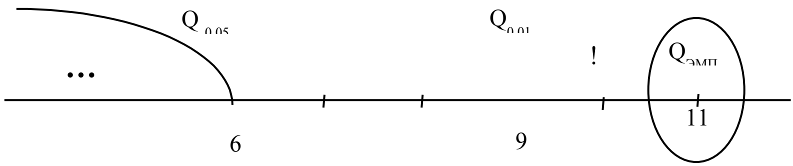
Рассмотрим три возможных случая (например, для критерия $Q$ Розенбаума).

### *Случай 1*




Здесь $Q_{0,05}^{=6}$ и $Q_{0,01}^{=9}$ – критические значения критерия; $Q_{эмп}$ – эмпирическое значение критерия (оно попало в «зону неопределенности»). Вправо от $Q_{0,01}^{=9}$ простирается «зона значимости», –сюда попадают эмпирические значения, превышающие $Q_{0,01}=9$ и следовательно, безусловно значимые. Влево от критического значения $Q_{0,05}=6$ простирается «зона не значимости», – сюда попадают эмпирические значения $Q_{эмпП}$, которые меньше $Q_{0,05}=6$, и следовательно безусловно не значимы. А так как $Q_{эмп}=8$ попадает в «зону неопределенности», т.е. $Q_{эмп}=8 \geq 6= Q_{0,05}$, то согласно правилу мы можем отклонить гипотезу $H_0$, но еще не можем принять гипотезу $H_1$.

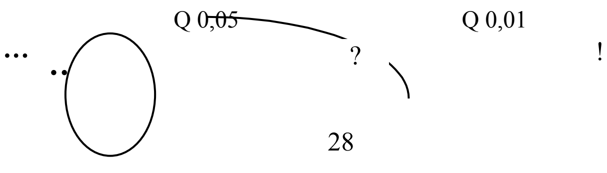
### *Случай 2*

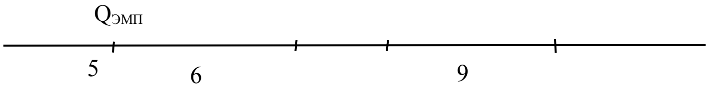



Здесь $Q_{кр}(p \leq 0,05)=6$, $Q_{кр}(p \leq 0,01=9$, $Q_{эмп}=11$.

Т.к. $Q_{эмп}=11>9= Q_{кр}(p \leq 0,01)$, *то* $H_0$ отклоняется и принимается гипотеза $H_1$.

### *Случай 3*






Здесь $Q_{эмп}=5<Q_{кр}(p \leq 0,05)=6$. Поэтому нет оснований отвергнуть гипотезу $H_0$. Следовательно, гипотеза $H_1$ неверна.

В заключении приведем *классификацию задач и методов их решения.*

| № | **Задача** | Условие | Методы |
|---|---|---|---|
| 1. | Выявление различий в уровне исследуемого признака | а) 2 выборки испытуемых | Q – критерий Розенбаума;<br>U – критерий Манна-Уитни;<br>$\varphi^*$ – критерий (угловое преобразование Фишера) |
| | | б) 3 и более выборок испытуемых | $S$ – критерий тенденций Джонкира;<br>$H$ – критерий Крускала-Уоллиса. |
| 2. | Оценка сдвига значений исследуемого признака | а) 2 замера на одной и той же выборке испытуемых | $T$ – критерий Вилкоксона;<br>$G$ – критерий знаков;<br>$\varphi^*$ – критерий (угловое преобразование Фишера) |
| | | б) 3 и более замеров на одной и той же выборке испытуемых | $X_r^2$ – критерий Фридмана;<br>$L$ – критерий тенденций Пейджа |
| № | **Задача** | Условие | Методы |
| 3. | Выявление различий в распределении признака | а) при сопоставлении эмпирического распределения с теоретическим | $X^2$ – критерий Пирсона;<br>$\lambda$ – критерий Колмогорова-Смирнова;<br>m – биноминальный критерий |
| | | б) при сопоставлении двух эмпирических распределений | $X^2$– критерий Пирсона;<br>$\lambda$ – критерий Колмогорова-Смирнова;<br>$\varphi^*$ – критерий (угловое преобразование Фишера) |
| 4. | Выявление степени согласованности изменений | а) двух признаков | $r_в$ – коэффициент ранговой корреляции Спирмена |
| | | б) двух иерархий или профилей | $r_в$ – коэффициент ранговой корреляции Спирмена |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5. | Анализ изменений под влиянием контролируемых условий | а) под влиянием одного фактора | $S$ – критерий тенденций Джонкира;<br>$L$ – критерий тенденций Пейджа;<br>Однофакторный дисперсионный анализ Фишера. |
| | | б) под влиянием двух факторов одновременно | Двухфакторный дисперсионный анализ Фишера. |

## Тема 3. Выявление различий в уровне исследуемого признака

***Литература:*** [1], гл. 2, п.2.1 – 2.5, стр. 39 – 69; [6], гл. 4, стр. 134 – 172; [7], гл. 6, стр. 96 – 117.

В этой теме Вы должны изучить несколько различных критериев оценки достоверности различий между независимыми выборками по уровню значений признака. Предлагается алгоритм выбора того или иного критерия.

1. ***Q – критерий Розенбаума***

Этот критерий используется для оценки различий между двумя выборками по уровню какого-либо признака, количественно измеренного.

### Алгоритм критерия

1. Проверить, выполняются ли ограничения:

$n_1 \geq 11, n_2 \geq 11, n_1 \approx n_2$, где $n_1$ – объем одной выборки, $n_2$ – объем второй выборки.

2. Каждую выборку ранжировать, т.е. расположить варианты в порядке возрастания. Считать выборку № 1 ту, варианты в которой имеют большие значения.
3. Определить самую большую варианту в выборке № 2.
4. Подсчитать количество вариант в выборке № 1, которые превосходят самую большую варианту в выборке № 2, и обозначить это число $S_1$.
5. Определить наименьшую варианту в выборке № 1.

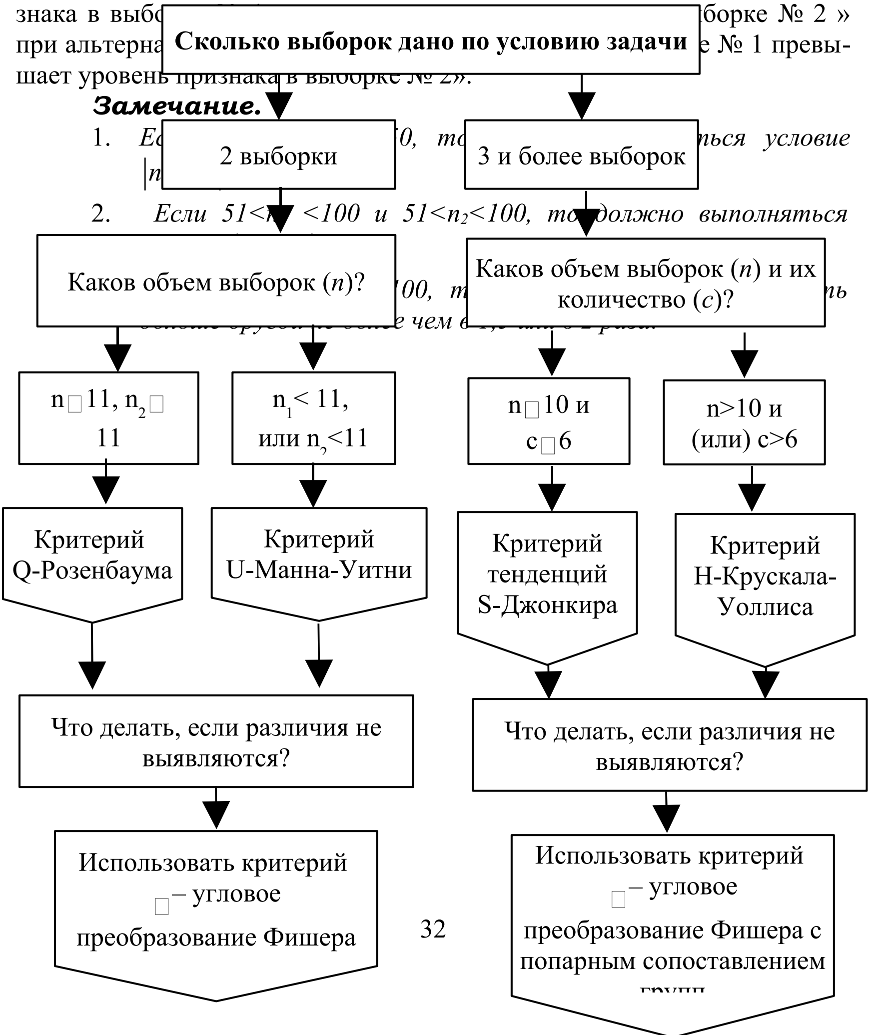
6. Подсчитать количество вариант в выборке № 2, которые меньше минимальной варианты выборки № 1, и обозначить это число $S_2$.
7. Найти $Q_{эмп} = S_1 + S_2$.
8. По таблице I (см. Приложения) определить критические значения $Q$ для данных $n_1$ и $n_2$. Если окажется, что $Q_{эмп} \ge Q_{0.05}$, то гипотеза $H_0$ отвергается.

Если $n_1 \ge 26$ и $n_2 \ge 26$, то следует сопоставить $Q_{эмп}$ с $Q_{кр} = 8(\rho \le 0{,}05)$ и $Q_{кр} = 10(\rho \le 0{,}01)$. Если окажется, что $Q_{эмп} \ge Q_{кр} = 8$, то гипотеза $H_0$ отвергается.

Этот критерий служит для проверки гипотезы $H_0$: «Уровень признака в выбо… …борке № 2 » при альтерна… …е № 1 превышает уровень признака в выборке № 2».

***Замечание.***

1. *Ес… …0, т… …ться условие* $|n$…
2. *Если 51<n… <100 и 51<n₂<100, то должно выполняться*
3. *…100, т… …ть …не более чем в 1,5 или в 2 раза.*



***Пример 5.*** Было обследовано 14 студентов-физиков и 12 студентов-психологов по уровню вербального и невербального интеллекта с помощью методики Д. Векслера. Результаты обследования представлены в таблице. Можно ли утверждать, что одна из групп превосходит другую по уровню вербального интеллекта?

| **Студенты-физики** | | | **Студенты-психологи** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| № | Код имени испытуемого | Показатель вербального интеллекта | № | Код имени испытуемого | Показатель вербального интеллекта |
| 1. | И.А. | 132 | 1. | Н.Т. | 126 |
| 2. | К.А. | 134 | 2. | О.В. | 127 |
| 3. | К.Е. | 124 | 3. | Ф.О. | 132 |
| 4. | П.А. | 132 | 4. | И.Н. | 120 |
| 5. | С.А. | 135 | 5. | И.Ч. | 119 |
| 6. | Ст.А. | 132 | 6. | И.В. | 126 |
| 7. | Т.А. | 131 | 7. | К.О. | 120 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8. | Ф.А. | 132 | 8. | Р.Р. | 123 |
| 9. | Ч.И. | 121 | 9. | Р.И. | 120 |
| 10 | Ц.А. | 127 | 10 | О.К. | 116 |
| 11 | См.А. | 136 | 11 | Е.В. | 123 |
| 12 | К.Ан. | 129 | 12 | Н.К. | 115 |
| 13 | Б.Л. | 136 | | | |
| 14 | Ф.В. | 136 | | | |

Решение

Сформулируем гипотезы:

*$H_0$* – студенты-физики не превосходят студентов-психологов по уровню вербального интеллекта.

*$H_1$* – студенты-физики превосходят студентов психологов по уровню вербального интеллекта.

Упорядочим по убыванию вербального интеллекта ряды индивидуальных значений в двух выборках так. Как сделано в следующей таблице:

| № | 1 ряд – студенты-физки | № | 2 ряд – студенты-психологи |
|---|---|---|---|
| 1 | См.А 136 | | |
| 2 | Б.Л. 136 | | |
| 3 | Ф.В. 136 $S_1$ | | |
| 4 | К.А. 134 | | |
| 5 | К.А. 134 | | |
| 6 | И.А. 132 | 1 | Е.В. 132 |
| № | 1 ряд – студенты-физики | | 2 ряд – студенты-психологи |
| 7 | П.А. 132 | | |
| 8 | Ст.А. 132 | | |
| 9 | Ф.А. 132 | | |
| 10 | Т.А. 131 | | |
| 11 | К.Ан. 129 | | |
| 12 | Ц.А. 127 | 2 | О.В. 127 |
| | | 3 | Н.Т. 126 |
| | | 4 | И.Ч. 126 |
| 13 | К.Е. 124 | | |
| | | 5 | К.О. 123 |
| | | 6 | О.К. 123 |
| 14 | Ч.И. 121 | | |

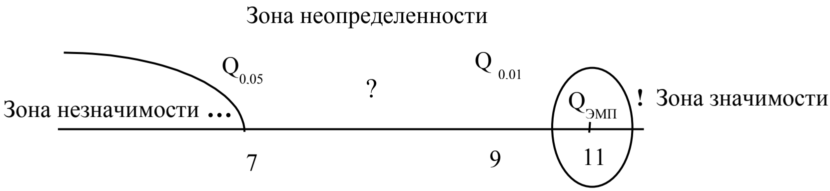
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 7 | Ф.О. 120 | |
| | | 8 | И.В. 120 | |
| | | 9 | Р.Р. 120 | $S_2$ |
| | | 10 | И.Н. 119 | |
| | | 11 | Р.И. 116 | |
| | | 12 | Н.К. 115 | |

Из таблицы находим $S_1$=5, $S_2$=6. Тогда $Q_{эмп}=S_1+S_2=5+6=11$.

По таблице I (см. Приложения) определяем $Q_{кр}$ для $n_1$=14, $n_2$=12.

$$Q_{кр.} = \begin{cases} 7(p \leq 0{,}05), \\ 9(p \leq 0{,}01). \end{cases}$$

Построим ось значимости




$Q_{эмп}=11>9=Q_{кр.}(\rho \leq 0{,}01)$. Следовательно, гипотеза $H_0$ отклоняется, а гипотеза $H_1$ принимается, т.е. студенты-физики превосходят студентов-психологов по уровню вербального интеллекта ($\rho$ <0,01), и это можно утверждать с доверительной вероятностью 0,99.

***2. U-критерий Манна-Уитни.***

Критерий предназначен для оценки различий между двумя выборками по уровню какого-либо количественного признака. Он позволяет выявлять различия между малыми выборками.

*Алгоритм критерия*

1. Перенести все данные протокола на индивидуальные карточки.

2. Пометить карточки первой выборки одним цветом (например, красным), а все карточки второй выборки другим цветом (например, синим).

3. Разложить все карточки в единый ряд в порядке возрастания значений вариант независимо от того, к какой выборке карточки относятся.

4. Проранжировать значения на карточках, приписывая меньшей варианте меньший ранг. Всего рангов должно получиться $n_1+n_2$, где $n_1$ – объем первой выборки, $n_2$ – второй (правило ранжирования приведено дальше).
5. Разделить все карточки на две группы по цвету.
6. Подсчитать сумму рангов отдельно на красных карточках (выборка 1) и на синих карточках (выборка 2). Проверить, совпадает ли общая сумма рангов с расчетной, которая определяется по формуле

$$\sum R_i = \frac{N(N+1)}{2},$$

где $N=n_1+n_2$.

7. Определить большую из двух ранговых сумм.
8. Определить значение $U_{эмп}$ по формуле:

$$U_{эмп} = (n_1 \cdot n_2) + \frac{n_x(n_x+1)}{2} - T_x,$$

где $n_1$ – объем выборки № 1; $n_2$ – объем выборки № 2; $T_x$ – большая из двух ранговых сумм; $n_x$ – объем той выборки, у которой больше сумма рангов.

9. Определить критические значения $U_{кр}$ по Табл.II (Приложения). Если окажется, что $U_{эмп} > U_{кр \cdot 0,05}$, то $H_0$ принимается; если же $U_{эмп} \le U_{кр \cdot 0,05}$, то $H_0$ отвергается. Чем меньше значение $U$, тем достоверность различий выше.

### *Правила ранжирования*

**1.** Меньшей варианте начисляется меньший ранг.

Наименьшей варианте начисляется ранг 1. Наибольшей варианте начисляется ранг, соответствующий количеству ранжируемых вариант. Например, если $n$=7, то наибольшим будет ранг 7, за исключением тех случаев, которые предусмотрены в следующем пункте.

2. В случае, если несколько значений вариант одинаковы, им начисляется ранг, равный среднему арифметическому тех рангов, которые они получили бы, если бы не были равны. Например, в выборке заданы варианты 10, 10, 10, 12, 12, 15, 18 и т.д. т.е. три наименьших значений равны 10. Если бы они были разные, то получили бы ранги 1, 2, 3, но поскольку они одинаковые, то каждое из них получает средний ранг $\frac{1+2+3}{3}=2$. Следующие два значения равны 12. Они должны были бы получить ранги 4 и 5, но поскольку они равны, то получают средний ранг $\frac{4+5}{2}=4{,}5$. Следующие две варианты 15 и 18 получают соответственно ранги 6 и 7.

1. Общая сумма рангов должна совпадать с расчетной.

***Пример 6.*** Результаты обследования 14 студентов-физиков и 12 студентов-психологов по индивидуальным значениям невербального интеллекта представлены в следующей таблице

| **Студенты-физики** | | | **Студенты-психологи** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| № | Код имени испытуемого | Показатель вербального интеллекта | № | Код имени испытуемого | Показатель вербального интеллекта |
| 1. | И.А. | 111 | 1. | Н.Т. | 113 |
| 2. | К.А. | 104 | 2. | О.В. | 107 |
| 3. | К.Е. | 107 | 3. | Е.В. | 123 |
| 4. | П.А. | 90 | 4. | Ф.О. | 122 |
| 5. | С.А. | 115 | 5. | И.Н. | 117 |
| 6. | Ст.А. | 107 | 6. | И.Ч. | 112 |
| 7. | Т.А. | 106 | 7. | И.В. | 105 |
| 8. | Ф.А. | 107 | 8. | К.О. | 108 |
| 9. | Ч.И. | 95 | 9. | Р.Р. | 111 |
| 10 | Ц.А. | 116 | 10 | Р.И. | 114 |
| 11 | См.А. | 127 | 11 | О.К. | 102 |
| **Студенты-физики** | | | **Студенты-психологи** | | |
| № | Код имени испытуемого | Показатель вербального интеллекта | № | Код имени испытуемого | Показатель вербального интеллекта |
| 12 | К.Ан. | 115 | 12 | Н.К. | 104 |
| 13 | Б.Л. | 102 | | | |
| 14 | Ф.В. | 99 | | | |

Можно ли утверждать, что одна из выборок превосходит другую по уровню невербального интеллекта?

*Решение.*

Сначала упорядочим, например, по возрастанию невербального интеллекта ряды индивидуальных значений в двух выборках и затем найдем их ранги. Результаты этих операций показаны в следующей таблице:

<table>
<tr><th colspan="2">Студенты-физики ($n_1$=14)</th><th colspan="2">Студенты-психологи ($n_2$=12)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Показатель невербального интеллекта</td><td>Ранг</td><td>Показатель невербального интеллекта</td><td>Ранг</td></tr>
<tr><td colspan="2">90</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">95</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">99</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">102</td><td>4,5</td><td>102</td><td>4,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">104</td><td>6,5</td><td>104</td><td>6,5</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td>105</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">106</td><td>9</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">107</td><td>11,5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">107</td><td>11,5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">107</td><td>11,5</td><td>107</td><td>11,5</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td>108</td><td>14</td></tr>
<tr><td colspan="2">111</td><td>15,5</td><td>111</td><td>15,5</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td>112</td><td>17</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td>113</td><td>18</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td>114</td><td>19</td></tr>
<tr><td colspan="2">115</td><td>20,5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">115</td><td>20,5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">116</td><td>22</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td>117</td><td>23</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td>122</td><td>24</td></tr>
<tr><th colspan="2">Студенты-физики ($n_1$=14)</th><th colspan="2">Студенты-психологи ($n_2$=12)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Показатель невербального интеллекта</td><td>Ранг</td><td>Показатель невербального интеллекта</td><td>Ранг</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td>123</td><td>25</td></tr>
<tr><td colspan="2">127</td><td>26</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Суммы</td><td>1501</td><td>165</td><td>1338</td><td>186</td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Средние | $\frac{1501}{14} \approx 107,$ | | $\frac{1338}{12} = 111{,}5$ | |

Из этой таблицы мы видим, что по уровню невербального интеллекта более «высоким» рядом оказывается выборка студентов-психологов, т.к. на нее приходится большая ранговая сумма.

Общая сумма рангов: 165+186=351.

Расчетная сумма: $\sum R_i = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{(14+12)(14+12+1)}{2} = 351.$

Равенство реальной и расчетной сумм соблюдено.

Сформулируем гипотезы:

*$H_0$:* группа студентов-психологов не превосходит группу студентов-физиков по уровню невербального интеллекта.

*$H_1$:* группа студентов-психологов превосходит группу студентов-физиков по уровню невербального интеллекта.

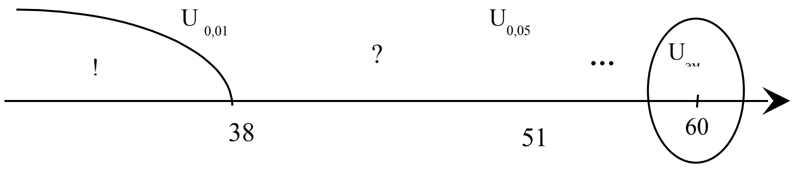
Используем алгоритм критерия *U*-Манна-Уитни для проверки гипотезы.

Рассчитаем $U_{эмп} = (14 \cdot 12) + \frac{12(12+1)}{2} - 186 = 60.$

**По таблице 2 (Приложение) определяем:**

$$U_{кр} = \begin{cases} 51(\rho \le 0{,}05), \\ 38(\rho \le 0{,}01)\ при\ n_1 = 12\ и\ n_2 = 14. \end{cases}$$

Построим ось значимости:




$U_{эм} = 60 > 51 = U_{кр \cdot 0{,}05}$. Следовательно, нет оснований отвергнуть гипотезу *$H_0$*. Это означает, что группа студентов-психологов не превосходит группу студентов-физиков по уровню невербального интеллекта.

***3. Н-критерий Крускала-Уоллиса***

Этот критерий предназначен для оценки различий одновременно между тремя и большим количеством выборок по уровню какого-либо признака. Этот критерий как бы продолжает критерий *U*-Манна-Уитни на большее, чем 2, количество сопоставляемых выборок.

*Алгоритм метода*

1. Перенести все варианты всех выборок на индивидуальные карточки.
2. Пометить разным цветом карточки различных выборок.
3. Разложить все карточки в единый ряд по возрастанию значений вариант, не считаясь с тем, к какой выборке относятся карточки.
4. Проранжировать значения на карточках, приписывая меньшей варианте меньший ранг. Алгоритм ранжирования описан при рассмотрении алгоритма *U*-Манна-Уитни.
5. Вновь разложить карточки по выборкам.
6. Подсчитать суммы рангов отдельно по каждой выборке. Проверить совпадение общей суммы рангов с расчетной.
7. Рассчитать эмпирическое значение критерия $H_{эмп}$ по формуле:

$$H_{эмп} = \left( \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_j \frac{T_j^2}{n_j} \right) - 3(N+1),$$

где $N$ – сумма объемов всех выборок; $n_j$ – объем $j$ – ой группы; $j$=1, 2, 3, …$T_j$ –сумма рангов $j$ – ой группы.

8. а) Если число выборок 3, $n_1 \le 5, n_2 \le 5, n_3 \le 5,$ то $H_{кр}$ определить по таблице IV Приложения и сравнить с $H_{эмп}$. Если окажется, что $H_{эмп} \ge H_{кр \cdot 0,05}$, то гипотезу $H_0$. следует отвергнуть.

б) Если число выборок больше трех или $n_1 > 5, n_2 > 5$, и т.д., то по таблице IX (Приложения) определить критическое значение $X_{кр}^2$. Если окажется, что $H_{эмп} \ge X_{кр}^2$, то гипотезу $H_0$ следует отвергнуть.

***Пример 7.*** Проводился эксперимент по исследованию интеллектуальной настойчивости. При этом использовалось 4 комплекта неразрешимых анаграмм. Показатели длительности попыток решения каждой из четырех анаграмм (в секундах) представлены в следующей таблице (все испытуемые были юноши-студенты технического вуза в возрасте от 20 до 22 лет):

| | Группа 1: анаграмма ФОЛИТОН | Группа 2: анаграмма КАМУСТО | Группа 3: анаграмма СНЕРАКО | Группа 4: анаграмма ГРУТОСИЛ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 145 | 145 | 128 | 60 |
| 2 | 194 | 210 | 283 | 2361 |
| 3 | 731 | 236 | 469 | 2416 |
| 4 | 1200 | 385 | 482 | 3600 |
| 5 | | 720 | 1678 | |
| 6 | | 848 | 2081 | |
| 7 | | 905 | | |
| 8 | | 1080 | | |
| $\sum$ | 2270 | 4529 | 5121 | 8437 |
| Средние | 568 | 566 | 854 | 2109 |

Можно ли утверждать, что длительность попыток решения каждой из 4 неразрешимых анаграмм примерно одинакова?

*Решение.*

Проверим гипотезы:

$H_0$: 4 группы испытуемых, получившие разные неразрешимые анаграммы, не различаются по длительности попыток их решения.

$H_1$: 4 группы испытуемых различаются по длительности попыток решения предложенных анаграмм.

Сначала упорядочим, например, по возрастанию варианты в каждой из четырех групп, а затем найдем их ранги по правилам, указанным в предыдущем примере. Результаты этих операций представим в следующей таблице:

| **Группа 1** | | **Группа 2** | | **Группа 3** | | **Группа 4** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Длительность | Ранг | Длительность | Ранг | Длительность | Ранг | Длительность | Ранг |
| | | | | | | 60 | 1 |
| | | | | 128 | 2 | | |
| 145 | 3,5 | 145 | 3,5 | | | | |
| 194 | 5 | | | | | | |
| **Группа 1** | | **Группа 2** | | **Группа 3** | | **Группа 4** | |
| Длительность | Ранг | Длительность | Ранг | Длительность | Ранг | Длительность | Ранг |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 210 | 6 | | | | |
| | | 236 | 7 | | | | |
| | | | | 238 | 8 | | |
| | | 385 | 9 | | | | |
| | | | | 469 | 10 | | |
| | | | | 482 | 11 | | |
| | | 720 | 12 | | | | |
| 731 | 13 | | | | | | |
| | | 848 | 14 | | | | |
| | | 905 | 15 | | | | |
| | | 1080 | 16 | | | | |
| 1200 | 17 | | | | | | |
| | | | | 1678 | 18 | | |
| | | | | 2081 | 19 | | |
| | | | | | | 2361 | 20 |
| | | | | | | 2416 | 21 |
| | | | | | | 3600 | 22 |
| $\sum$ | 38,5 | | 82,5 | | 68 | | 64 |
| Средние | 9,625 | | 10,3125 | | 11.33 | | 16 |

Общая сумма рангов 38,5+82,5+68+64=253.

Расчетная сумма рангов

$$\sum R_i = \frac{n_1+n_2+n_3+n_4}{2}\cdot(n_1+n_2+n_3+n_4+1) =$$

$$= \frac{4+8+6+4}{2}(4+8+6+4+1) = \frac{22}{2}\cdot 23 = 253.$$

Равенство реальной и расчетной сумм соблюдено.

Рассчитаем

$$H_{эмп} = \frac{12}{22(22+1)}\left(\frac{38{,}5^2}{4}+\frac{82{,}5^2}{8}+\frac{68^2}{6}+\frac{64^2}{4}\right)-3(22+1) =$$

$$= \frac{6}{253}(370{,}5625+850{,}78125+770{,}66667+1024)-69 \approx 2{,}53.$$

По таблице критических точек $X^2$ (табл. IX) найдем $X^2_{кр}$. Но сначала найдем число степеней свободы $\nu = C-1$, где $C$ – число заданных выборок (число групп). $\nu = 4-1=3$.

$$X^2_{кр} = \begin{cases} 7{,}815\ (\rho \le 0{,}05); \\ 11{,}345\ (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

$H_{эмп} = 2{,}53 < 7{,}815 = X^2_{кр}$. Это означает, что нет оснований отвергнуть гипотезу $H_0$, т.е. 4 группы испытуемых, получившие разные неразрешимые анаграммы, не различаются по длительности попыток их решения.

***4. S-критерий тенденций Джонкира***

Критерий предназначен для выявления тенденций изменения признака при переходе от выборки к выборке и при сопоставлении трех и более выборок. В каждой выборке должно быть одинаковое число вариант. Нижний порог: не менее 3 выборок и не менее 2 вариант в каждой выборке. Верхний порог: не более 6 выборок и не более 10 вариант в каждой выборке.

*Алгоритм критерия*

1. Уравнять выборки, ориентируясь на выборку наименьшего объема.
2. Расположить варианты каждой выборки в порядке возрастания.
3. Упорядочить выборки по какому-либо признаку.
4. Начиная с крайнего левого столбца подсчитать для каждой варианты количество превышающих его значений во всех столбцах справа ($S_i$). Полученные суммы записать в скобках рядом с каждой вариантой.
5. Подсчитать суммы показателей в скобках по столбцам.
6. Подсчитать общую сумму, просуммировав все суммы по столбцам. Эту общую сумму обозначить $A$.
7. Подсчитать максимально возможное количество превышающих значений ($B$), которое мы получили бы, если бы все значения справа были выше значений слева по формуле:

$$B = \frac{C(C-1)}{2} \cdot n^2,$$

где $C$ – количество выборок (столбцов, сопоставляемых групп); $n$ – объем каждой выборки.

8. Определить эмпирическое значение критерия $S$ по формуле $S_{эмп} = 2A - B$.
9. Определить $S_{кр}$ по паблице III Приложения для данного количества ($C$) выборок и количества вариант в каждой выборке ($n$).

Сравнить $S_{эмп}$ с $S_{кр}$. Если окажется, что $S_{эмп} \geq S_{кр}$, то гипотеза $H_0$ отвергается.

***Пример 8.*** Требовалось выбрать коммерческого директора в Санкт-Петербургском филиале зарубежной фирмы. Выбор осуществлялся по специальной методике. Были обследованы 20 мужчин в возрасте от 25 до 40 лет. Оценки производились по 15 значимым психологическим качествам. Одним из этих качеств была «авторитетность». В конце обследования производился социометрический опрос всех 20 мужчин, в котором они должны были ответить на вопрос: Если бы я сам работал в этой фирме, то я выбрал бы на должность директора: 1), 2), 3) и т.д. Этот вопрос проверял способность всех участников к объективному суждению о людях. В результате такого опроса каждый участник получил то ли иное количество выборов от других участников, отражающее его социометрический статус в группе претендентов. Результаты исследования представлены в следующей таблице:

| Номер испытуемых | Группа 1: 0 выборов | Группа 2: 1 выбор | Группа 3: 2–3 выбора | Группа 4: 4 и более выборов |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 5 | 9 |
| 2 | 5 | 6 | 6 | 9 |
| 3 | 2 | 7 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 5 | 4 | 4 | 5 | 7 |
| $\sum$ | 21 | 28 | 30 | 41 |
| Средние | 4,2 | 5,6 | 6,0 | 8,2 |

Можно ли считать, что группы с разным статусом различаются и по уровню авторитетности, определявшейся независимо от социометрии с помощью использованной диагностики?

*Решение.*

Проверим гипотезы:

$H_0$ – тенденция повышения значений по шкале «авторитетности» при переходе от группы к группе (слева направо) случайна;

$H_1$ – неслучайна.

Упорядочим варианты в каждой группе в порядке возрастания и подсчмтаем $S_i$ в каждой группе:

| Номер испы-ту-емо-го | Группа 1: 0 выборов | | Группа 2: 1 выбор | | Группа 3: 2–3 выбора | | Группа 4: 4 и более вы-боров |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Вариан-та | $S_i$ | Варианта | $S_i$ | Варианта | $S_i$ | Варианта |
| 1 | 2 | (15) | 4 | (10) | 5 | (5) | 7 |
| 2 | 4 | (14) | 5 | (8) | 5 | (5) | 8 |
| 3 | 5 | (11) | 6 | (7) | 6 | (5) | 8 |
| 4 | 5 | (11) | 6 | (7) | 7 | (4) | 9 |
| 5 | 5 | (11) | 7 | (4) | 7 | (4) | 9 |
| $\sum$ | | (62) | | (36) | | (23) | |

*Пояснения к составлению столбцов $S_i$.*

Начнем с группы 1. Варианту «2» в ней превышают все варианты групп 2, 3, 4; их число равно 5+5+5=15. Это число записываем в скобках в столбец $S_i$ группы 1 рядом с вариантой 2. Варианту “4” в группе 1 превышают все варианты групп 2, 3 и 4, за исключением варианты “4” группы 2. Их число равно 4+5+5=14; это число записываем в скобках в столбец $S_i$ рядом с вариантой “4” группы 1. Варианту “5” в группе 1 превышают 3 варианты группы 2, 3 варианты группы 3 и все 5 вариант группы 4, т.е. всего 3+3+5=11 вариант; это число записываем в скобках в столбец $S_i$ в группе 1 рядом с вариантами 5.

Расчет $S_i$ для второго столбца производим по тому же принципу, сравнивая варианты столбца 2 с вариантами столбцов 3 и 4.

Найдем величину $A$, сложив суммы всех столбцов $S_i$: $A$=62+36+23+0=121.

Найдем величину $B$ по формуле $B = \frac{C(C-1)}{2} \cdot n^2$.

$$B = \frac{4(4-1)}{2} \cdot 5^2 = 150$$

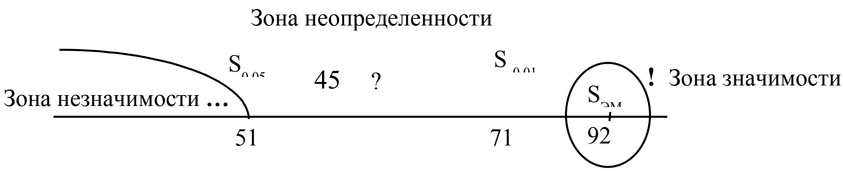
Найдем $S_{эмп} = 2A - B = 2 \cdot 121 - 150 = 242 - 150 = 92.$

По таблице IV определим $S_{кр}$ для $c$=4, $n$=5:

$$S_{кр} = \begin{cases} 51\,(\rho \le 0{,}05); \\ 71\,(\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

Построим ось значимости:

Сравним $S_{эмп}$ и $S_{кр}$.



$S_{эмп} = 92 > 71 = S_{0,01}$. Следовательно, гипотеза $H_0$ отвергается, гипотеза $H_1$ принимается. Это означает, что тенденция повышения значений по шкале “авторитетности” при переходе от группы к группе неслучайна с вероятностью 0,99.

## Тема 4. Оценка достоверности сдвига (изменения) в значениях исследуемого признака

***Литература:*** [1], гл.3, п.3.1-3.5, стр. 72–107; [2], р. С, II, п. 10.3, стр. 487–489; [6], гл. 4, § 4 – § 8, стр. 147–172; гл. 7, стр. 245-267; [7], гл. 6, стр. 96–117; [8], гл. 4, стр. 85–114.

В психологических исследованиях часто приходится иметь дело с факторами, которые меняются под влиянием, например, времени (временной сдвиг), разных условий (ситуационный сдвиг, умозрительный сдвиг) и т.д. Во всех этих случаях речь идет о сдвиге под влиянием контролируемых или неконтролируемых воздействий. Поэтому наряду с экспериментальными выборками рассматривают контрольную выборку, с которой сравнивают экспериментальную.

Существуют еще структурные сдвиги, когда сравнивают между собой разные показатели одних и тех же испытуемых (перепад между вербальным и невербальным интеллектом, сопоставление экспертных оценок эмпатичности и наблюдательности; сопоставление времени решения двух задач или экзаменационных оценок по разным предметам и т.д.). Условимся под «сдвигом» понимать изменение, разность между двумя замерами.

Следующая таблица познакомит Вас с классификацией сдвигов и укажет статистические методы оценок их достоверности.

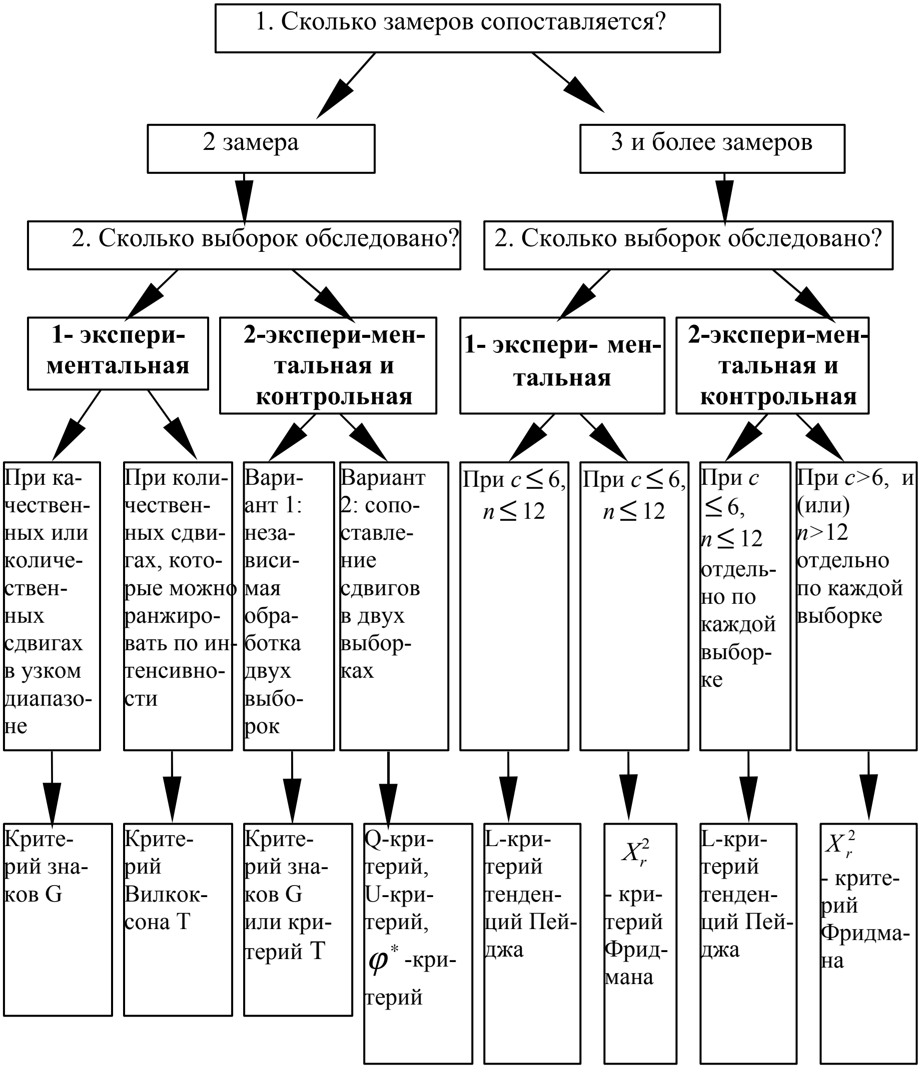
| | Вид сдвига | Объект сопоставления | Условие | | Критерий оценки достоверности сдвига |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Кол-во замеров | Кол-во групп | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Временные, ситуационные, умозрительные, измерительные | Одни и те же показатели, измеренные у одних и тех же испытуемых в разное время, в разных ситуациях, разными способами. | 2 | 1 | G–критерий знаков;<br>T–критерий Вилкоксона |
| | | | 3 и более | 1 | L – критерий тенденций Пейджа;<br>$X_r^2$ – критерий Фридмана |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | Сдвиг под влиянием эксперимен-тальных воз-действий | Одни и те же пока-затели, измерен-ные у одних и тех же испытуемых до и после воздей-ствия | | | |
| | | а) при отсутствии контрольной груп-пы | 2 | 1 | G – критерий зна-ков;<br>T – критерий Вил-коксона |
| | | | 3 и бо-лее | 1 | L – критерий тен-денций Пейджа;<br>$X_r^2$ – критерий Фридмана |
| | | б) при наличии контрольной группы | 2 | 2 | *Вариант 1.* –сопо-ставление значе-ний «до» и «по-сле» отдельно по эксперименталь-ной и контрольной группам:<br>G – критерий зна-ков;<br>T – критерий Вил-коксона.<br>*Вариант 2.* – со-поставление сдви-гов в двух груп-пах:<br>Q – критерий;<br>U – критерий Манна-Уитни; $\varphi^*$ – критерий Фишера. |
| | | | 3 и бо-лее | 2 | Сопоставление значений отдельно по эксперимен-тальной и контрольной груп-пам:<br>L-критерий тен- |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | Структурные сдвиги | Разные показатели одних и тех же испытуемых | 2 | 1 | G – критерий знаков;<br>T – критерий Вилкоксона. |
| | | | 3 и более | 1 | L – критерий тенденций Пейджа;<br>$X_r^2$ – критерий Фридмана. |

**Алгоритм принятия решения о выборе критерия оценки сдвига**

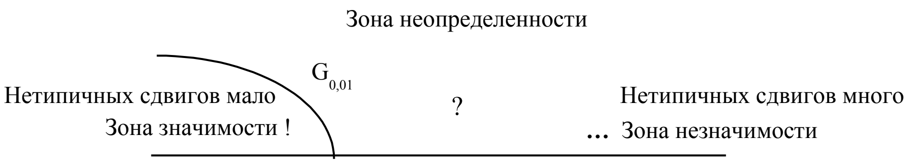


***1. G-критерий знаков*** (критерий Мак-Немара).

Он предназначен для установления общего направления сдвига исследуемого признака (изменяются ли показатели в сторону улучшения, повышения или усиления или, наоборот, в сторону ухудшения, понижения или ослабления). Он применим и к качественным сдвигам (изменение отрицательного отношения к чему-либо на положительное) и к количественным (сокращение времени работы над заданием).

Сдвиги, которые нам кажутся преобладающими, будем называть типичными, а сдвиги более редкого, противоположного направления – нетипичными. Суть критерия знаков состоит в том, что он определяет, не слишком ли много наблюдается «нетипичных сдвигов», чтобы сдвиг в «типичном» направлении считать преобладающим?

Зона значимости для этого критерия такова




*Алгоритм критерия*

1. Проверить количество наблюдений в обоих замерах. Их должно быть не менее 5 и не более 300.
2. Подсчитать количество нулевых реакций и исключить их из рассмотрения. В результате объем *n* выборок уменьшится на количество нулевых реакций.
3. Определить преобладающее направление изменений. Считать сдвиги в преобладающем направлении «типичными».
4. Определить количество «нетипичных» сдвигов. Считать это число эмпирическим значением критерия G.
5. По таблице V (Приложения) определить $G_{кр}$ для данного *n.*
6. Сравнить $G_{эмп}$ и $G_{кр}$. Если окажется, что $G_{эмп} \le G_{кр}$, то сдвиг в типичную сторону может считаться достоверным.

***Пример 9.*** Изучались личностные факторы суггестора, способствующие его внушающему воздействию на аудиторию из 39 человек факультета «Психологии» Санкт-Петербургского университета (9 мужчин и 30 женщин в возрасте от 18 до 39 лет). Экспериментальная группа состояла из 16 человек и они смотрели и слушали видеозапись речи суггестора о целесообразности применения физических наказаний в воспитании детей. Контрольная группа, состоящая из 23 человек, просто читали сами текст речи суггестора. До и после предъявления видеозаписи (в экспериментальной группе) и текста (в контрольной группе) испытуемые отвечали на 4 вопроса, оценивая степень согласия с их содержанием по 7-бальной шкале:

1. Я считаю возможным иногда шлепнуть своего ребенка за дело, если он этого заслужил.
2. Если, придя домой, я узнаю, что кто-то из близких бабушка или дедушка, шлепнул моего ребенка за дело, то я буду считать, что это нормально.
3. Если мне станет известно, что воспитательница детского сада или учительница в школе шлепнула моего ребенка за дело, то я восприниму это как должное.
4. Я бы согласился отдать своего ребенка в школу, где применяется система физических наказаний по итогам недели.

Оценки степени согласия
с утверждениями о допустимости телесных наказаний
до и после предъявления видеозаписи в экспериментальной группе:

| № п/п | Оценки и сдвиги оценок («после»-«до») по шкалам | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | «Я сам» | | | «Бабушка или дедушка» | | | «Воспитатель» | | | «Школа» | | |
| | «до» | «после» | сдвиг | «до» | «после» | сдвиг | «до» | «после» | сдвиг | «до» | «после» | сдвиг |
| 1 | 4 | 4 | 0 | 2 | 4 | +2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 5 | 5 | 0 | 4 | 4 | 0 | 4 | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 4 | 5 | +1 | 3 | 3 | 0 | 2 | 3 | +1 | 1 | 2 | +1 |
| 5 | 3 | 3 | 0 | 3 | 4 | +1 | 2 | 3 | +1 | 1 | 1 | 0 |
| 6 | 4 | 5 | +1 | 5 | 5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 3 | 3 | 0 | 3 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 5 | 6 | +1 | 5 | 6 | +1 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 | -1 |
| 9 | 6 | 7 | +1 | 5 | 7 | +2 | 3 | 3 | 0 | 1 | 2 | +1 |
| 10 | 2 | 3 | +1 | 2 | 3 | +1 | 2 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 6 | 6 | 0 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 5 | 5 | 0 | 3 | 5 | +2 | 4 | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 13 | 7 | 7 | 0 | 5 | 5 | 0 | 4 | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 14 | 5 | 6 | +1 | 5 | 6 | +1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | +1 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 5 | 6 | +1 | 5 | 6 | +1 | 4 | 3 | -1 | 2 | 2 | 0 |
| 16 | 6 | 7 | +1 | 6 | 7 | +1 | 4 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 |

Оценки степени согласия с утверждениями
о допустимости телесных наказаний до и после предъявления
письменного текста в контрольной группе.

| № п/п | Оценки и сдвиги оценок («после»-«до») по шкалам | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | «Я сам» | | | «Бабушка или дедушка» | | | «Воспитатель» | | | «Школа» | | |
| | «до» | «по-сле» | сдвиг | «до» | «по-сле» | сдвиг | «до» | «по-сле» | сдвиг | «до» | «по-сле» | сдвиг |
| 1 | 4 | 4 | 0 | 5 | 5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 7 | 7 | 0 | 7 | 7 | 0 | 7 | 7 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 1 | -2 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 4 | 3 | -1 | 3 | 2 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 3 | 5 | +2 | 5 | 5 | 0 | 3 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 6 | 2 | 1 | -1 | 2 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 5 | 5 | 0 | 3 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 2 | 2 | 0 | 2 | 3 | +1 | 1 | 3 | +2 | 1 | 3 | +2 |
| 9 | 3 | 4 | +1 | 3 | 4 | +1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 6 | +5 |
| 10 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 5 | 5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | +1 | 6 | 7 | +1 |
| 14 | 4 | 3 | -1 | 7 | 5 | -2 | 2 | 4 | +2 | 1 | 1 | 0 |
| 15 | 3 | 4 | +1 | 2 | 3 | +1 | 1 | 2 | +1 | 1 | 1 | 0 |
| 16 | 4 | 4 | 0 | 3 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 17 | 3 | 3 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 18 | 6 | 6 | 0 | 6 | 6 | 0 | 6 | 6 | 0 | 1 | 3 | +2 |
| 19 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 20 | 1 | 2 | +1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 21 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| 22 | 6 | 6 | 0 | 6 | 6 | 0 | 3 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 23 | 3 | 2 | -1 | 1 | 2 | +1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

1. Можно ли утверждать, что после просмотра видеозаписи о пользе телесных наказаний наблюдается достоверный сдвиг в сторону большего принятия их в экспериментальной группе?

2. Является ли достоверным сдвиг оценок в контрольной группе?

*Решение.*

Подсчитаем сначала количество положительных, отрицательных и нулевых сдвигов по каждой шкале в каждой из выборок

| Количество сдвигов в группах | Шкалы | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | «Я сам» | «Бабушка или дедушка» | «Воспитатель» | «Школа» | $\sum$ |
| 1. Экспериментальная группа | | | | | |
| А) положительных | 8 | 9 | 2 | 3 | 22 |
| Б) отрицательных | 0 | 0 | 3 | 1 | 4 |
| В) нулевых | 8 | 7 | 11 | 12 | 38 |
| $\sum$ | 16 | 16 | 16 | 16 | 64 |
| 2. Контрольная группа | | | | | |
| А) положительных | 4 | 4 | 4 | 4 | 16 |
| Б) отрицательных | 4 | 4 | 2 | 0 | 10 |
| В) нулевых | 15 | 15 | 17 | 19 | 66 |
| $\sum$ | 23 | 23 | 23 | 23 | 92 |

Нам надо учитывать только положительные и отрицательные сдвиги, а нулевые отбросить. Поэтому теперь для шкалы «Я сам» $n$=8+0=8; для шкалы «Бабушка или дедушка» $n$=9+0=9; для шкалы «Воспитатель» $n$=2+3=5 и шкалы «Школа» $n$=3+1=4. А т.к. по шкале «Школа» $n$=4<5, то критерий знаков вообще не применим.

Сформулируем гипотезы для экспериментальной группы;

*$H_0$:* сдвиг в сторону более снисходительного отношения к телесным наказаниям после внушения является случайным;

*$H_1$:* сдвиг в сторону более снисходительного отношения к телесным наказаниям после внушения является неслучайным.

1. Шкала «Я сам наказываю». $n$=8.

Типичный сдвиг – положительный (8>0).
Отрицательных сдвигов нет, поэтому нетипичный сдвиг равен 0, т.е. $G_{эмп}$=0.

По таблице V (Приложение) определяем:

$$G_{кр} = \begin{cases} 1 \quad (\rho \le 0{,}05), \\ 0 \quad (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

Т.к. $G_{эмп} \le G_{кр}$, то гипотеза $H_0$ отклоняется, а гипотеза $H_1$ принимается с уровнем значимости $\rho \le 0{,}1$.

2. Шкала «Наказывают бабушка или дедушка»
$n$=9.
Типичный сдвиг – положительный (9>0).
Отрицательных сдвигов нет.
Поэтому $G_{эмп}$=0.

$$G_{кр} = \begin{cases} 1 \quad (\rho \le 0{,}05), \\ 0 \quad (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

Т.к. $G_{эмп} \le G_{кр}$, то $H_0$ отклоняется, $H_1$ принимается с уровнем значимости ($\rho \le 0{,}01$).

3. Шкала «Воспитательница наказывает».
$n$=5.
Типичный сдвиг отрицательный (3>2).
Положительных сдвигов – 2.
Следовательно, $G_{эмп}$=2.
$G_{кр}=0$ ($\rho \le 0{,}05$)
$G_{кр}$= ($\rho \le 0{,}01$) при данном $n$ определить нельзя (его нет в таблице).
$G_{эм}$=2> $G_{кр}$=0 при ($\rho \le 0{,}05$).
Гипотеза $H_0$ принимается.

4. Шкала «Школа наказывает».
$n$=4.
$n<5$, критерий знаков неприменим.

5. сумма по 4 шкалам.
$n$=8+9+2+3+3+1=26.
Типичный сдвиг – положительный.
Отрицательных сдвигов 3=1=4.
Следовательно, $G_{эмп}$ =4.

$$G_{кр} = \begin{cases} 8 & (\rho \le 0{,}05), \\ 6 & (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

$G_{эмп}$=4<6= $G_{кр0,01}$.

Гипотеза $H_0$ отклоняется. Гипотеза $H_1$ принимается при уровне значимости $\rho \le 0{,}01$.

Сформулируем гипотезы для контрольной группы:

$H_0$: сдвиг в сторону более снисходительного отношения к телесным наказаниям после прочтения текста является случайным;

$H_1$: сдвиг – не является случайным.

Принять или отвергнуть гипотезу $H_0$ предоставляется студенту. Эта работа выполняется по каждой шкале в отдельности и по сумме шкал аналогично той работе, которая была проделана для экспериментальной группы. Вы должны получить ответ: НЕТ, сдвиг оценок в контрольной группе недостоверен.

***2. Т-критерий Вилкоксона***

Этот критерий применяется для сопоставления показателей, измеренных в двух разных условиях на одной и той же выборке испытуемых. Он позволяет установить направленность изменений и их выраженность. С его помощью мы определяем, является ли сдвиг показателей в каком-то одном направлении более интенсивным, чем в другом.

Этот критерий проверяет гипотезы:

$H_0$: интенсивность сдвигов в типичном направлении не превосходит интенсивности сдвигов в нетипичном направлении;

$H_0$: – превышает.

*Алгоритм критерия*

1. Составить список испытуемых в любом порядке, например, алфавитном.
2. Вычислить разность между индивидуальными значениями во втором и первом замерах («после» – «до»). Определить, что будет считаться «типичным» сдвигом и сформулировать соответствующие гипотезы.
3. Перевести разности в абсолютные величины и записать их отдельным столбцом.

4. Проранжировать абсолютные величины разностей, начисляя меньшему значению меньший ранг. Проверить совпадение полученной суммы рангов с расчетной $\sum R_i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
5. Отметить кружками ранги, соответствующие сдвигам в «нетипичном» направлении.
6. Найти сумму этих рангов $T = \sum R_r$ , где $R_r$ – ранговые значения сдвигов с более редким знаком.
7. Определить критические значения $T_{кр}$ для данного $n$ – объем выборки по таблице VI (Приложения). Сравнить $T_{эмп}$ и $T_{кр}$ . Если окажется, что $T_{эмп} \leq T_{кр}$., то сдвиг в «типичную» сторону по интенсивности достоверно преобладает.

***Пример 10.*** Измерялось удержание физического волевого усилия на динамометре в выборке из 11 курсантов военного училища (юноши в возрасте от 18 до 20 лет). Замеры производились дважды: первый раз с обычной инструкцией, второй раз после того, как ему предлагалось представить себе, что он уже добился «идеала» в развитии волевых качеств и продемонстрировать соответствующее идеалу волевое усилие. Подтвердилась ли гипотеза экспериментатора о том, что обращение к идеалу способствует возрастанию волевого усилия?

Данные эксперимента представлены в таблице:

| Код имени испытуемого | | Длительность удержания усилия на динамометре (сек) | | Разность (сдвиги) (t после, t до) | (t после, t до) | Ранг |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | до изменения волевых качеств и обращения к идеалу (t до) | после изменения волевых качеств и обращения к идеалу (t после) | | | |
| 1 | Г. | 64 | 25 | -39 | 39 | 11 |
| 2 | Кос. | 77 | 50 | -27 | 27 | 8 |
| 3 | Крив. | 74 | 77 | +3 | 3 | 1 |
| 4 | Кур. | 95 | 76 | -19 | 19 | 6 |
| 5 | Л. | 105 | 67 | -38 | 38 | 9,5 |
| 6 | М. | 83 | 75 | -8 | 8 | 4 |
| 7 | Р. | 73 | 77 | +4 | 4 | 2,5 |
| 8 | С. | 75 | 71 | -4 | 4 | 2.5 |
| 9 | Т. | 101 | 63 | -38 | 38 | 9,5 |
| 10 | Х. | 97 | 122 | +25 | 25 | 7 |
| 11 | Ю. | 78 | 60 | -18 | 18 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sum$ | | | | | 66 |

*Решение.*

В этой же таблице справа заполним три последних столбика. Мы видим, что у 8 испытуемых разность (t после, t до) отрицательная, т.е. длительность удержания мышечного усилия во втором замере уменьшилась, а у 3 – увеличилась. Это означает, что мы не можем сформулировать нуль-гипотезу, соответствующую первоначальному предположению исследователя (см. вопрос задачи). Мы можем лишь сформулировать гипотезы:

$H_0$: интенсивность сдвигов в сторону уменьшения длительности мышечного усилия не превышает интенсивности сдвигов в сторону ее увеличения (иначе говоря, этот сдвиг случаен);

$H_1$: – превышает (иначе говоря, сдвиг неслучаен).

Найдем расчетную сумму рангов:

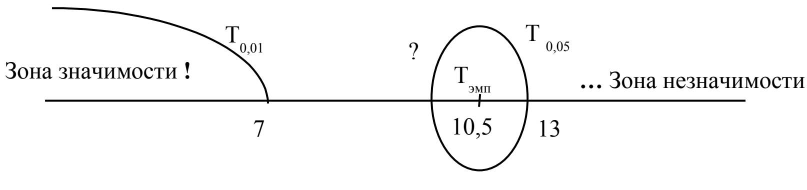
$$\sum R_i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{11(11+1)}{2} = 66.$$

Замечаем, что сумма рангов равна расчетной сумме рангов. В данном примере «нетипичными» сдвигами являются положительные (их меньшинство). Выделим соответствующие им ранги, взяв в кружки. Сумма этих «редких» рангов равна $T = \sum R_r = 1 + 2{,}5 + 7 = 10{,}5$ и является эмпирическим значением критерия: $T_{эмп}$=10,5.

По таблице VI (Приложение) определяем критические значения $T_{кр}$ для $n$=11 – объем выборки:

$$T_{кр} = \begin{cases} 13 \quad (\rho \le 0{,}05), \\ 7 \quad (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

Построим ось значимости:




Сравним $T_{эмп}$ с $T_{кр}$: $T_{эмп}$=10,5< $T_{кр \cdot 0,05}$ =13. Гипотеза $H_0$ отвергается. Гипотеза $H_1$ принимается. Это означает, что интенсивность отрицательного сдвига показателя физического волевого усилия превышает интенсивность положительного сдвига с вероятностью 0,95.

**3. *Критерий $\chi_r^2$ Фридмана.***

Этот критерий применяется для сопоставления показателей, измеренных в трех и более условиях на одной и той же выборке испытуемых. Критерий позволяет установить, что величины показателей от условия к условию изменяются, но при этом не указывает на направление изменений.

Гипотезы, проверяемые этим критерием:

*$H_0$*: между показателями, измеренными в разных условиях, существуют лишь случайные различия;

*$H_1$*: – неслучайные различия.

*Алгоритм критерия*

1. Проранжировать варианты первого испытуемого, полученные им в 1-м, 2-м, 3-м и т.д. замерах.
2. Проделать то же самое по отношению ко всем другим испытуемым.
3. Просуммировать ранги по условиям, в которых осуществились замеры. Проверить совпадение общей суммы рангов с расчетной суммой: $\sum R_i = n\frac{c(c+1)}{2}$, где $n$ – количество испытуемых; $c$ – количество замеров.
4. Определить эмпирическое значение критерия $\chi^2_{r\ эмп}$ по формуле:

$$\chi^2_{r\ эмп} = \left(\frac{12}{nc(c+1)} \cdot \sum (T_j^2)\right) - 3 \cdot n \cdot (c+1),$$

где $c$ – количество условий (замеров); $n$ – количество испытуемых (объем выборки); $T_j$ – суммы рангов по каждому условию.

5. Определить критические значения $\chi$:

а) при $c$=3, $n \leq$ 9 по таблице VII – А Приложения;

б) при $c$=4, $n \leq$ 4 по таблице VII – Б Приложения;

в) при большем количестве условий ($c$>4) и (или) испытуемых по таблице IX Приложения при $\nu = c$-1 (число степеней свободы).

6. Если $\chi^2_{r\ эмп} \geq \chi^2_{r\ кр}$, то различия достоверны.

***Пример 11.*** Изучалось изменение времени решения анаграмм при исследовании интеллектуальной настойчивости. Испытуемому предлагались задачи, которые становились все более и более трудными. Показатели времени решения анаграмм (в сек.) представлены в таблице:

| | Код имени испытуемого | Анаграмма 1: КРУА (РУКА) | Анаграмма 2: АЛСТЬ (СТАЛЬ) | Анаграмма 3: ИНААМШ (МАШИНА) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Л-в | 5 | 235 (так и не мог решить) | 7 |
| 2 | П-о | 7 | 604 | 20 |
| 3 | К-в | 2 | 93 | 5 |
| 4 | Ю-г | 2 | 171 | 8 |
| 5 | Р-о | 35 | 141 | 7 |
| | $\sum$ | 51 | 1244 | 47 |
| | Средние | 10,2 | 248,8 | 9,4 |

Достоверны ли различия во времени решения испытуемыми анаграмм?

*Решение.*

Проранжируем варианты, полученные по трем анаграммам каждым испытуемым. Например, пятый испытуемый Р-о меньше всего времени затратил на решение «Анаграммы 3» (7 с), следовательно, эта анаграмма получает ранг 1. На втором месте у него стоит «Анаграмма 1» (35 с), поэтому она получает ранг 2. Наконец, «Анаграмма 2» получает ранг 3, т.к. она решалась дольше двух других (141 с).

Сумма рангов по каждому испытуемому должна составлять 6.

| | Код имени испытуемого | Анаграмма 1 | | Анаграмма 2 | | Анаграмма 3 | | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Время (сек) | Ранг | Время (сек) | Ранг | Время (сек) | Ранг | |
| 1. | Л-в | 5 | 1 | 235 | 3 | 7 | 2 | 6 |
| 2. | П-о | 7 | 1 | 604 | 3 | 20 | 2 | 6 |
| 3. | К-в | 2 | 1 | 93 | 3 | 5 | 2 | 6 |
| 4. | Ю-ч | 2 | 1 | 171 | 3 | 8 | 2 | 6 |
| 5. | Р-о | 35 | 2 | 141 | 3 | 7 | 1 | 6 |
| | $\sum$ | | 6 | | 15 | | 9 | |

Общая сумма рангов: 6+15+9=30.

Расчетная сумма рангов: $\sum R_i = 5\frac{3(3+1)}{2} = 30.$

Суммы рангов совпали.

Гипотезы:

$H_0$: различия во времени, которое испытуемые тратят для решения трех различных анаграмм, являются случайными;

$H_1$: – не являются случайными.

Теперь определим

$$\chi^2_{r \cdot эмп} = \frac{12}{5 \cdot 3(3+1)} \cdot (6^2 + 15^2 + 9^2) - 3 \cdot 5(3+1) = 8{,}4.$$

Т.к. $c$=3, $n$=5, то $\chi^2_{r\, кр.} = 8{,}4$ при $\rho$ =0,0085 по таблице VII.

А т.к. $\chi^2_{r\, эмп} = 8{,}4 = 8{,}4 = \chi^2_{r\, кр}$, то это означает, что различия достоверны при уровне значимости $\rho$ =0,0085. Следовательно, гипотеза $H_0$ отклоняется, а гипотеза $H_1$ принимается, т.е. эти различия неслучайны. Это можно утверждать с доверительной вероятностью 0,9915.

***4. L-критерий тенденций Пейджа.***

Условия применения этого критерия те же, что и критерия $\chi^2_r$ Фридмана. Этот критерий можно считать продолжением критерия $\chi^2_r$ Фридмана, т.к. он не только констатирует различия, но и указывает на направление изменений (тенденцию в изменении величин признака).

Гипотезы, проверяемые этим критерием:

$H_0$: увеличение индивидуальных показателей при переходе от первого условия ко второму, а затем к третьему и далее, случайно;

$H_1$: – неслучайно.

Заметим, что это гипотезы о тенденциях изменения индивидуальных показателей.

*Алгоритм критерия*

Пункты 1, 2 и 3 те же, что и у алгоритма $\chi^2_r$ Фридмана.

4. Расположить все условия в порядке возрастания их ранговых сумм в таблице.

5. Определить $L_{эмп}$ по формуле: $L_{эмп} = \sum (T_j \cdot j)$, где

$T_j$ – сумма рангов по данному условию;

$j$ – порядковый номер, приписанный данному условию в упорядоченной последовательности условий.

6. По таблице VIII Приложения определить $L_{кр}$ для данных $n$ и $c$. Если окажется, что $L_{эмп} \geq L_{кр}$, то тенденция достоверна.

***Пример 12.*** Рассмотрим пример 11. Показатели времени решения анаграмм и их ранги представим в упорядоченной последовательности: анаграмма 1 (ее сумма рангов равна 6), анаграмма 3 (ее сумма рангов равна 9) и анаграмма 2 (ее сумма рангов равна 15). Ответим на вопрос: действительно ли время решения увеличивается при такой последовательности предъявления анаграмм?

| Код имени испытуемого | Условие 1: Анаграмма 1 | | Условие 2: Анаграмма 3 | | Условие 3: Анаграмма 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Время (сек) | Ранг | Время (сек) | Ранг | Время (сек) | Ранг |
| 1 | 5 | 1 | 7 | 2 | 235 | 3 |
| 2 | 7 | 1 | 20 | 2 | 604 | 3 |
| 3 | 2 | 1 | 5 | 2 | 93 | 3 |
| Код имени испытуемого | Условие 1: Анаграмма 1 | | Условие 2: Анаграмма 3 | | Условие 3: Анаграмма 2 | |
| | Время (сек) | Ранг | Время (сек) | Ранг | Время (сек) | Ранг |
| 4 | 2 | 1 | 8 | 2 | 171 | 3 |
| 5 | 35 | 2 | 7 | 1 | 141 | 3 |
| $\sum$ | 51 | 6 | 47 | 9 | 1244 | 15 |
| Средние | 10,2 | | 9,4 | | 289 | |

Сумма рангов составляет 6+9+15=30.

Расчетная сумма рангов: $\sum R_i = 5\frac{3\cdot(3+1)}{2} = 30$.

Суммы рангов совпали.

Сформулируем гипотезы:

$H_0$: тенденция увеличения индивидуальных показателей от первого условия к третьему является случайной (т.е. показатели отличаются незначимо).

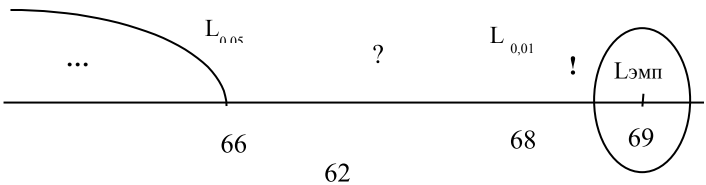
$H_0$: – не является случайной (отличие значимое).

Найдем $L_{эм}$=$\sum(T_j\cdot j) = 6\cdot 1 + 9\cdot 2 + 15\cdot 3 = 69.$

По таблице VIII Приложения определяем $L_{кр}$ дл $n$=5, $c$=3:

$$L_{кр} = \begin{cases} 66 \quad (\rho \le 0{,}05), \\ 68 \quad (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

Построим ось значимости



$L_{эмп}$=69>68=$L_{кр.,\ 0,01}$.

Гипотеза $H_0$ отклоняется. Принимается $H_1$. Тенденция увеличения индивидуальных показателей от первого условия к третьему не является случайной. И это можно утверждать с доверительной вероятностью 0,99.

## Тема 5. Выявление различий в распределении признака

*Литература:* [1] гл.4, п. 4.1 – 4.3, стр. 110–152; [6], гл. 6, §1–4, стр. 218–245; [7], гл. 7, стр. 126–134; [8], гл. 9, стр. 251–282.

Закон распределения интересующего нас признака выражает связь между вариантами этого признака и их соответствующими частотами. В основу классификации законов распределения кладется вид функции плотности распределения данного признака. Наибольшее распространение в психологических исследованиях получил нормальный закон, характеризуемый функцией плотности:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}$$, где $a$=МО(X), $\delta^2$=Д(X).

На практике часто возникает необходимость проверки согласованности заданного распределения, полученного в результате опыта (экспериментальным путем) с предполагаемым теоретическим, например, нормальным, или сопоставления несколько выборок одного и того же признака. Мы рассмотрим два критерия:

1. ***Критерий Пирсона $\chi^2$ («хи-квадрат»)***

Он отвечает на вопрос о том, с одинаковой ли частотой встречаются варианты в эмпирическом и теоретическом распределениях или в двух и более эмпирических распределениях.

Возможны несколько вариантов гипотез:

Первый вариант:

$H_0$: полученное эмпирическое распределение не отличается от теоретического (например, нормального) распределения;

$H_1$: – отличается.

Второй вариант:

$H_0$: Эмпирическое распределение первой выборки не отличается от эмпирического распределения второй выборки;

$H_1$: – отличается

Третий вариант:

$H_0$: эмпирические распределения 1, 2, 3, … не различаются между собой;

$H_1$: – различаются.

***Замечание.*** *Группировка вариант выборки может быть как дискретной, так и интервальной, а число вариант в каждой группе должно быть не менее 5. Объем выборки должен быть большим, во всяком случае* $n \geq 30$.

*Алгоритм критерия*

1. В первый столбец таблицы записать номера по порядку.
2. Во второй столбец записать варианты.
3. В третий столбец записать эмпирические частоты ($n_i$).
4. В четвертый столбец записать теоретические частоты ( $n_i^*$ ).
5. Подсчитать разности между эмпирической и теоретической частотой ( $n_i - n_i^*$ ) (пятый столбец).
6. Подсчитать $(n_i - n_i^*)^2$ (шестой столбец).
7. Найти $\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$ (седьмой столбец).
8. Просуммировать значения седьмого столбца. В результате получится $\chi^2_{эмп} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$.
9. Определить число степеней свободы по формуле $\nu = m - 1 - r$, где $m$ – число групп, $r$ – число параметров предполагаемого распределения.
10. Определить $\chi^2_{кр}$ для $\nu$ по таблице IX Приложения.
11. Сравнить $\chi^2_{эмп}$ и $\chi^2_{кр}$. Если окажется, что $\chi^2_{эмп} \geq \chi^2_{кр}$, то расхождения между распределениями статистически достоверны.

## ***Методика расчета теоретических частот нормального распределения***

Следует различать два случая:

1. Эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих вариант.

Тогда $n_i^* = \frac{n\Delta x}{\delta_в} \varphi(u_i)$, где $n$ – объем выборки (сумма всех частот); $\Delta x$ – шаг ряда (разность между двумя соседними вариантами); $\delta_в$ – выборочное среднее квадратическое отклонение; $u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_в}{\delta_в}$, где $\overline{x}_в$ – среднее выборочное;

$\varphi(u_i) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$ – табулированная функция. (Таблица XVIII Приложения)

2. Эмпирическое распределение задано в виде последовательности интервалов одинаковой длины.

Тогда $n_i^* = n \cdot P_i$,

где $P_i = \Phi(z_{i+1}) \times \Phi(z_i)$, здесь $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - табулированная функция Лапласа (Таблица XIX Приложения), причем $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_в}{\delta_в}$, $z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x}_в}{\delta_в}$.

***Замечание.*** *Малочисленные частоты ($n_i < 5$) следует объединить; в этом случае и соответствующие им теоретические частоты также надо сложить. При объединении частот в формуле $\nu = m - 1 - r$ в качестве m следует взять число групп, оставшихся после объединения частот.*

***Пример 12.*** Задано распределение длины окружности груди у 500 студентов. Можно ли считать, что это эмпирическое распределение хорошо согласуется с предложением о нормальном распределении?

| Длина окружности груди (см) | Число студентов |
|---|---|
| 74,5 – 77,5 | 3 |
| 77,5 – 80,5 | 19 |
| 80,5 – 83,5 | 63 |
| 83,5 – 86,5 | 104 |
| 86,5 – 89,5 | 138 |
| 89,5 – 92,5 | 101 |
| 92,5 – 95,5 | 43 |
| 95,5 – 98,5 | 22 |

| | |
|---|---|
| 98,5 – 101,5 | 4 |
| 101,5 – 104,5 | 2 |
| 104,5 – 107,5 | 1 |
| $\sum$ | 500 |

Проверим гипотезы:

$H_0$: – полученное эмпирическое распределение не отличается от нормального;

$H_1$: – отличается.

*Решение*

Прежде всего, рассчитаем оценки параметров нормального распределения $\overline{x_в}$ и $\overline{\delta_в}$ . Для этого используем упрощенный метод расчета. Это можно сделать, т.к. изучаемый признак – длина окружности груди – представлен интервалами одинаковой длины $\Delta x$ =3 см. Используем рекомендации, данные в [10], Тема 5, стр. 38-46.

Перейдем к условным вариантам по формуле $u_i = \dfrac{x_i - c}{\Delta x}$.

$$u_i = \frac{x_i - 88}{3},$$

где $x_i$ – середины заданных интервалов, $c = 88 = \dfrac{86{,}5 + 89{,}5}{2}$ , т.к. интервалу 86,5–89,5 соответствует наибольшая частота, равная 138.

Составим вспомогательную расчетную таблицу:

| $x_i$ | $n_i$ | $u_i$ | $u_i n_i$ | $u_i^2 n_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 76 | 3 | -4 | -12 | 48 |
| 79 | 19 | -3 | -57 | 171 |
| 82 | 63 | -2 | -126 | 252 |
| 85 | 104 | -1 | -104 | 104 |
| 88 | 138 | 0 | -299 | 0 |
| 91 | 101 | 1 | 101 | 101 |
| 94 | 43 | 2 | 86 | 172 |
| 97 | 22 | 3 | 66 | 198 |
| 100 | 4 | 4 | 16 | 64 |
| 103 | 2 | 5 | 10 | 50 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 106 | 1 | 6 | 6 | 36 |
| | | | 285 | |
| $\sum$ | 500 | | -14 | 1196 |

Теперь найдем условные среднюю и дисперсию.

$$\overline{u} = \frac{\sum u_i n_i}{n} = \frac{-14}{500} = -0{,}028$$ – условная средняя

$$\overline{u^2} = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n} = \frac{1196}{500} = 2{,}392$$

$$\delta_u^2 = \overline{u^2} - (\overline{u})^2 = 2{,}392 - (-0{,}028)^2 = 2{,}391216$$ – условная дисперсия;

$$\delta_u = \sqrt{2{,}391216} \approx 1{,}5436$$ – условное среднее квадратическое отклонение.

Теперь рассчитаем выборочные среднюю и среднее квадратическое отклонение:

$$\overline{x^в} = \Delta x \cdot \overline{u} + C = 3 \cdot (-0{,}028) + 88 = 87{,}916 \approx 87{,}92$$

$$\delta_в = \Delta x \delta_u = 4{,}639 \approx 4{,}64 \,.$$

Для расчета теоретических частот $n_i^*$ составим вспомогательные расчетные таблицы:

| № п/п | Интер-валы ($x_i$-$x_{i+1}$) | $x_i - \overline{x}_в$ | $x_{i+1} - \overline{x}_в$ | $z_i$ | $z_{i+1}$ | $\Phi(z_i)$ | $\Phi(z_{i+1})$ | $P_i$ | $n_i^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 74,5 – 77,5 | $-\infty$ | -10,42 | $-\infty$ | -2,25 | -0,5 | -0,4878 | 0,0122 | 6,1 |
| 2. | 77,5 – 80,5 | -10,42 | -7,42 | -2,25 | -1,60 | -0,4878 | -0,4452 | 0,0426 | 21,3 |
| 3. | 80,5 – 83,5 | -7,42 | -4,42 | -1,60 | -0,95 | -0,4452 | -0,3289 | 0,1163 | 58,15 |

| № п/п | Интервалы $(x_i$-$x_{i+1})$ | $x_i - \bar{x}_в$ | $x_{i+1} - \bar{x}_в$ | $z_i$ | $z_{i+1}$ | $\Phi(z_i)$ | $\Phi(z_{i+1})$ | $P_i$ | $n_i^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4. | 83,5 – 86,5 | -4,42 | -1,42 | -0,95 | -0,31 | -0,3289 | -0,1217 | 0,2072 | 103,6 |
| 5. | 86,5 – 89,5 | -1,42 | 1,58 | -0,31 | 0,34 | 0,1217 | 0,1331 | 0,2548 | 127,4 |
| 6. | 89,5 – 92,5 | 1,58 | 4,58 | 0,34 | 0,99 | 0,1331 | 0,3389 | 0,2058 | 102,9 |
| 7. | 92,5 – 95,5 | 4,58 | 7,58 | 0,99 | 1,63 | 0,3389 | 0,4484 | 0,1095 | 54,75 |
| 8. | 95,5 – 98,5 | 7,58 | 10,58 | 1,63 | 2,28 | 0,4484 | 0,4887 | 0,0403 | 20,15 |
| 9. | 98,5 – 101,5 | 10,58 | 13,58 | 2,28 | 2,93 | 0,4887 | 0,4983 | 0,0096 | 4,8 |
| 10. | 101,5 – 104,5 | 13,58 | 16,58 | 2,93 | 3,55 | 0,4983 | 0,4998 | 0,0015 | 0,75 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11. | 104,5 – 107,5 | 16,58 | $+\infty$ | 3,55 | $+\infty$ | 0,4998 | 0,5 | 0,0002 | 0,1 |
| | $\sum$ | | | | | | | | 500 |

Теоретические частоты $n_i^*$ найдены.

Для расчета $\chi^2_{эмп}$ составим расчетную таблицу:

| № п/п | $n_i$ | $n_i^*$ | $n_i - n_i^*$ | $(n_i - n_i^*)^2$ | $\dfrac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\left.\begin{matrix}3\\19\end{matrix}\right\}22$ | $\left.\begin{matrix}6{,}1\\21{,}3\end{matrix}\right\}27{,}4$ | -5,4 | 29,16 | 1,0642 |
| 2. | | | | | |
| 3. | 63 | 58,15 | 4,85 | 23,52 | 0,4045 |
| 4. | 104 | 103,6 | 0,4 | 0,16 | 0,0015 |
| 5. | 138 | 127,4 | 10,6 | 112,36 | 0,8819 |
| 6. | 101 | 102,9 | -1,9 | 3,61 | 0,0351 |
| 7. | 43 | 54,75 | -11,75 | 138,0625 | 2,5217 |
| 8. | 22 | 20,15 | 1,85 | 3,4225 | 0,1699 |
| 9. | $\left.\begin{matrix}4\\2\\1\end{matrix}\right\}7$ | $\left.\begin{matrix}4{,}8\\0{,}75\\0{,}1\end{matrix}\right\}5{,}65$ | 1,35 | 1,8225 | 0,3226 |
| 10. | | | | | |
| 11. | | | | | |
| $\sum$ | 500 | 500 | | | 5,4014 |

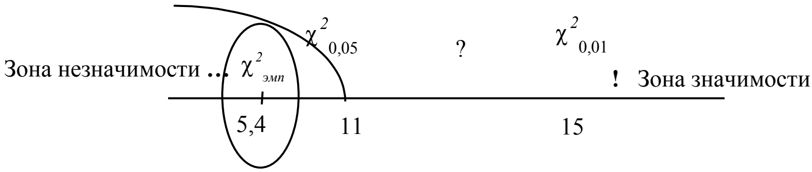
Таким образом, $\chi^2_{эмп}$ =5,4014.

Теперь найдем число степеней свободы $\nu = m - 1 - r$, т.е. $m$=8 – число групп после укрупнения частот; $r$=2 – число параметров нормального распределения ($\bar{x}_в, \delta_в$), которое было вычислено по заданной выборке.

***Пояснение.*** Число независимых величин, участвующих в образовании того или иного параметра, называется числом степеней свободы этого параметра. Оно равно общему числу величин, по которым вычисляется параметр, минус число условий, связывающих эти величины. При вычислении $\chi^2_{эмп}$ используются 8 групп вариант признака, которые связаны тремя условиями $\sum n_i = n$, $\bar{x}_в = \frac{\sum x_i n_i}{n}$, Поэтому $\nu$ =8-3=5.

По таблице IX Приложения найдем $\chi^2_{кр} = \begin{cases} 11{,}070 & (\rho \le 0{,}05), \\ 15{,}086 & (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$

Построим ось значимости:




Т.к. $\chi^2_{эмп}=5,4<11=\chi^2_{кр\ 0,05}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу $H_0$. Т.о. распределение студентов по длине окружности груди мало отличается от нормального распределения.

С помощью критерия $\chi^2$ можно сравнивать между собой два эмпирических распределения. Эта задача возникает тогда, когда хотят проверить однородность эмпирического материала: если окажется, что две эмпирические совокупности распределены одинаково, то их можно считать выборками из одной и той же генеральной совокупности. Тогда их можно объединить в одну выборку большего объема. Расчет $\chi^2_{эмп}$ в этом случае производится несколько иначе. Покажем это на примере.

***Пример 13.*** В таблице приведены два эмпирических распределения, в отношении которых предполагается, что они взяты из одной и той же генеральной совокупности:

| $x_i$ | $n_i'$ | $n_i''$ |
|---|---|---|
| 2 | 5 | 9 |
| 4 | 6 | 4 |
| 6 | 8 | 10 |
| 8 | 10 | 6 |
| 10 | 6 | 6 |
| $\sum$ | 35 | 35 |

Проверим это предположение.

*Решение.*

В качестве теоретических частот можно взять полу сумму эмпирических частот, относящихся к одинаковым значениям вариант.

Тогда получим таблицу:

| $n_i$ | $n_i^*$ | $n_i - n_i^*$ | $(n_i - n_i^*)^2$ | $\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 7 | -2 | 4 | 0,57 |
| 9 | 7 | 2 | 4 | 0,57 |
| 6 | 5 | 1 | 1 | 0,20 |
| 4 | 5 | -1 | 1 | 0,20 |
| 8 | 9 | -1 | 1 | 0,11 |
| 10 | 9 | 1 | 1 | 0,11 |
| 10 | 8 | 2 | 4 | 0,50 |
| 6 | 8 | -2 | 4 | 0,50 |
| 6 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| 70 | 70 | | | 2,76 |

$\chi^2_{эмп}$=2,76. При определении числа степеней свободы $\nu$ следует учесть, что при подсчете $\chi^2_{эмп}$ каждое слагаемое $\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$ входит дважды, а потому $m$=10:2=5, а на числа $n_i^*$ наложено одно условие: $\sum n_i^*$ =70. Поэтому $\nu$ =5–1=4. По таблице IX Приложения найдем, что

$$\chi^2_{кр} = \begin{cases} 9{,}488 & (\rho \le 0{,}05), \\ 13{,}277 & (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

$\chi^2_{эмп}$=2,76<9,488= $\chi^2_{кр}$ . Это означает, что нет оснований отвергнуть гипотезу $H_0$: обе эмпирические совокупности можно считать выборками из одной и той же генеральной совокупности.

Мы рассмотрели пример сравнения двух выборок, когда их объемы одинаковы. Теперь рассмотрим задачу, когда объемы выборок различны.

***Пример 14.*** В таблице приведены два распределения: одно имеет объем $n'$ =30, а другое $n''$ =40.

| $x_i$ | $n_i'$ | $n_i''$ |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 6 |
| 2 | 8 | 7 |
| 3 | 6 | 10 |
| 4 | 11 | 17 |
| $\sum$ | 30 | 40 |

Проверить гипотезу $H_0$: обе выборки из одной генеральной совокупности; $H_1$ – из разных.

*Решение.*

Составим таблицу:

| $x_i$ | $n'_i$ | $n''_i$ | $n'_i + n''_i$ | $n_i^{*'}$ | $n_i^{*''}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 5 | 6 | 11 | 4,7 | 6,3 |
| 2 | 8 | 7 | 15 | 6,4 | 8,6 |
| 3 | 6 | 10 | 16 | 6,9 | 9,1 |
| 4 | 11 | 17 | 28 | 12,0 | 16,0 |
| $\sum$ | 30 | 40 | 70 | 30,0 | 40,0 |

Так как объемы выборок разные, то в качестве «теоретических частот» нельзя брать полу суммы $\frac{1}{2}(n'_i + n''_i)$, т.к. сумма этих частот, т.е. объем «теоретической» совокупности, будет равен $\frac{1}{2}(n' + n'')$, что отличается от $n'$ и $n''$; между тем сравниваемые эмпирическое и теоретическое распределения должны иметь одинаковый объем. Поэтому поступают так: для каждого из рядов «теоретическими» частотами считают величины $n'_i + n''_i$, умноженные на такой множитель, чтобы после суммирования получилась численность данного эмпирического ряда.

В столбце 4 записаны суммы частот столбцов 2 и 3. Их сумма равна 70, т.е. она в $\frac{70}{30} = \frac{7}{3}$ раз больше объема первого ряда частот и в $\frac{70}{40} = \frac{7}{4}$ раза больше второго ряда частот. Поэтому для первого эмпирического ряда «теоретическими» частотами будут: $11 \cdot \frac{3}{7} = \frac{33}{7} \approx 4{,}7$; $15 \cdot \frac{3}{7} \approx 6{,}4$; $16 \cdot \frac{3}{7} \approx 6{,}9$; $28 \cdot \frac{3}{7} = 12.$ Запишем их в пятый столбец. Заметим, что их сумма будет равна 30 и совпадет с суммой частот столбца 2. Аналогично, величины $11 \cdot \frac{4}{7} \approx 6{,}4$; $15 \cdot \frac{4}{7} \approx 8{,}6$; $16 \cdot \frac{4}{7} \approx 9{,}1$; $28 \cdot \frac{4}{7} = 16$, записанные в столбец 6, дадут в сумме 40. Что совпадает с суммой частот столбца 3.

Таким образом, эта задача свелась к предыдущей и ее можно продолжить решать так, как решалась предыдущая задача.

Составим новую таблицу:

| $n_i$ | $n_i^*$ | $n_i - n_i^*$ | $(n_i - n_i^*)^2$ | $\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4,7 | 0,3 | 0,09 | 0,02 |
| 6 | 6,3 | -0,3 | 0,09 | 0,01 |
| 8 | 6,4 | 1,6 | 2,56 | 0,40 |
| 7 | 8,6 | -1,6 | 2,56 | 0,30 |
| 6 | 6,9 | -0,9 | 0,81 | 0,12 |
| 10 | 9,1 | 0,9 | 0,81 | 0,09 |
| 11 | 12,0 | -1,0 | 1,00 | 0,08 |
| 17 | 16,0 | 1,0 | 1,00 | 0,06 |
| 70 | 70 | | | $X^2_{эм}$ =1,08 |

$M$=8:2=4, $\nu$ =4-1=3. По таблице IX Приложения находим: $\chi^2_{кр} = \begin{cases} 7{,}815 & (\rho \le 0{,}05), \\ 11{,}345 & (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$

А т.к. $\chi^2_{эм}$ =1,08<7,815= $\chi^2_{кр}$ $(\rho \le 0{,}05)$, то нет оснований отвергнуть гипотезу $H_0$: обе эмпирические совокупности отличаются незначимо.

Рассмотрим еще сравнение двух альтернативных распределений.

В этом случае таблица содержит 2 строки и 2 столбца, причем $n_1 - n_1^* = -(n_2 - n_2^*) = -(n_3 - n_3^*) = n_4 - n_4^*$, т.к. сумма отклонений $n_i - n_i^*$ в каждой строке и каждом столбце должна равняться нулю.

| | $B_1$ | $B_2$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | A | b | a+b |
| $A_2$ | c | d | c+d |
| $\sum$ | a+c | b+d | n |

В этом случае $\chi^2_{эмп} = \dfrac{(ad-bc)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

где $n$ – объем выборки.

Специальный анализ показывает, что более точный результат получается, если ввести в эту формулу поправку на группировку (т.к. всего два разряда).

$$\chi^2_{эмп} = \frac{(|ad-bc|-\frac{n}{2})^2 \cdot n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

Число степеней свободы равно $\nu = (k_A - 1)(k_B - 1)$.

***Пример 15.*** Определить, различаются ли распределения мужских и женских имен в записных книжках двух психологов $A_1$ и $A_2$, если эмпирические частоты представлены в следующей таблице:

| | Мужчины | Женщины | Всего человек |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 22 | 45 | 67 |
| $A_2$ | 59 | 109 | 168 |
| $\sum$ | 81 | 154 | 235=$n$ |

Гипотезы: $H_0$ – не различаются;
$H_1$ – различаются.

$$X^2_{эмп} = \frac{\left(|22\cdot109-45\cdot59|-\frac{235}{2}\right)^2\cdot235}{67\cdot168\cdot81\cdot154} = \frac{(|2398-2655|-117{,}5)^2\cdot235}{11256\cdot12474} =$$

$$= \frac{139{,}5^2\cdot235}{11256\cdot12474} = \frac{19460{,}25\cdot235}{11256\cdot12474} \approx 1{,}56\cdot0{,}02 \approx 0{,}0312.$$

Число степеней свободы равно $\nu$ =(2-1)(2-1)=1.

По таблице IX Приложения находим $\chi^2_{кр} = \begin{cases} 3{,}841 & (\rho \le 0{,}05), \\ 6{,}635 & (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$

Т.к. $\chi^2_{эмп} = 0{,}0312 < 3{,}841 = \chi^2_{кр.0{,}05}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу $H_0$, т.е. распределения мужских и женских имен в записных книжках двух психологов совпадают.

***2. $\lambda$ – критерий Колмогорова-Смирнова***

Этот критерий предназначен для составления двух распределений:

а) эмпирического с теоретическим (непрерывным);

б) двух эмпирических.

Он основан на сравнении рядов накопленных частот общих совокупностей. Критерий позволяет найти точку, в которой сумма накопленных расхождений между двумя распределениями является наибольшей, и оценить достоверность этого расхождения. Его преимущество перед критерием $X^2$ связано с тем, что он принимает во внимание порядок наблюдений.

Гипотезы:

$H_0$ – различия между двумя распределениями недостоверны (судя по точке максимального накопленного расхождения между ними);

$H_1$ – достоверны.

Критерий применим лишь к выборкам, объемы которых $n \geq 50$ .

*Алгоритм критерия при сравнении*
*эмпирического распределения с теоретическим*

1. Записать в первый столбец наименования разрядов, а во второй – соответствующие им эмпирические частоты $n_i$.
2. Подсчитать относительные эмпирические частоты (частости) по формуле $\frac{n_i}{n}$, где $n$ – объем выборки, и записать в третий столбец.
3. Подсчитать эмпирические накопленные относительные частоты по формуле $\sum\frac{n_i}{n} = \sum\frac{n_{i-1}}{n} + \frac{n_i}{n}$, где $\sum\frac{n_{i-1}}{n}$ – частость, накопленная на предыдущих ($i$-1)-*х* разрядах; $i$- номер разряда; $\frac{n_i}{n}$ – частость $i$-го разряда. Занести результаты в четвертый столбец.
4. Найти теоретические частости (пятый столбец).
5. Подсчитать накопленные теоретические частости (шестой столбец).
6. В седьмом столбце подсчитать разности между эмпирическими и теоретическими накопленными частостями.
7. В восьмой столбец записать эти разности по модулю, обозначив их буквой $D$.
8. В восьмом столбце найти $max\ D$.
9. По таблице X Приложения определить или рассчитать в зависимости от $n$ $D_{кр}$.
10. Сравнить $D_{max}$ и $D_{кр}$. Если окажется, что $D_{max} \geq D_{кр}$, то гипотеза $H_0$ отвергается, а $H_1$ – принимается, т.е. различия между распределениями достоверны с уровнем значимости.

***Пример 16.*** Проводился тест в 8-цветном варианте здоровых студентов технических вузов в возрасте от 19 до 22 лет. Установлено, что желтый цвет предпочитается испытуемыми чаще, чем отвергается. Опытные данные представлены в таблице:

| Разряд | Позиция желтого цвета | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Эмпирические частоты | 24 | 15 | 13 | 8 | 15 | 10 | 9 | 8 |

Можно ли утверждать, что распределение желтого цвета по 8-и позициям у здоровых испытуемых отличается от равномерного распределения?

*Решение.*

Проверим гипотезы:

$H_0$ – эмпирическое распределение не отличается от равномерного;

$H_1$ – отличается.

Составим расчетную таблицу, следуя предложенному алгоритму.

| Разряды | $n_i$ | Частость ($\frac{n_i}{n}$) | Накопленная частость | Теоретическая частота ($n_i^*$) | Накопленная теоретическая частота | $D_i$ (разность) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 0,235 | 0,235 | 0,125 | 0,125 | 0,110 |
| 2 | 15 | 0,147 | 0,382 | 0,125 | 0,250 | 0,132 |
| 3 | 13 | 0,128 | 0,510 | 0,125 | 0,375 | 0,135 – *max* |
| 4 | 8 | 0,078 | 0,588 | 0,125 | 0,500 | 0,088 |
| 5 | 15 | 0,147 | 0,735 | 0,125 | 0,625 | 0,110 |
| 6 | 10 | 0,098 | 0,833 | 0,125 | 0,750 | 0,083 |
| 7 | 9 | 0,088 | 0,921 | 0,125 | 0,875 | 0,046 |
| 8 | 8 | 0,079 | 1,000 | 0,125 | 1,000 | 0,000 |
| $\sum$ | 102 | 1,000 | | | | |

**Замечание.** *Поскольку требуется проверить гипотезу о равномерном распределении признака, а вероятность попадания желтого (или любого другого из 8-и цветов) на каждую из 8-и позиций при случайном выборе составляет 1/8=0,125, то для каждого разряда* $n_i^*$ *=0,125.*

Т.к. $D_{max}$=0,135, то сравним ее с $D_{кр}$. (см. таблицу X Приложения):

$$D_{кр} = \begin{cases} \dfrac{1{,}36}{\sqrt{102}} \approx 0{,}135 \quad (\rho \le 0{,}05), \\ \dfrac{1{,}63}{\sqrt{102}} \approx 0{,}161 \quad (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

Сравним $D_{max}$ с $D_{кр}$.

$D_{max}$=0,135=0,135=$D_{кр}$, следовательно, гипотеза отвергается. Это означает, что распределение желтого цвета по восьми позициям отличается от равномерного распределения.

*Алгоритм $\lambda$-критерия при сопоставлении двух эмпирических распределений*

1. В первый столбец таблицы записать разряды.
2. Во второй и третий столбцы записать эмпирические частоты заданных распределений.
3. В четвертом и пятом столбцах подсчитать эмпирические частости.
4. В шестом и седьмом столбцах подсчитать накопленные эмпирические частости.
5. Подсчитать разности между накопленными частостями (восьмой столбец).
6. В девятый столбец записать разности по абсолютной величине.
7. Определить в девятом столбце максимальную разность ($D_{max}$).
8. Подсчитать эмпирическое значение критерия $\lambda$ по формуле $\lambda_{эмп} = D_{\max}\sqrt{\dfrac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$, где $n_i$ – объем одной выборки, $n_2$ – объем другой выборки.
9. По таблице XI Приложения определить, какому уровню значимости соответствует полученное значение $\lambda$, а по таблице X определить $\lambda_{кр}$.
10. Сравнить $\lambda_{эмп}$ с $\lambda_{кр}$. Если окажется, что $\lambda_{эмп} \ge 1{,}36$, то различия между распределениями достоверны.

*Пример 17.* Сопоставим данные примера 16 с данными обследования *X.* Клара 800 испытуемых:

| Разряд | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 98 | 113 | 116 | 87 | 91 | 112 | 97 | 86 |

*Решение.*

Гипотезы:

$H_0$ – эмпирическое распределение желтого цвета по 8 позициям в двух выборках не различаются;

$H_1$ – различаются.

Используем алгоритм.

| Разряды | Эмпирические частоты | | Эмпирические частости | | Накопленные эмпирические частости | | Разности |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $n_{i1}$ | $n_{i2}$ | $n_{i1}/n_1$ | $n_{i2}/n_2$ | | | |
| 1 | 24 | 98 | 0,235 | 0,123 | 0,235 | 0,123 | 0,112 |
| 2 | 15 | 113 | 0,147 | 0,141 | 0,382 | 0,246 | 0,118 |
| 3 | 13 | 116 | 0,128 | 0,145 | 0,510 | 0,409 | 0,101 |
| 4 | 8 | 87 | 0,078 | 0,109 | 0,588 | 0,518 | 0,070 |
| 5 | 15 | 91 | 0,147 | 0,114 | 0,735 | 0,632 | 0,103 |
| 6 | 10 | 112 | 0,098 | 0,140 | 0,833 | 0,772 | 0,061 |
| 7 | 9 | 97 | 0,089 | 0,121 | 0,921 | 0,893 | 0,028 |
| 8 | 8 | 86 | 0,079 | 0,107 | 1,000 | 1,000 | 0,000 |
| $\sum$ | 102 | 800 | 1,000 | 1,000 | | | |

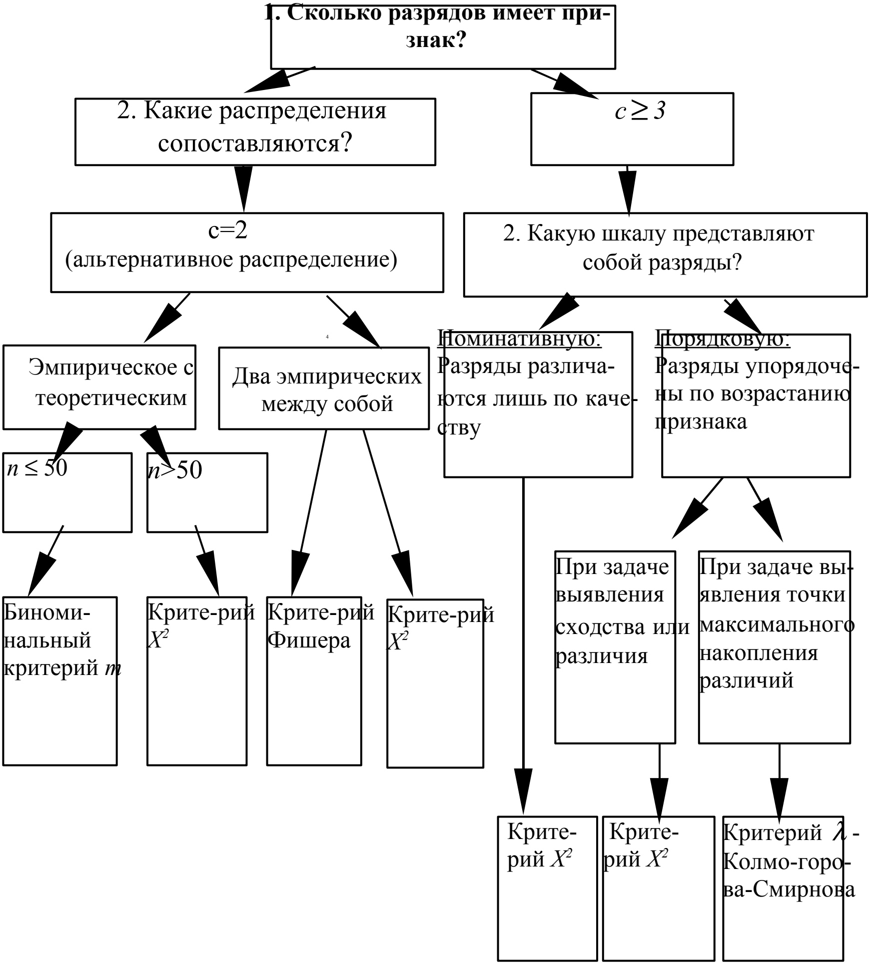
$D_{max}$ =0,118.

$$\lambda_{эмп} = 0{,}118\sqrt{\frac{102 \cdot 800}{102 + 800}} \approx 1{,}12 .$$

$\lambda_{эмп}$ =1,12<1,36= $\lambda_{кр}$ . Это означает, что различия между двумя эмпирическими выборками отсутствуют, и это можно утверждать с уровнем статистической значимости 0,16 (это число найдено по таблице XI Приложения для $\lambda_{эм}$ =1,12).

В заключение укажем алгоритм выбора критерия для сравнения распределений.

*Алгоритм*


1. Сколько разрядов имеет признак?
2. Какие распределения сопоставляются?
$c \geq 3$
c=2
(альтернативное распределение)
2. Какую шкалу представляют собой разряды?
Эмпирическое с теоретическим
Два эмпирических между собой
Номинативную: Разряды различаются лишь по качеству
Порядковую: Разряды упорядочены по возрастанию признака
$n \leq 50$
$n>50$
При задаче выявления сходства или различия
При задаче выявления точки максимального накопления различий
Биномиальный критерий $m$
Крите-рий $X^2$
Крите-рий Фишера
Крите-рий $X^2$
Крите-рий $X^2$
Крите-рий $X^2$
Критерий $\lambda$ - Колмо-горова-Смирнова

## Тема 6. Многофункциональные статистические критерии

*Литература:* [1], гл. 5, п.5.1–5.4, стр. 157-194; п.5.6, 5.7, стр. 197–200; [6], гл.4, §8, стр. 166–171; [7], гл. 6, стр. 104–108.

Многофункциональные статистические критерии – это критерии, которые могут использоваться по отношению к самым разнообразным данным, выборкам и задачам. Эмпирические данные могут быть представлены в любой шкале.

Примерами таких критериев служат критерий $\varphi^*$ – Фишера (угловое преобразование Фишера) и биноминальный критерий $m$.

Эти критерии построены на сопоставлении долей признака. Суть состоит в определении того, какая доля для наблюдений (реакций, выборов, испытуемых и т.д.) в данной выборке характеризуется интересующим исследователя эффектом и какая доля этим эффектом не характеризуется. Таким эффектом может быть выражение согласия с каким-либо предложением; выбор правой дорожки из двух симметричных дорожек; отнесенность к определенному полу; получение оценки, превосходящей проходной балл; решение задачи менее чем за 20 сек.; выбор дистанции в разговоре, превышающей 50 см; преобладание положительных сдвигов над отрицательными; более частый выбор альтернатив А и В по сравнению с альтернативами С и Д.

Критерий $\varphi^*$ применяется к двум выборкам, а биноминальный критерий $m$ – к одной выборке.

Многофункциональные критерии применимы при сопоставлении уровней, определении сдвигов и сравнении распределений признака.

Критерий $\varphi^*$ может эффективно заменять или дополнять критерии $Q$, $U$, $X^2$, $\lambda$.

### *1. Критерий $\varphi^*$ Фишера.*

Проверяемые гипотезы:

$H_0$: доля испытуемых, у которых проявляется исследуемый эффект в первой выборке не больше, чем во второй выборке;

$H_1$ – больше.

*Алгоритм выбора многофункциональных критериев.*


*Алгоритм $\varphi^*$ критерия Фишера*

1. Определить те значения признака, которые будут критерием для разделения испытуемых на тех, у кого «есть эффект» и тех, у кого – «нет эффекта». Если признак измерен количественно, использовать критерий $\lambda$ для поиска оптимальной точки разделения.
2. Начертить таблицу из двух строк и двух столбцов. Первый столбец – «есть эффект»; второй столбец «нет эффекта». Первая строка сверху – первая выборка (группа), вторая строка – вторая выборка (группа).
3. Подсчитать количество испытуемых в первой выборке, у которых «есть эффект», и занести это число в левую верхнюю клетку табли-

цы. Сумма по двум верхним клеткам должна быть равна объему первой выборки.

4. Ту же самую работу провести для испытуемых второй выборки.
5. Определить процентные доли испытуемых с эффектом и без эффекта и записать их в соответствующие клетки в скобках.
6. По таблице XII Приложения определить величины углов $\varphi$ для каждой из сопоставляемых процентных долей (только для первого столбца).
7. Подсчитать эмпирическое значение $\varphi^*$ по формуле

$$\varphi^*_{эмп} = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}},$$

где $\varphi_1$ – угол, соответствующий большей процентной доле; $\varphi_2$ – угол, соответствующий меньшей процентной доле; $n_1$ – объем первой выборки; $n_2$ – объем второй выборки.

8. Сопоставить $\varphi^*_{эмп}$ с критическими значениями $\varphi^*_{кр}$, которые находятся по таблицеXIII Приложения. Если окажется, что, $\varphi^*_{эмп} > \varphi^*_{кр}$, то гипотеза $H_0$ отвергается.

***Замечания.*** Перечислим ограничения критерия $\varphi^*$.

*1. Ни одна из сопоставляемых долей не должна быть равной нулю.*
*2. В одной выборке должно быть не менее двух различных вариант.*
*3. Если сравнивают две выборки, то:*

а) если, $n_1$=2, то $n_2 \geq 30$;

б) если, $n_1$=3, то $n_2 \geq 7$;

в) если, $n_1$=4 то $n_2 \geq 5$;

г) если, $n_1$>5, $n_2 > 5$, то нет ограничений в применении критерия $\varphi^*$.

Критерий $\varphi^*$ Фишера применяется при:

1) сопоставлении выборок по количественно определенному признаку;
2) сопоставление выборок по количественно измеряемому признаку;
3) сопоставление выборок и по уровню, и по распределению признака;
4) использование критерия $\varphi$ в сочетании с критерием $\lambda$.

***Пример 18.*** Отобрали 10 юношей-учащихся ПТУ в возрасте от 14 до 16 лет по специальной методике с высоким показателем «агрессивности» и 11 человек с низким показателем «агрессивности». Надо определить, различаются ли эти две выборки по показателю расстояния, которое они спонтанно выбирают в разговоре с сокурсниками. Данные представлены в таблице:

| № п/п | Группа 1: юноши с высокими показателями «агрессивности» d (см) | № п/п | Группа 2: юноши с низкими показателями «агрессивности» d (см) |
|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 1 | 40 |
| 2 | 40 | 2 | 45 |
| 3 | 50 | 3 | 65 |
| 4 | 50 | 4 | 75 |
| 5 | 50 | 5 | 75 |
| 6 | 50 | 6 | 75 |
| 7 | 50 | 7 | 75 |
| 8 | 70 | 8 | 100 |
| 9 | 80 | 9 | 100 |
| 10 | 90 | 10 | 100 |
| | | 11 | 100 |

Можно заметить, что агрессивные юноши чаще выбирают расстояние в 50 см или меньше, в то время как не агрессивные выбирают расстояние, превышающее 50 см.

Поэтому расстояние в 50 см можно рассматривать как критическое и считать, что если выбранное расстояние меньше или равно 50 см, то «эффект есть», а если больше 50 см, то «эффекта нет».

Составим четырехпольную таблицу для расчета критерия $\varphi^*$ :

| Группа | «Есть эффект»: $d \leq 50$ | | | «Нет эффекта»: $d > 50$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Количество испытуемых | (% доля) | | Количество испытуемых | ( % доля) | | $\sum$ |
| 1 группа – агрессивные юноши | 7 | (70%) | А | 3 | | В | 10 (100%) |
| 2 группа – не агрессивные юноши | 2 | (18,2%) | С | 9 | | Д | 11 (100%) |
| $\sum$ | 9 | | | 12 | | | 21 |

Расчет % доли:

1) в группе 1 из 10 юношей эффект наблюдается у 7 юношей, следовательно:

$10 - 100\%$

$7 - x\%$

$x = \frac{7 \cdot 100\%}{10} = 70\%$ – процентная доля юношей 1 группы, у которых «есть эффект»;

100% – 70%=30% – процентная доля юношей 1 группы, у которых «нет эффекта»;

2) в группе 2 из 11 юношей эффект наблюдается у 2 юношей, поэтому

$$\begin{array}{l} 11 - 100\% \\ \underline{\;\;2 - x\%\;\;} \end{array}$$

$x = \frac{2 \cdot 100\%}{11} \approx 18{,}2\%$ – процентная доля юношей 2 группы, у которых «есть эффект»;

100%–18,2%=81,8% процентная доля юношей 2 группы, у которых «нет эффекта».

Гипотезы:

$H_0$ – доля лиц, которые выбирают дистанцию $d \le 50$ см в группе агрессивных юношей не больше, чем в группе неагрессивных юношей.

$H_1$ – больше.

По таблице XII Приложения определяем величины $\varphi^*$ (70%)=1,982, $\varphi^*$ (18,2%)=0,881.

Рассчитаем $\varphi^*_{эмп} = (1{,}982 - 0{,}881)\sqrt{\frac{10 \cdot 11}{10 + 11}} \approx 1{,}101 \cdot 2{,}289 \approx 2{,}52.$

Критические значения $\varphi^*$ найдем по таблице XIII Приложения.

$$\varphi^*_{кр} = \begin{cases} 1{,}64 & (\rho \le 0{,}05), \\ 2{,}31 & (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

А так как $\varphi^*_{эмп} = 2{,}52 > \varphi^*_{кр} = 2{,}31 \quad (\rho \le 0{,}01)$, то гипотеза $H_0$ отвергается, гипотеза $H_1$ принимается, т.е. для лиц, которые выбирают дистанцию в беседе меньшую или равную 50 см, в группе агрессивных юношей больше, чем в группе неагрессивных юношей $(\rho \le 0{,}01)$.

Приведем пример использования критерия $\varphi^*$ в сочетании с критерием $\lambda$ Колмогора-Смирнова.

Если две выборки сопоставляются по каким-либо количественно измеренным показателям, встает задача выявления той точки распределения, которая может использоваться как критическая при разделении всех испытуемых на тех, у кого «есть эффект» и тех, у кого «нет эффекта». Точнее всего это можно сделать с помощью критерия $\lambda$.

***Пример 19.*** В Англии проводился опрос врачей двух категорий: а) врачи, у которых есть собственный бюджет; в) врачи, которых обеспечивает государство. Всего опросили 50 врачей, имеющих собственные фонды, и 28 врачей без собственных фондов. Каждый из них должен был прогнозировать, какова будет доля врачей с собственными фондами в следующем году. Из опрошенных 70 врачей дали прогноз. Он представлен в следующей таблице:

| № п/п | Прогнозируемая доля врачей с собственными фондами | Эмпирические частоты выбора данной категории прогноза | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Врачами с фондами | Врачами без фондов | $\sum$ |
| 1 | 0%-20% | 4 | 5 | 9 |
| 2 | 21%-40% | 15 | 11 | 26 |
| 3 | 41%-60% | 18 | 5 | 23 |
| 4 | 61%-80% | 7 | 4 | 11 |
| 5 | 81%-100% | 1 | 0 | 1 |
| | $\sum$ | 45 | 25 | 70 |

Различаются ли каким-то образом прогнозы врачей с фондами и без фондов?

*Решение.*

Сначала определим точку максимального расхождения между двумя распределениями, используя критерий $\lambda$.

Все расчеты произведем в следующей таблице:

| № п/п | Прогнозируемая доля врачей с собственными фондами, % | Эмпирические частоты | | Эмпирические частости | | Накопленные эмпирические частости | | Разности ($d_i$) по модулю |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Врачами с фондами | Врачами без фондов | Врачами с фондами | Врачами без фондов | Врачами с фондами | Врачами без фондов | |
| 1 | 0–20 | 4 | 5 | 0,089 | 0,200 | 0,089 | 0,200 | 0,111 |
| 2 | 21–40 | 15 | 11 | 0,333 | 0,440 | 0,422 | 0,640 | 0,218 – max |
| 3 | 41–60 | 18 | 5 | 0,400 | 0,200 | 0,822 | 0,840 | 0,018 |
| 4 | 615–805 | 7 | 4 | 0,156 | 0,160 | 0,978 | 1,000 | 0,022 |
| 5 | 81–100 | 1 | 0 | 0,022 | 0,000 | 1,000 | 1,000 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\sum$ | 45 | 25 | 1,000 | 1,000 | | | |

Максимальная разность составляет 0,218, и она соответствует второму разряду от 21% до 40%. Поэтому будем считать, что «эффект есть», если врач прогнозирует от 41% до 100% врачей с фондами, и что «эффекта нет», если врач прогнозирует от 0% до 40% врачей с фондами.

Получаем следующее распределение

| № п/п | Прогнозируемая доля врачей с формами, % | Эмпирические частоты выбора данной категории прогноза | | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| | | Врачами с фонда-ми | Врачами без фондов | |
| 1 | 0–40 | 19 A | 16 B | 35 |
| 2 | 41–100 | 26 C | 9 Д | 35 |
| $\sum$ | | 45 | 25 | 70 |

Эту таблицу теперь мы можем использовать, проверяя разные гипотезы путем сопоставления любых ее двух ячеек из четырех A, B, C, D, применяя критерий $\varphi^*$ – Фишера.

Проверим, например, гипотезы:

$H_0$ – доля лиц, прогнозирующих распространение фондов на 41 – 100% в группе врачей с фондами не больше, чем в группе врачей без фондов;

$H_1$ – больше.

Составим таблицу:

| Группа | Есть эффект – прогноз: 41–100% | Нет эффекта – прогноз: 0–40% | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| 1 группа – врачи с фондами | 26 (57,8%) | 19 (42,25) | 45 – 100% |
| 2 группа – врачи без фондов | 9 (36%) | 16 (64%) | 25 – 100% |
| $\sum$ | 35 | 35 | |

Расчет процентных долей:

$$\frac{\begin{array}{c}45 - 100\% \\ 26 - x\ \%\end{array}}{x = \dfrac{26 \cdot 100\%}{45} \approx 57{,}8\%\ ,}$$

$100\% - 57{,}8\% = 42{,}2\%$.

$$\begin{array}{l} 25 - 100\% \\ 9 - x\ \% \\ \hline x = \dfrac{9 \cdot 100}{25} = 36\%, \end{array}$$

$100\% - 36\% = 64\%$.

Определяем величины $\varphi_1$ и $\varphi_2$ по таблице XII Приложения:

$\varphi_1\,(57{,}8\%) = 1{,}727$,

$\varphi_2\,(36\%) = 1{,}287$.

Рассчитаем $\varphi^*_{эмп} = (1{,}727 - 1{,}287)\sqrt{\dfrac{45 \cdot 25}{45 + 25}} \approx 0{,}44 \cdot 4{,}009 \approx 1{,}764$.

По таблице XIII Приложения находим $\varphi^*_{кр} = \begin{cases} 1{,}64 & (\rho \le 0{,}05), \\ 2{,}31 & (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$

По таблице XIII Приложения определим уровень значимости, который соответствует $\varphi^*_{эмп} = 1{,}764$. Он составляет $p$=0,039. Сравним $\varphi^*_{эмп}$ с $\varphi^*_{кр}$.

$\varphi^*_{эмп}$=1,764>1,64=$\varphi^*_{кр}$ $(\rho \le 0{,}05)$. Следовательно, гипотеза $H_0$ отвергается с уровнем значимости $p$=0,039. Гипотеза $H_1$ принимается, т.е. доля лиц, прогнозирующих распространение фондов на 41–100% в группе врачей с фондами, превышает эту долю в группе врачей без фондов.

***2. Биноминальный критерий m.***

Он предназначен для сопоставления частоты встречаемости (эмпирической частоты) какого-либо эффекта с теоретической или заданной частотой. Критерий применяется в тех случаях, когда обследована лишь одна выборка объема $n \le 300$. В выборке должно быть не менее 5 наблюдений.

Проверяем гипотезы:

$H_0$ – частота встречаемости данного эффекта в обследованной выборке не превышает теоретической;

$H_1$ – частота встречаемости данного эффекта в обследованной выборке превышает теоретическую.

Выбор критерия для сопоставления эмпирической частоты с теоретической при разных вероятностях исследуемого эффекта $p$ и разных гипотезах:

| Заданные вероятности | Гипотеза $H$: $f_{эмп} > f_{теор}$ | Гипотеза $H$: $f_{эмп} < f_{теор}$ |
|---|---|---|
| $p < 0{,}50$ | A $m$ для $2 \leq n \leq 50$ | B $\chi^2$ для $n \geq 30$ |
| $p = 0{,}50$ | C $m$ для $5 \leq n \leq 300$ | D G для $5 \leq n \leq 300$ |
| $p > 0{,}50$ | E $\chi^2$ для $n \geq 30$ | F $m$ для $2 \leq n \leq 50$ |

*Алгоритм критерия m*

1. Определить теоретическую частоту встречаемости эффекта по формуле $f_{теор} = n\mathrm{P}$, где $n$ – количество наблюдений, $P$ – заданная вероятность исследуемого эффекта.
2. По соотношению эмпирической и теоретической частот и заданной вероятности $P$ определить по предыдущей таблице, к какому случаю принадлежит данная задача. Если критерий $m$ неприменим, то использовать тот критерий, который указан в соответствующей ячейке.
3. Если критерий $m$ применим, то по таблице XVI (при $P$=0,5) или по таблице XV (при $P$<0,5) определить $m_{кр}$ для заданных $n$ и $P$.
4. Считать, что $m_{эмп}=f_{эмп}$.
5. Если $m_{эмп}>m_{кр}$, то это означает, что эмпирическая частота достоверно превышает частоту, соответствующую заданной вероятности.

*Пример 20.* В процессе тренинга сенситивности в группе из 14 человек выполнялось упражнение «Психологический прогноз». Все участники должны были пристально вглядеться в одного и того же человека, который сам пожелал быть испытуемым в этой группе. Затем каждый задавал испытуемому вопрос, предполагавший два заданных варианта ответа, например, «Что в тебе преобладает: отстраненная наблюдательность или включенная эмпатия?», «Продолжал бы ты работать или нет, если бы у тебя появилась материальная возможность не работать?», «Кто тебя больше утомляет – люди нахальные или занудные?» и т.д. Испытуемый должен был лишь молча выслушать вопрос, ничего не отвечая. Во время этой паузы участники пытались определить, как он ответит на данный вопрос, и записывали свои прогнозы. Затем ведущий предлагал испытуемому дать ответ на заданный вопрос. Теперь каждый участник мог определить, совпал ли его прогноз с ответом испытуемого или нет. Было задано 14 вопросов (13 участников + ведущий), каждый сообщил, сколько у него получилось точных прогнозов. В среднем было 7 – 8 совпадений, но у одного $X$ их было 12, и группа ему спонтанно зааплодировала. Имела ли группа статистические основания для аплодисментов?

*Решение.*

Группа будет иметь статистические основания для аплодисментов, если частота правильных прогнозов у участника $X$ превысит теоретическую частоту случайных угадываний. Если бы участник прогнозировал ответ случайно, то согласно теории вероятностей, шансы случайно угадать или не угадать ответ на данный вопрос у него были бы равны $p=q=0{,}5$.

Определим $f_{теор}=np=14\cdot 0{,}5=7$

В задаче $m_{эмп}=12$.

Имеем случай $m_{эмп}=12>7=f_{теор}, \quad \rho=0{,}5$. Согласно предыдущей таблице это будет вариант С. Этот вариант предлагает критерий $m$.

Сформулируем гипотезы:

$H_0$ – количество точных прогнозов у участника $X$ не превышает частоты, соответствующей вероятности случайного угадывания.

$H_1$ – превышает.

По таблице XIV Приложения определяем критические значения критерия $m$ при $n=14$ и $p=0{,}5$:

$$m_{кр}=\begin{cases}11 \quad (\rho\le 0{,}05),\\ 12 \quad (\rho\le 0{,}01).\end{cases}$$

Сравним $m_{эмп}$ и $m_{кр}$.

$m_{эмп}=12\geq 12=m_{кр} \quad (\rho\le 0{,}01)$.

Следовательно, гипотеза $H_0$ отвергается. Гипотеза $H_1$ принимается. Количество точных прогнозов у участника $X$ превышает (или по крайней мере равняется) критической частоте вероятности случайного угадывания ($\rho\le 0{,}01$). Группа вполне обоснованно ему аплодировала.

**Тема 7. Корреляция и регрессия**

***Литература:*** [6], гл.8, §1–9, стр. 267–323; гл.10, §1–3, стр. 345–362; [9], § 9, п.9.1 – 9.6, стр. 213–252; [7], гл.8, стр. 142–180; гл. 9, стр. 181-214; [8], гл. 6, стр. 149–178; гл. 5, стр. 114–148; [1], гл. 6, п. 6.1 и 6.2, стр. 200–224.

Мы рассмотрим лишь ранговую корреляцию.

Корреляция – это взаимная связь. Корреляционная связь – это согласованные изменения двух или большего числа признаков. Она отражает тот факт, что изменчивость одного признака находится в некотором соответствии с изменчивостью другого. Эта изменчивость не является функциональной (когда каждому значению первого признака соответствует вполне определенное единственное значение другого признака). Она характерна для стохастических (вероятностных) явлений, где наблюдается фактор случайности.

Количественной мерой таких связей служит коэффициент корреляции. Чем больше коэффициент корреляции, тем теснее связь между признаками, тем меньше влияние так называемых второстепенных факторов, влияющих на эту связь. И наоборот. Формула для вычисления обычного коэффициента корреляции и его свойства даны в [10]. Однако для вычисления обычного коэффициента корреляции необходимо, чтобы исходные данные были выражены достаточно точно, что не всегда возможно, и исходные данные должны быть количественными признаками. Но существуют такие количественные признаки, которые с трудом поддаются точной оценке; существуют признаки, которые нельзя выразить количественно. Эти трудности можно обойти, используя коэффициент ранговой корреляции, тем более, что в психологии некоторые признаки (а их большинство) выражаются в рангах (или в баллах). Ранговый и простой (обычный) коэффициенты корреляции довольно близки друг к другу. Основанием для выбора коэффициента ранговой корреляции служат: 1) его универсальность (количественный признак всегда можно ранжировать); 2) простота расчета; 3) широкие возможности в решении задач сравнения индивидуальных или групповых иерархий признаков.

Существует два коэффициента ранговой корреляции – Спирмена и Кенделя. Мы рассмотрим первый.

Для подсчета ранговой корреляции надо располагать двумя выборками, которые могут быть проранжированы. Ими могут быть:

1) два признака, измеренные в одной и той же группе испытуемых. Здесь ранжируются индивидуальные значения по первому признаку, полученные разными испытуемыми, а затем индивидуальные значения по второму признаку. Если два признака связаны положительно, то испытуемые, имеющие разные ранги по одному из них, будут иметь низкие ранги и по другому, а испытуемые, имеющие высокие ранги по одному из признаков, будут иметь высокие ранги и по другому признаку. Для подсчета коэффициента корреляции $r_s$ (тесноты или силы связи между признаками) необходимо определить разности ($d$) между рангами. Затем эти разности определенным образом преобразуются и вычитаются из 1. Чем меньше $d$, тем больше будет $r_s$, тем ближе он будет к +1. Если корреляция отсутствует. То $r_s$=0.

В случае отрицательной корреляции низким рангом испытуемых по одному признаку будут соответствовать высокие ранги по другому признаку, и наоборот, чем больше несовпадение между рангами испытуемых по двум переменным, тем ближе $r_s$ к –1;

2) две индивидуальные иерархии признаков, выявленные у двух испытуемых по одному и тому же *набору признаков.* Первый ранг получает признак с самым низким значением, второй ранг – признак с более высоким значением и т.д.; причем все признаки должны быть измерены по одной шкале;
3) две групповые иерархии признаков. Здесь ранжируются средне групповые значения в двух группах испытуемых по определенному, одинаковому для двух групп, набору признаков;
4) индивидуальная и групповая иерархия признаков. Здесь ранжируются отдельно индивидуальные значения испытуемого и средне групповые значения по тому же набору признаков, которые получены, как правило, при исключении этого отдельного испытуемого.

Во всех четырех случаях значимость $r_s$ определяется по количеству ранжированных значений $N$. В первом случае $N=n$, где $n$ – объем выборки. Во втором случае количеством наблюдений будет количество признаков, составляющих иерархию. В третьем и четвертом случаях – это количество сопоставляемых признаков, а не количество испытуемых в выборках.

***Гипотезы:***

Возможны два варианта гипотез. Первый относится к случаю 1, второй – к случаям 2, 3 и 4.

*Первый вариант*

$H_0$ – корреляция между двумя переменными не отличается от нуля;
$H_1$ – достоверно отличается от нуля.

*Второй вариант*

$H_0$ – корреляция между двумя иерархиями не отличается от нуля;
$H_1$ – достоверно отличается от нуля.

## Алгоритм расчета $r_s$

1. Определить, какие два признака или две иерархии признаков будут участвовать в сопоставлении как переменные $X$ и $Y$.
2. Проранжировать значения переменных $X$ и $Y$ и занести эти ранги в таблицу.

3. Подсчитать разности $d$ между рангами переменных $X$ и $Y$ по каждой строке таблицы.
4. Возвести каждую разность в квадрат ($d^2$).
5. Подсчитать $\sum d^2$ .
6. При наличии одинаковых рангов рассчитать поправки:

$$T_x = \sum \frac{(a^3 - a)}{12},$$

$$T_y = \sum \frac{(b^3 - b)}{12},$$ где $a$ – объем каждой группы одинаковых рангов в ранговом ряду $X$, $b$ – в $Y$.

7. рассчитать $r_{s,\,эмп}$ по формуле:

а) при отсутствии одинаковых рангов:

$$r_{s,эмп} = 1 - 6 \cdot \frac{\sum d^2}{N(N^2 - 1)};$$

б) при наличии одинаковых рангов:

$$r_{s,эмп} = 1 - \frac{6\sum d^2 + T_x + T_y}{N(N^2 - 1)}.$$

8. По таблице XVI Приложения найти $r_{s,\,кр}$ для данного $N$. Если $r_{s,\,эмп} \geq r_{s,\,кр}$, то корреляция достоверно отличается от нуля.

*Замечание1*: *Корреляционные связи различаются по форме, направлению и силе. По форме они могут быть прямолинейными или криволинейными (параболического, гиперболического и т.д. типа). По направлению: положительной (прямой) и отрицательной (обратной). При положительной прямолинейной корреляции более высоким значениям одного признака соответствуют более высокие значения другого, а более низким значениям одного признака – низкие значения другого. При отрицательной корреляции соотношения обратные. При положительной корреляции $r_s>0$, при отрицательной $r_s<0$.*

*Замечание 2: Сила связи не зависит от направления и определяется по величине коэффициента корреляции $|r| \leq 1$. Используется две системы классификации корреляционных связей по их силе: общая и частная.*

*Общая классификация: 1) сильная или тесная при $r>7$; 2) средняя при $0,5<r<0,69$; 3) умеренная при $0,3<r<0,49$; 4) слабая при $0,2<r<0,29$; 5) очень слабая при $r<0,19$.*

*Частная классификация: 1) высокая значимая корреляция при $r_s$, соответствующем уровню значимости $\rho \leq 0{,}01$; 2) значимая корреляция при $\rho \leq 0{,}05$; 3) тенденция достоверной связи при $\rho \leq 0{,}1$; 4) незначимая корреляция при $r_s$, не достигающем уровня статистической значимости.*

***Пример 21.*** В исследовании, моделирующем деятельность авиадиспетчера, группа испытуемых студентов проходила подготовку перед началом работы на тренажере. Испытуемые должны были решать задачи по выбору оптимального типа взлетно-посадочной полосы для заданного типа самолета. Связано ли количество ошибок, допущенных испытуемыми в тренировочной сессии, с показателями вербального интеллекта?

| Испытуемый | Количество ошибок | Показатель вербального интеллекта |
|---|---|---|
| 1 | 29 | 131 |
| 2 | 54 | 132 |
| 3 | 13 | 121 |
| 4 | 8 | 127 |
| 5 | 14 | 136 |
| 6 | 26 | 124 |
| 7 | 9 | 134 |
| 8 | 20 | 136 |
| 9 | 2 | 132 |
| 10 | 17 | 136 |

*Решение.*

Гипотезы:

$H_0$ – корреляция между показателем количества ошибок в тренировочной сессии и уровнем вербального интеллекта не отличается от нуля;

$H_1$ – статистически значимо отличается от нуля.

Расчеты проведем в следующей таблице:

| Испытуемый | Переменная *X*: количество ошибок | | Переменая *Y*: вербальный интеллект | | *d* | $d^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Индивидуальные значения | Ранг | Индивидуальные значения | Ранг | Разность рангов | |
| 1 | 29 | 9 | 131 | 4 | 5 | 25 |
| 2 | 54 | 10 | 132 | 5,5 | 4,5 | 20,25 |
| 3 | 13 | 4 | 121 | 1 | 3 | 9 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 2 | 127 | 3 | -1 | 1 |
| 5 | 14 | 5 | 136 | 9 | -4 | 16 |
| 6 | 26 | 8 | 124 | 2 | 6 | 36 |
| 7 | 9 | 3 | 134 | 7 | -4 | 16 |
| 8 | 20 | 7 | 136 | 9 | -2 | 4 |
| Испытуемый | Переменная *X*: количество ошибок | | Переменая *Y*: вербальный интеллект | | *d* | $d^2$ |
| | Индивидуальные значения | Ранг | Индивидуальные значения | Ранг | Разность рангов | |
| 9 | 2 | 1 | 132 | 5,5 | -4,5 | 20,25 |
| 10 | 17 | 6 | 136 | 9 | -3 | 9 |
| $\sum$ | | 55 | | 55 | | 156,5 |

$$r_{в,\,эмп} = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot 156{,}5}{10(10^2-1)} = 1 - \frac{939}{990} \approx 0{,}052.$$

По таблице XVI Приложения при $N$=10:

$$r_{s,\,кр} = \begin{cases} 0{,}64 \quad (\rho \le 0{,}05), \\ 0{,}79 \quad (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

$(r_s)_{эмп}$=0,052<0,64=$(r_s)_{кр}$.

Ответ: гипотеза $H_0$ принимается. Корреляция не отличается от нуля.

***Пример 22.*** В Петербурге производился выборочно опрос взрослого населения. Им предлагалось ответить на вопрос: «Какой уровень развития каждого из перечисленных ниже качеств необходим для депутата Городского собрания этого города?». Параллельно с этим обследовалась выборка из депутатов Городского собрания по тому же набору личностных качеств. В следующей таблице представлены усредненные эталонные оценки избирателей (по 10-ти бальной шкале) и индивидуальные значения одного из депутатов (по 20-ти бальной шкале):

| № п/п | Наименование качества | Усредненная оценка избирателей | Индивидуальный показатель депутата К |
|---|---|---|---|
| 1 | Общий уровень культуры | 8,64 | 15 |
| 2 | Обучаемость | 7,89 | 7 |
| 3 | Логика | 8,38 | 12 |
| 4 | Способность к творчеству нового | 6,97 | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | Самокритичность | 8,28 | 14 |
| 6 | Ответственность | 9,56 | 18 |
| 7 | Самостоятельность | 8,12 | 13 |
| 8 | Энергия, активность | 8,41 | 17 |
| 9 | Целеустремленность | 8,00 | 19 |
| № п/п | Наименование качества | Усредненная оценка избирателей | Индивидуальный показатель депутата К |
| 10 | Выдержка, самообладание | 8,71 | 9 |
| 11 | Стойкость | 7,74 | 16 |
| 12 | Личностная зрелость | 8,10 | 11 |
| 13 | Порядочность | 9,02 | 12 |
| 14 | Гуманизм | 7,89 | 10 |
| 15 | Умение общаться с людьми | 8,74 | 8 |
| 16 | Терпимость к чужому мнению | 7,84 | 6 |
| 17 | Гибкость поведения | 7,67 | 4 |
| 18 | Способность производить благоприятное впечатление | 7,23 | 8 |

Насколько индивидуальный профиль депутата К коррелирует с эталонным критерием?

*Решение.*

Так как оценки избирателей и индивидуальные показатели депутата варьируют в разных диапазонах, то необходимо эти оценки проранжировать (будет получено 18 рангов). В этом примере целесообразно начислять большему значению меньший ранг, чтобы сразу можно было увидеть, на каком месте по значимости (для избирателей) или по выраженности (у депутата) находится то или иное качество. Результаты ранжирования и расчета $d$ и $d^2$ приведены в следующей таблице:

| Наименование качества | Ряд 1: ранг качества в эталонном профиле | Ряд 2: ранг качества в индивидуальном профиле | $d$ | $d^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 0 | 0,00 |
| 2 | 12,5 | 15 | -2,5 | 6,25 |
| 3 | 7 | 8,5 | -1,5 | 2,25 |
| 4 | 18 | 17 | 2 | 4,00 |
| 5 | 8 | 6 | 1 | 1,00 |
| 6 | 1 | 2 | -1 | 1,00 |
| 7 | 9 | 7 | 2 | 4,00 |
| 8 | 6 | 3 | 3 | 9,00 |
| 9 | 11 | 1 | 10 | 100,00 |
| 10 | 4 | 12 | -8 | 64,00 |
| 11 | 15 | 4 | 11 | 121,00 |
| 12 | 10 | 10 | 0 | 0,00 |
| 13 | 2 | 8,5 | -6,5 | 42,25 |
| 14 | 12,5 | 11 | 1,5 | 2,25 |
| Наименование качества | Ряд 1: ранг качества в эталонном профиле | Ряд 2: ранг качества в индивидуальном профиле | $d$ | $d^2$ |
| 15 | 3 | 13,5 | -10,5 | 110,25 |
| 16 | 14 | 16 | -2 | 4,00 |
| 17 | 16 | 18 | -2 | 4,00 |
| 18 | 17 | 13,5 | 3,5 | 12,25 |
| $\sum$ | 171,0 | 171,0 | | 487,50 |

***Гипотезы:***

$H_0$: корреляция между индивидуальным профилем депутата К и эталонным профилем, построенным по оценкам избирателей, не отличается от нуля.

$H_1$: статистически значимо отличается от нуля.

Так как если в обоих сопоставляемых ранговых рядах присутствуют одинаковые ранги, то надо найти поправки на одинаковые ранги $T_x = \frac{\sum(a^3 - a)}{12} = \frac{(2^3 - 2)}{12} = 0{,}5$, т.к. в ряду 1 присутствует одна группа одинаковых рангов – качества «обучаемость» и «гуманизм», и они имеют один и тот же ранг 12,5, поэтому $a$=2.

$T_y = \frac{\left((2^3-2)+(2^3-2)\right)}{12} = \frac{(6+6)}{12} = 1,$ т.к. в ряду 2 присутствует две группы одинаковых рангов (два ранга по 8,5 и два ранга по 13,5), поэтому $в_1$=2, $в_2$=2.

Рассчитаем
$$(r_S)_{эм} = 1 - \frac{6\sum d^2 + T_x + T_y}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot 487{,}5 + 0{,}5 + 1}{18(18^2-1)} =$$
$$= 1 - \frac{2926{,}5}{5814} \approx 1 - 0{,}5034 = 0{,}4966.$$

По таблице XVI Приложения определяем при $N$=18
$$(r_S)_{кр} = \begin{cases} 0{,}47 & (\rho \le 0{,}05), \\ 0{,}60 & (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$
$$(r_S)_{эмп} = 0{,}4966 > 0{,}47 = (r_S)_{кр} \ (\rho \le 0{,}05).$$

Следовательно, гипотеза $H_0$ отвергается, гипотеза $H_1$ принимается, т.е. корреляция между индивидуальным профилем депутата К и эталонным профилем, отвечающим требованиям избирателей, статистически значима $(\rho \le 0{,}05)$ и является положительной ($r$>0).

## Тема 8. Дисперсионный анализ

***Литература:*** [1], гл. 7, п.7.1–7.4, гл.8, п.8.1.–8.3, стр. 224–261; [5], ч. 3, п.3.5, 3.6, стр. 138–148; [6], гл. 5, §1–8, стр. 172–218; [7], гл. 10, стр. 215–253; [8], гл.8, стр. 198–251.

### Общие сведения

Дисперсионный анализ – это статистический метод анализа результатов наблюдений, зависящих от различных, одновременно действующих факторов, выбор наиболее важных факторов и оценка их влияния.

Идея метода заключается в разложении общей дисперсии случайной величины на независимые случайные слагаемые, каждое из которых характеризует влияние того или иного фактора или их взаимодействия. Последующее сравнение этих дисперсий позволяет оценить существенность (значимость) влияние факторов на исследуемую величину. Пусть, например, $X$ – исследуемая величина (успехи в учебе), $A$ (низкий уровень кратковременной памяти) и $B$ (трудолюбие) – влияющие на ее факторы; $\bar{x}$ – среднее значение величины $X$. Допустим, что отклонение $X$ от $\bar{x}$ при действии факторов $A$ и $B$ на исследуемую величину можно представить в виде суммы

$$X-\bar{x}=\alpha+\beta+\gamma,$$

где $\alpha$ – отклонение, вызываемое фактором *A;* $\beta$ – отклонение, вызываемое различными другими неучтенными и случайными факторами. Предположим также, что $\alpha,\beta,\gamma$ независимые случайные величины. Пусть $\delta_X^2,\delta_\alpha^2,\delta_\beta^2,\delta_\gamma^2$ – дисперсии случайных величин $X,\alpha,\beta,\gamma$ соответственно. Тогда т.к. дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий, а дисперсия постоянной величины ($\bar{x}$ – постоянная) равна нулю, то, $\delta_X^2=\delta_\alpha^2+\delta_\beta^2+\delta_\gamma^2$.

Тогда, сравнивая $\delta_\alpha^2$ или $\delta_\beta^2$ с $\delta_\gamma^2$, можно установить степень влияния факторов *A* и *B* на величину *X* по сравнению с неучтенными факторами; сравнивая $\delta_\alpha^2$ и $\delta_\beta^2$ между собой, можно установить сравнительное влияние факторов *A* и *B* на *X*.

Дисперсионный анализ позволяет на основании выборочных данных определить значения $\delta_\alpha^2$, $\delta_\beta^2$ и $\delta_\gamma^2$ а, используя специальные соответствующие критерии, оценить значимость их влияния на исследуемую величину.

Если исследуется влияние одного фактора на исследуемую величину, то речь идет об однофакторном дисперсионном анализе, а если – двух факторов, то двухфакторном и т.д. В дальнейшем будем предполагать, что совокупности случайных величин имеют нормальное распределение.

Мы рассмотрим однофакторный дисперсионный анализ, т.е. когда исследуется действие только одной переменной (одного фактора). В этом случае исследователя интересует: как изменяется определенный признак в разных условиях действия этой переменной. Например, как изменяется время решения задачи при разных условиях мотивации испытуемых (низкой, средней, высокой) или при разных способах предъявления задачи (устно, письменно, в виде графика), в разных условиях работы с задачей (в одиночестве, в одной комнате с экспериментатором, в одной комнате с другими испытуемыми) и т.д. В первом примере переменной *A*, влияние которой на время решения задачи – случайная величина *X* – исследуется, является мотивация, во втором – степень наглядности, в третьем – фактор публичности. Если на *X* оказывает влияние фактор мотивации, то градациями этого фактора будут (низкая, средняя, высокая; а если фактор публичности, то его градациями будут (одиночество, комната с экспериментатором, комната вместе со всеми испытуемыми и т.д.) .

Итак, пусть на количественный нормально распределенный признак $X$ (например, длительность попыток решения анаграмм в секундах) воздействует фактор $F$, который имеет $P$ постоянных уровней (градаций) (например, четырехбуквенная, пятибуквенная, шестибуквенная анаграммы). Будем предполагать, что число наблюдений (испытаний на каждом уровне) одинаково и равно $q$ (например, число испытуемых равно 5).

Пусть наблюдалось $n=pq$ значений $x_{ij}$ признака $X$, где $i$ – номер испытания ($i$=1, 2,…, $q$), $j$ – номер уровня (градации) фактора ($j$=1, 2, …, $p$). Результаты наблюдений приведены в таблице:

| Номер испытания | У ровни фактора $F$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $F_1$ | $F_2$ | … | $F_j$ | … | $F_p$ |
| 1 | $x_{11}$ | $x_{12}$ | … | $x_{1j}$ | … | $x_{1p}$ |
| 2 | $x_{21}$ | $x_{22}$ | … | $x_{2j}$ | … | $x_{2p}$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $i$ | $x_{i1}$ | $x_{i2}$ | … | $x_{ij}$ | … | $x_{ip}$ |
| … | … | … | … | … | … | |
| Номер испытания | У ровни фактора $F$ | | | | | |
| | $F_1$ | $F_2$ | … | $F_j$ | … | $F_p$ |
| $q$ | $x_{q1}$ | $x_{q2}$ | … | $x_{qj}$ | … | $x_{yp}$ |
| Групповая средняя | $\bar{x}_{гр1}$ | $\bar{x}_{гр2}$ | … | $\bar{x}_{грj}$ | … | $\bar{x}_{гр.p}$ |

В таблице: $\bar{x}_{гр.1} = \dfrac{x_{11}+x_{21}+...+x_{i1}+...+x_{q1}}{q} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{q} x_{i1}}{q}$ – средняя первой группы (по фактору $F$ первого уровня);

$\bar{x}_{гр.2} = \dfrac{x_{12}+x_{22}+...+x_{i2}+...+x_{q2}}{q} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{q} x_{i2}}{q}$ – средняя второй группы (фактора $F_j$) и т.д.

Введем в рассмотрение следующие величины:

$\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{q} x_{ij}}{qp} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{p} \bar{x}_{гр,j}}{p}$ – общая средняя наблюдаемых значений;

$S_{общ.} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{q} (x_{ij} - \overline{x})^2$ – общая сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от общей средней; она характеризует влияние фактора и случайных причин.

$S_{факт.} = q \sum_{j=1}^{p} (\overline{x}_{гр.j} - \overline{x})^2$ – факторная сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней, которая характеризует рассеяние «между группами»;

$S_{ост.} = \sum_{i=1}^{q} (x_{i1} - \overline{x}_{гр.1})^2 + \sum_{i=1}^{q} (x_{i2} - \overline{x}_{гр.2})^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{q} (x_{ip} - \overline{x}_{гр.p})^2$ – остаточная сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней, которая характеризует рассеяние «внутри групп».

Доказывается, что $S_{общ} = S_{факт.} + S_{ост.}$ .

Поэтому практически остаточную сумму находят по равенству:

$$S_{ост.} = S_{общ.} - S_{факт.} .$$

Элементарными преобразованиями можно получить формулы, более удобные для расчетов:

$$S_{общ.} = \sum_{j=1}^{p} P_j - \left[ \frac{(\sum_{j=1}^{P} R_j)^2}{pq} \right],$$

$$S_{факт.} = \left[ \frac{\sum_{j=1}^{P} R_j^2}{q} \right] - \left[ \frac{(\sum_{j=1}^{P} R_j)^2}{pq} \right], \text{ где}$$

$P_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2$ – сумма квадратов значений признака на уровне $F_j$;

$R_j = \sum_{i=1}^{q} x_{iy}$ – сумма значений признака на уровне $F_j$.

***Замечание.*** Для упрощения вычислений переходят к условным вариантам по формуле $y_{iy} = x_{iy} - C$, где $C$ – число примерно равное общей средней. Тогда предыдущие формулы принимают вид:

$$S_{общ.} = \sum_{j=1}^{P} Q_j - \left[ \frac{(\sum_{j=1}^{P} T_j)^2}{pq} \right],$$

$$S_{факт.} = \left[ \frac{(\sum T_j^2)}{q} \right] - \left[ \frac{(\sum_{j=1}^{P} T_j)^2}{pq} \right], \text{ где } Q_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2, \; T_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}.$$

Разделив суммы квадратов отклонений на соответствующее число степеней свободы, получим общую, факторную и остаточную исправленные дисперсии:

$$S_{общ}^2 = \frac{S_{общ.}}{pq-1}; \quad S_{факт.}^2 = \frac{S_{факт.}}{p-1}; \quad S_{ост.}^2 = \frac{S_{ост.}}{p(q-1)},$$

где $p$ – число уровней (градаций) фактора $F$;

$q$ – число наблюдений на каждом уровне; ($pq$-1) – число степеней свободы общей дисперсии; ($p$-1) – число степеней свободы факторной дисперсии; $p$($q$-1) – число степеней свободы остаточной дисперсии.

Поставим задачу: проверить при заданном уровне значимости $(\rho \le 0{,}05; \quad \rho \le 0{,}01)$ гипотезу:

$H_0$ – средние значения заданных совокупностей равны;

$H_1$ – средние не равны.

Такая задача решается с помощью статистического критерия Фишера-Снедекора путем сравнения факторной ( $S_{факт.}^2$ ) и остаточной $S_{ост.}^2$ дисперсий, т.е. $F_{эмп} = \dfrac{S_{факт.}^2}{S_{ост.}^2}$.

По таблице XVII Приложения находят $F_{кр}$ ($\alpha, k_1, k_2$), где $\alpha$ – уровень значимости, $k_1 = (p-1)$ – число степеней свободы числителя; $k_2 = p(q-1)$ – число степеней свободы знаменателя.

Если окажется, что $F_{кр.} > F_{эмп.}$, то гипотезу $H_0$ отвергаем, а гипотезу $H_1$ принимаем.

***Пример 22.*** Три различные группы из шести испытуемых получили списки из 10-ти слов. Первой группе слова предъявлялись с низкой скоростью – 1 слово в 5 секунд, второй группе со средней скоростью – 1 слово в 2 секунды, третьей – с большой скоростью – 1 слово в 1 секунду. Было предсказано, что показатели воспроизведения будут зависеть от скорости предъявления слов. Результаты представлены в следующей таблице:

| № испытуемого | Группа 1: низкая скорость | Группа 2: средняя скорость | Группа 3: высокая скорость |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 7 | 4 |
| 2 | 7 | 8 | 5 |
| 3 | 9 | 5 | 3 |
| 4 | 5 | 4 | 6 |
| 5 | 6 | 6 | 2 |
| 6 | 8 | 7 | 4 |
| $\sum$ | 43 | 37 | 24 |
| Средние | | | |

Проверить гипотезы:

$H_0$ – различия в объеме воспроизведения слов между группами являются не более выраженными (почти одинаковыми), чем случайные различия внутри каждой группы;

$H_1$ – более выраженными (неодинаковыми).

*Решение.*

Произведем необходимые расчеты в следующей таблице:

| Номер испытания ($i$) | Уровень фактора $F$ | | | | | | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $F_1$ | | $F_2$ | | $F_3$ | | |
| | $x_{i1}$ | $x_{i1}^2$ | $x_{i2}$ | $x_{i2}^2$ | $x_{i3}$ | $x_{i3}^2$ | |
| 1 | 8 | 64 | 7 | 49 | 4 | 16 | |
| 2 | 7 | 49 | 8 | 64 | 5 | 25 | |
| 3 | 9 | 81 | 5 | 25 | 3 | 9 | |
| 4 | 5 | 25 | 4 | 16 | 6 | 36 | |
| 5 | 6 | 36 | 6 | 36 | 2 | 4 | |
| 6 | 8 | 64 | 7 | 49 | 4 | 16 | |
| $P_j = \sum$ | | 319 | | 239 | | 106 | $\sum P_j$ =664 |
| $P_j = \sum x_{ij}$ | 43 | | 37 | | 24 | | $\sum R_j$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | =104 |
| $R_j^2$ | 1849 | | 1369 | | 576 | | $\sum R_j^2$ =3794 |

Используя результаты этой таблицы, рассчитаем:

$$S_{общ.} = 664 - \frac{104^2}{3 \cdot 6} \approx 63{,}11;$$

$$S_{факт.} = \frac{3794}{6} - \frac{104^2}{3 \cdot 6} \approx 632{,}333 - 600{,}889 = 31{,}444 \approx 31{,}44;$$

$$S_{ост.} = 63{,}11 - 31{,}44 = 31{,}67;$$

$$S^2_{факт.} \approx \frac{31{,}44}{3-1} = 15{,}72;$$

$$S^2_{ост.} \approx \frac{31{,}67}{3(6-1)} \approx 2{,}11;$$

$$F_{эмп.} = \frac{15{,}72}{2{,}11} \approx 7{,}45$$

Найдем $F_{кр.}$ при $k_1 = 3-1 = 2, \quad k_2 = 3(6-1) = 15$ по таблице XVII:

$$F_{кр.} = \begin{cases} 3{,}68 \quad (\rho \le 0{,}05), \\ 6{,}36 \quad (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

Сопоставим $F_{эмп}$ с $F_{кр}$: 7,45>6,36, т.е. гипотеза $H_0$ отклоняется, а гипотеза $H_1$ принимается. Это означает, что различия в объеме воспроизведения слов между группами являются более выраженными, чем случайные различия внутри каждой группы ($\rho < 0{,}01$), т.е. скорость предъявления слов влияет на объем их воспроизведения.

***Пример 23.*** Произведено четыре испытания на каждом из трех уровней. Результаты приведены в таблице:

| Номер испытания | Уровень фактора $F$ | | |
|---|---|---|---|
| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
| 1 | 51 | 52 | 42 |
| 2 | 52 | 54 | 44 |
| 3 | 56 | 56 | 50 |
| 4 | 57 | 58 | 52 |

Методом дисперсионного анализа проверить гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями.

*Решение.*

Результаты опыта подсказывают, что расчеты можно значительно упростить, перейдя к условным вариантам $y_{ij} = x_{ij} - C = x_{ij} - 52.$

Составим расчетную таблицу:

| Номер испытания $i$ | Уровень фактора F | | | | | | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $F_1$ | | $F_2$ | | $F_3$ | | |
| | $y_{i1}$ | $y_{i1}^2$ | $y_{i2}$ | $y_{i2}^2$ | $y_{i3}$ | $y_{i3}^2$ | |
| 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | -10 | 100 | |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 4 | -8 | 64 | |
| 3 | 4 | 16 | 4 | 16 | -2 | 4 | |
| 4 | 5 | 25 | 6 | 36 | 0 | 0 | |
| $Q_j = \sum_{i=1}^{4} y_{ij}^2$ | | 42 | | 56 | | 168 | $\sum Q_j = 266$ |
| $T_j = \sum y_{ij}$ | 8 | | 12 | | -20 | | $\sum T_j = 0$ |
| $T_j^2$ | 64 | | 144 | | 400 | | $\sum T_j^2 = 608$ |

$S_{общ}$=266-0=266,

$S_{факт} = \frac{608}{4} - 0 = 152,$

$S_{ост}$=266-152=114,

$$S_{факт}^2 = \frac{152}{3-1} = 76,$$

$$S_{ост}^2 = \frac{114}{3(4-1)} = \frac{114}{9} \approx 12{,}67.$$

Сравним факторную и остаточную дисперсии по критерию Фишера–Снедекора: $F_{эмп} = \frac{76}{12{,}67} \approx 6.$

Рассчитаем число степеней свободы числителя и знаменателя:
$k_1 = p - 1 = 3 - 1 = 2$; $k_2 = p(q-1) = 3(4-1) = 9$.
По таблице XVII Приложения найдем при $k_1$=2 и $k_1$=9

$$F_{кр} = \begin{cases} 4{,}26 & (p \le 0{,}05), \\ 8{,}02 & (\rho \le 0{,}01). \end{cases}$$

А так как $F_{эмп} = 6 > 4{,}26 = F_{кр}$, то гипотезу $H_0$ отвергаем, а принимаем гипотезу $H_1$.

## ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

1–10. Построить вариационный ряд и изобразить его графики, если задан протокол измерения изучаемого признака:

1.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 4 | 5 | 4 | 6 | 3 | 5 | 5 | 2 |
| 6 | 5 | 5 | 4 | 1 | 6 | 1 | 6 | 3 | 5 |
| 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 5 | 5 | 5 | 3 |
| 5 | 5 | 6 | 5 | 6 | 5 | 1 | 6 | 5 | 5 |
| 1 | 5 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 |
| 6 | 6 | 3 | 5 | 5 | 4 | 3 | 5 | 6 | 5 |
| 3 | 5 | 4 | 6 | 5 | 2 | 4 | 5 | 4 | 4 |
| 5 | 6 | 2 | 3 | 6 | 4 | 5 | 3 | 3 | 5 |
| 6 | 5 | 5 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 6 |

2.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 111 | 105 | 99 | 113 | 109 | 109 | 118 | 119 | 98 | 123 |
| 85 | 85 | 105 | 96 | 89 | 117 | 125 | 107 | 108 | 93 |
| 85 | 112 | 111 | 103 | 108 | 108 | 105 | 119 | 105 | 106 |
| 91 | 98 | 94 | 145 | 107 | 109 | 116 | 111 | 139 | 108 |
| 101 | 112 | 107 | 104 | 97 | 139 | 117 | 112 | 109 | 93 |
| 109 | 113 | 99 | 105 | 106 | 116 | 106 | 129 | 107 | 117 |
| 86 | 87 | 107 | 88 | 107 | 117 | 101 | 113 | 107 | 118 |
| 102 | 109 | 125 | 103 | 96 | 103 | 113 | 106 | 99 | 108 |
| 111 | 109 | 89 | 97 | 109 | 127 | 107 | 104 | 108 | 119 |
| 98 | 115 | 104 | 115 | 116 | 119 | 105 | 106 | 98 | 108 |

3.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 10 | 6 | 10 | 8 | 5 | 11 | 7 |
| 10 | 6 | 9 | 7 | 8 | 7 | 9 | 11 |
| 8 | 9 | 10 | 8 | 7 | 8 | 8 | 11 |
| 7 | 10 | 8 | 8 | 5 | 11 | 8 | 10 |
| 12 | 7 | 5 | 7 | 9 | 7 | 5 | 10 |
| 8 | 9 | 7 | 12 | 8 | 9 | 6 | 7 |
| 8 | 7 | 11 | 8 | 6 | 7 | 9 | 10 |
| 6 | 7 | 6 | 12 | 8 | 10 | 6 | 11 |

4.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13,6 | 12,9 | 12,3 | 9,9 | 12,7 | 11,7 | 10,8 | 10,4 | 10,9 | 10,2 |
| 14,7 | 10,4 | 11,6 | 11,7 | 12,1 | 10,9 | 12,1 | 9,2 | 10,7 | 11,5 |
| 13,1 | 10,9 | 12,0 | 11,1 | 13,5 | 11,2 | 13,5 | 10,1 | 14,0 | 10,0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11,6 | 12,4 | 11,9 | 11,4 | 12,8 | 11,4 | 10,9 | 12,7 | 13,8 | 13,2 |
| 11,9 | 10,8 | 11,0 | 12,6 | 10,0 | 10,3 | 12,7 | 11,7 | 12,1 | 13,8 |
| 12,2 | 11,9 | 11,6 | 10,6 | 11,1 | 10,7 | 12,3 | 11,5 | 11,2 | 11,5 |
| 12,7 | 10,5 | 11,2 | 11,9 | 9,7 | 13,0 | 9,6 | 12,5 | 11,6 | 9,0 |
| 11,5 | 12,3 | 12,8 | 12,6 | 12,8 | 12,5 | 12,8 | 11,4 | 12,5 | 12,3 |
| 14,5 | 12,3 | 12,6 | 11,7 | 12,2 | 12,3 | 11,6 | 12,0 | 13,5 | 12,5 |
| 11,6 | 11,9 | 12,0 | 11,4 | 14,7 | 11,3 | 13,2 | 14,3 | 13,2 | 14,2 |

5.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 18 | 14 | 21 | 18 | 19 | 18 | 16 | 18 | 20 |
| 21 | 19 | 17 | 16 | 20 | 19 | 19 | 20 | 16 | 16 |
| 19 | 18 | 19 | 19 | 19 | 20 | 21 | 16 | 20 | 17 |
| 17 | 19 | 21 | 16 | 17 | 18 | 17 | 15 | 16 | 21 |
| 22 | 20 | 20 | 19 | 20 | 20 | 20 | 18 | 21 | 17 |
| 18 | 17 | 19 | 17 | 19 | 19 | 16 | 19 | 17 | 16 |
| 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 20 | 19 | 20 | 19 | 21 |
| 18 | 18 | 18 | 20 | 20 | 18 | 16 | 19 | 20 | 18 |
| 15 | 20 | 17 | 24 | 18 | 18 | 20 | 18 | 19 | 21 |
| 20 | 19 | 20 | 19 | 20 | 19 | 19 | 16 | 21 | 19 |

6.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 21 | 18 | 18 | 12 | 24 | 18 | 17 | 22 | 23 |
| 9 | 15 | 24 | 22 | 21 | 15 | 15 | 19 | 15 | 19 |
| 10 | 17 | 20 | 16 | 14 | 17 | 20 | 22 | 17 | 22 |
| 18 | 27 | 23 | 21 | 16 | 13 | 11 | 15 | 16 | 21 |
| 17 | 16 | 15 | 19 | 24 | 18 | 22 | 25 | 16 | 17 |

7.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,0 | 2,5 | 3,0 | 2,3 | 2,2 | 1,9 | 1,8 | 1,1 | 2,1 | 2,0 |
| 2,2 | 2,9 | 1,6 | 1,9 | 1,0 | 2,3 | 2,4 | 2,6 | 1,9 | 1,6 |
| 2,1 | 2,6 | 1,9 | 1,6 | 2,5 | 1,9 | 1,3 | 2,3 | 2,1 | 2,3 |
| 1,1 | 2,1 | 1,3 | 2,1 | 2,1 | 2,7 | 3,2 | 1,2 | 2,2 | 1,0 |
| 2,7 | 2,4 | 1,2 | 2,6 | 1,8 | 1,5 | 2,0 | 2,0 | 1,1 | 3,0 |

8.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5,8 | 6,2 | 6,3 | 6,1 | 6,1 | 5,7 |
| 6,5 | 6,0 | 6,1 | 5,8 | 6,3 | 6,2 |
| 6,2 | 5,4 | 5,9 | 6,0 | 5,7 | 5,9 |
| 6,1 | 6,7 | 6,2 | 6,5 | 6,2 | 6,1 |
| 6,2 | 5,7 | 6,1 | 5,7 | 5,9 | 6,0 |
| 5,7 | 5,9 | 6,1 | 5,9 | 6,0 | 6,1 |

9.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,01 | 4,30 | 3,62 | 4,00 | 4,36 | 3,74 | 4,20 | 4,50 |
| 3,72 | 4,02 | 4,25 | 4,28 | 3,90 | 4,14 | 4,01 | 3,30 |
| 3,61 | 4,11 | 3,86 | 3,64 | 3,72 | 4,26 | 3,81 | 4,00 |
| 3,81 | 4,00 | 3,75 | 3,29 | 3,83 | 4,16 | 3,89 | 3,93 |
| 3,83 | 4,15 | 3,85 | 4,14 | 3,89 | 3,96 | 4,00 | 4,08 |
| 4,12 | 3,88 | 3,61 | 3,70 | 4,10 | 3,18 | 3,22 | 3,58 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,16 | 3,92 | 4,05 | 3,11 | 3,86 | 3,29 | 3,89 | 4,09 |
| 4,11 | 4,03 | 3,27 | 3,48 | 3,78 | 4,18 | 4,24 | 3,19 |
| 4,04 | 3,77 | 3,10 | 4,05 | 3,94 | 3,46 | 4,02 | 3,48 |

10.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 53 | 51 | 52 | 55 | 56 | 49 | 51 | 52 | 54 | 56 |
| 54 | 53 | 52 | 53 | 51 | 55 | 53 | 55 | 53 | 54 |
| 51 | 51 | 56 | 54 | 54 | 53 | 54 | 54 | 55 | 53 |
| 52 | 55 | 53 | 53 | 56 | 53 | 52 | 56 | 52 | 52 |
| 56 | 55 | 50 | 54 | 49 | 54 | 54 | 55 | 54 | 55 |
| 52 | 51 | 55 | 52 | 55 | 54 | 51 | 54 | 53 | 54 |
| 54 | 56 | 54 | 55 | 53 | 53 | 56 | 55 | 54 | 53 |
| 55 | 52 | 53 | 52 | 51 | 55 | 53 | 54 | 51 | 50 |
| 53 | 54 | 55 | 52 | 55 | 52 | 53 | 50 | 53 | 52 |
| 58 | 57 | 57 | 58 | 56 | 57 | 56 | 58 | 57 | 57 |

11–20.

Для вариационного ряда, построенного в предыдущей задаче, рассчитать: среднюю, моду, медиану, 50-й перцентиль, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, асимметрию и эксцесс.

21–30.

21. В группе слушателей ФПК по педагогике и психологии назрел конфликт между иногородними слушателями и слушателями, проживающими в Санкт-Петербурге, где и происходили занятия. В курсе психологического практикума по групповой психотерапии иногородним слушателям было предложено принять на себя роль петербуржцев и участвовать в споре на их стороне. 7 слушателей были протагонистами – активными игроками, перевоплотившимися в петербуржцев, а 7 других суфлировали им, подсказывая реплики и ссылки на те или иные факты. После этого сеанса социодраматической замены ролей участникам был задан вопрос: «Если принять за 100% психологическую дистанцию между вами и петербуржцами до дискуссии, то на сколько процентов она сократилась или увеличилась после дискуссии?».

Результаты представлены в следующей таблице:

| № испытуемых | Группа 1: протагонисты | Группа 2: суфлеры |
|---|---|---|
| 1 | 75 | 10 |
| 2 | 30 | 10 |
| 3 | 25 | 15 |
| 4 | 10 | 20 |
| 5 | 30 | 30 |
| 6 | 20 | 25 |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 50 | 5 |

Все показатели имеют отрицательный знак, что свидетельствует о сокращении дистанции. Могут ли эти данные использоваться как подтверждение идеи о том, что принятие на себя роли оппонента способствует сближению с ним?

22. Изучалась проблема психологических барьеров при обращении в службу знакомств у мужчин и женщин. В эксперименте участвовали 17 мужчин и 23 женщины в возрасте от 17 до 45 лет. Испытуемые должны были отметить на отрезке точку, соответствующую интенсивности внутреннего сопротивления, которое им пришлось преодолеть, чтобы обратиться в службу знакомств. Длина отрезка, отражающая максимально возможное сопротивление, составляла 100 мм. В следующей таблице приведены показатели интенсивности сопротивления, выраженные в миллиметрах:

| № | Группа 1 – мужчины | Группа 2 – женщины |
|---|---|---|
| 1 | 81 | 70 |
| 2 | 8073 | 66 |
| 3 | 72 | 66 |
| 4 | 72 | 63 |
| 5 | 69 | 63 |
| 6 | 69 | 61 |
| 7 | 65 | 60 |
| 8 | 65 | 54 |
| 9 | 62 | 47 |
| 10 | 60 | 43 |
| 11 | 54 | 41 |
| 12 | 54 | 40 |
| 13 | 43 | 39 |
| 14 | 30 | 38 |
| 15 | 26 | 38 |
| 16 | 26 | 35 |
| 17 | | 30 |
| 18 | | 27 |
| 19 | | 25 |
| 20 | | 23 |
| 21 | | 17 |
| 22 | | 10 |
| 23 | | 9 |

Можно ли утверждать, что мужчинам приходится преодолевать субъективно более мощное сопротивление?

23. В выборке из 28 мужчин-руководителей подразделений крупного промышленного предприятия перед началом курса тренинга партнерского общения проводилось обследование с помощью 16-факторного личностного опросника Р.Б.К. В следующей таблице приведены индивидуальные значения испытуемых по фактору $N$ , отражающему житейскую искушенность и проницательность. Данные представлены в баллах и сгруппированы по четырем возрастным группам.

| № испытуемого | Группа 1: 26–31 год | Группа 2: 32–37 лет | Группа 3: 38–42 года | Группа 4: 46–52 года |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 11 | 8 | 11 |
| 2 | 10 | 7 | 12 | 12 |
| 3 | 5 | 8 | 14 | 9 |
| 4 | 8 | 12 | 9 | 9 |
| 5 | 10 | 12 | 16 | 10 |
| 6 | 7 | 12 | 14 | 14 |
| 7 | 12 | 9 | 10 | 13 |

Можно ли утверждать, что есть определенная тенденция изменения значений фактора $N$, при переходе от группы к группе?

24. В исследовании психолога Б.Г.А. было установлено, что испытуемые по разному относятся к наказаниям, которые совершают по отношению к их детям разные люди. Например, наказание со стороны самого родителя считается более применимым, чем со стороны бабушки, и тем более учительницы. В таблице приведены оценки степени согласия с утверждениями о допустимости телесных наказаний в группе из 16 родителей:

| Испытуемый | Условие 1: «Я сам наказываю» | Условие 2: «Бабушка наказывает» | Условие 3: «Учительница наказывает» |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 5 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 3 | 2 |
| 5 | 3 | 3 | 2 |
| 6 | 4 | 5 | 1 |
| 7 | 3 | 3 | 1 |
| 8 | 5 | 5 | 3 |
| 9 | 6 | 5 | 3 |
| 10 | 2 | 2 | 2 |

| Испытуемый | Условие 1: «Я сам наказываю» | Условие 2: «Бабушка наказывает» | Условие 3: «Учительница наказывает» |
|---|---|---|---|
| 11 | 6 | 3 | 2 |
| 12 | 5 | 3 | 4 |
| 13 | 7 | 5 | 4 |
| 14 | 5 | 5 | 2 |
| 15 | 5 | 5 | 4 |
| 16 | 6 | 6 | 4 |

Можно ли говорить о достоверной тенденции в оценках?

25-27. 12 участников комплексной программы тренинга партнерского общения, продолжавшегося 7 дней, дважды оценивали у себя уровень владения тремя важнейшими коммуникативными навыками. Первое измерение производилось в первый день тренинга, второе – в последний. Участники должны были также наметить для себя реально достижимый, с их точки зрения, индивидуальный идеал в развитии каждого из навыков.

Все измерения производились по 10-ти бальной шкале. Данные представлены в следующей таблице:

| Код имени участника | | 1 измерение | | | | | | 2 измерение | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Активное слушание | | Снижение эмоционального напряжения | | Аргументация | | Активное слушание | | Снижение эмоционального напряжения | | Аргументация | |
| | | Реал. | Идеал. | Реал. | Идеал. | Реал. | Идеал. | Реал. | Идеал. | Реал. | Идеал. | Реал. | Идеал. |
| 1 | И. | 6 | 9 | 5 | 8 | 5 | 8 | 7 | 10 | 6 | 10 | 7 | 9 |
| 2 | Я. | 3 | 5 | 1 | 3 | 4 | 5 | 5 | 7 | 4 | 6 | 5 | 7 |
| 3 | Ин. | 4 | 6 | 4 | 6 | 5 | 8 | 8 | 10 | 7 | 8 | 6 | 8 |
| 4 | Р. | 4 | 6 | 4 | 5 | 5 | 7 | 6 | 7 | 5 | 7 | 5 | 7 |
| 5 | К. | 6 | 9 | 4 | 9 | 4 | 8 | 4 | 10 | 5 | 10 | 5 | 10 |
| 6 | Н. | 6 | 8 | 5 | 8 | 3 | 6 | 8 | 9 | 7 | 9 | 6 | 8 |
| 7 | Е. | 3 | 8 | 5 | 10 | 2 | 6 | 7 | 8 | 8 | 10 | 5 | 7 |
| 8 | Ле. | 6 | 9 | 5 | 8 | 3 | 7 | 5 | 8 | 7 | 10 | 5 | 9 |
| 9 | Ли. | 6 | 8 | 5 | 9 | 5 | 9 | 7 | 8 | 6 | 9 | 5 | 9 |
| 10 | Т. | 5 | 8 | 6 | 9 | 5 | 8 | 7 | 10 | 7 | 10 | 6 | 10 |
| 11 | Ет. | 6 | 8 | 6 | 10 | 3 | 9 | 5 | 10 | 4 | 9 | 3 | 9 |
| 12 | Б. | 6 | 8 | 3 | 10 | 4 | 7 | 7 | 9 | 6 | 8 | 5 | 8 |

25. Ощущается ли участниками достоверные сдвиги в уровне владения каждым из трех навыков после тренинга?

26. Произошли ли по трем группам навыков разные сдвиги, или эти сдвиги для разных навыков примерно одинаковы?

27. Уменьшается ли расхождение между «идеальным» и реальным уровнями владения навыками после тренинга?

28. Испытуемому последовательно предъявляются 6 картин. Всякий раз он сначала рассматривает картину в течение 20 секунд, а затем в течение 5 минут пишет по ней рассказ, стараясь, в соответствии с инструкцией, проявить «максимум фантазии и воображения». После того, как испытуемый закончит писать первый рассказ, ему предъявляется вторая картина и т.д. В данном исследовании разным испытуемым картины предъявлялись в разном порядке, так что каждая картина оказывалась первой, второй и т.д. примерно одинаковое количество раз. При обследовании 113 студентов в возрасте от 20 до 35 лет (67 мужчин и 46 женщин) было установлено, что в рассказах по картинам с условным названием «Преподаватель и ученик» и «Мастер измеряет деталь» словесные формулировки, отражающие «боязнь неудачи», встречаются гораздо чаще, чем в рассказах по другим картинам, в особенности по картине «Улыбающийся юноша». Эмпирическое распределение словесных формулировок, отражающих мотивы «надежда на успех» и «боязни неудачи» задано в следующей таблице:

| Название картины | Кол-во вербальных реакций, отражающих «надежду на успех» | | Кол-во вербальных реакций, отражающих «боязнь неудачи» | |
|---|---|---|---|---|
| 1. «Мастер измеряет деталь» | А | 106 | Б | 138 |
| 2. «Преподаватель и ученик» | В | 102 | Г | 180 |
| 3. «В цехе у машины» | Д | 108 | Е | 34 |
| 4. «У двери директора» | Ж | 50 | З | 87 |
| 5. «Человек в бюро» | И | 99 | К | 57 |
| 6. «Улыбающийся юноша» | Л | 115 | М | 20 |

1. Можно ли утверждать, что картины обладают разной побудительной силой в отношении мотивов: а) «надежда на успех»; б) «боязнь неудачи»?

2. Можно ли считать стимульный набор картин неуравновешенным по направленности воздействия?

29. В процессе проведения транзактно-аналитических сессий установлено, что запреты на «психологические поглаживания» (это любой акт, предполагающий признание присутствия другого человека; выражение симпатии, восхищения, одобрения, любое искреннее признание положительных качеств и проявлений другого человека, к которым могут относиться внешние данные, глубинные личностные свойства, мастерство в своем деле, способность дарить психологическое тепло и вовремя произнесенное слово и т.д.) встречаются с неодинаковой частотой. Например, многие участники тренинга признают у себя запрет «не проси психологических поглаживаний у других людей», а запрет «не давай психологических поглаживаний самому себе» встречается гораздо реже. Частота встречаемости запретов на психологические поглаживания представлена следующей таблицей:

| № п/п | Запрет | Частота |
|---|---|---|
| 1 | Не давай психологических поглаживаний | 44 |
| 2 | Не принимай психологических поглаживаний | 45 |
| 3 | Не проси психологических поглаживаний | 98 |
| 4 | Не отказывайся от психологических поглаживаний, даже если они тебе не нравятся | 58 |
| 5 | Не давай психологических поглаживаний самому себе | 36 |

1. Можно ли считать, что распределение запретов не является равномерным?
2. Можно ли утверждать, что запрет «Не проси» встречается достаточно чаще остальных?

30. Производилось исследование стереотипов мужественности. Была образована выборка из 31 женщины с высшим образованием в возрасте от 22 до 49 лет. Им предъявлялись напечатанные на отдельных карточках перечни качеств, характеризующих один из четырех типов мужественности: мифологический, национальный, современный и религиозный. Испытуемым предлагалось внимательно ознакомиться с предложенными описаниями и выбрать из них то, которое в большей степени соответствует их представлению об идеальном мужчине. Затем испытуемым предлагалось выбрать одну из 3-х оставшихся карточек, затем одну из двух оставшихся.

| | |
|---|---|
| Мифологический тип: | мощный, сильный, стройный, ловкий, бесстрашный, гордый, непокорный, уверенный, дерзкий, непреклонный, вспыльчивый, гневный, борец. |
| Национальный тип: | ловкий, решительный, сдержанный, великодушный, преданный, открытый, бесхитростный, милосердный, уверенный, честный, доверчивый, защитник. |
| Современный тип: | сильный, властный, сдержанный, уверенный, рассудочный, постоянный, агрессивный, практичный, эрудированный, самостоятельный, решительный, деятельный, энергичный, волевой. |
| Религиозный тип: | мягкий, миролюбивый, спокойный, кроткий, уступчивый, искренний, внимательный, выносливый, терпеливый, чувствительный. |

Распределение частот предпочтений четырех типов мужественности дано в следующей таблице:

| Тип мужественности | Эмпирические позиции | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1. Мифологический | 2 А | 6 Б | 4 В | 19 Г |
| 2. Национальный | 19 Д | 4 Е | 7 Ж | 1 З |
| 3. Современный | 7 И | 10 К | 12 Л | 2 М |
| 4. Религиозный | 3 Н | 11 О | 8 П | 9 Р |

1. Различаются ли распределения предпочтений, выявленные по каждому их 4-х типов, между собой?
2. Можно ли утверждать, что предпочтение отдается какому-то одному или двум из типов мужественности? Наблюдается ли какая-либо групповая тенденция предпочтений?

31. Проводились исследования 14 студентов-психологов и 100 студентов-медиков на предмет преобладания правого или левого глаза в прицельной способности глаз. Результаты представлены в следующей таблице:

| | Кол-во студентов с преобладанием левого глаза | Кол-во студентов с преобладанием правого глаза |
|---|---|---|
| 1. Студенты-психологи | 6 | 8 |
| 2. Студенты-медики | 19 | 81 |

Различаются ли между собой эти две выборки?

32. Рассматриваются две выборки: первая состоит из 25 милиционеров, которые были не в форме и не на посту, вторая – 25 граждан, не являющихся милиционерами. Изучался стиль реагирования на агрессию. Результаты оказались следующими: из 25 милиционеров 10 не продолжили разговора с агрессором, а 15 продолжили, причем из этих 15 реакций 10 были не агрессивными и примирительными, а 5 – были агрессивными. Из 25 гражданских лиц 18 предпочли не вступать в разговор, 3 человека продолжили разговор в неагрессивной примирительной форме, а 4 человека – в агрессивной форме.

1. Можно ли утверждать, что милиционеры караульно-постовой службы в большей степени склонны продолжать разговор с агрессором, чем другие граждане?
2. Можно ли утверждать, что милиционеры склонны отвечать агрессору более примирительно, чем гражданские лица?

33. В анкетном опросе английских общепрактикующих врачей было установлено, что врачи, перешедшие на самостоятельный бюджет, как правило, работают в приемлемых с большим количеством партнеров, чем врачи, не перешедшие на самостоятельный бюджет. Результаты обследования представлены в следующей таблице:

| № | Количество партнеров | Эмпирические частоты | |
|---|---|---|---|
| | | в выборке врачей с фондами | в выборке врачей без фондов |
| 1 | 2 и менее | 2 | 15 |
| 2 | 3-4 партнера | 6 | 5 |
| 3 | 5-6 партнеров | 27 | 8 |
| 4 | 7 и более | 14 | 0 |

Действительно ли в приемлемых с фондами работают большие по составу команды врачей, чем в приемных без фондов?

34. Наблюдателем установлено, что 51 человек из 70-ти выбрал правую дорожку при переходе из точки А в точку В, а 19 человек – левую. Можно ли утверждать, что правая дорожка предпочиталась достоверно чаще?

35. Требуется высказать суждение о сравнительной эффективности методик профессионального отбора поступающих в летное училище. После исследования по каждой из методик испытуемый получал оценку,

являющуюся суммой баллов за выполнение каждой пробы, входящей в методику. Учебные полеты оцениваются по этому же принципу. Результаты представлены в следующей таблице:

| Испытуемый | I методика | II методика | Учебные полеты |
|---|---|---|---|
| А. | 111 | 57 | 30 |
| Б. | 98 | 60 | 27 |
| Т. | 96 | 62 | 28 |
| М. | 94 | 13 | 23 |
| Т. | 80 | 38 | 20 |
| П. | 76 | 45 | 19 |
| Р. | 76 | 48 | 24 |
| К. | 75 | 47 | 22 |
| Л. | 74 | 58 | 18 |
| А. | 73 | 11 | 17 |

36. С правой руки испытуемых регистрируется электромиограмма. В 1-ой серии опытов испытуемый должен. Услышав звуковой сигнал, как можно быстрее сжать резиновую грушу и опустить ее сразу после того, как звук прекратится. Во 2-ой серии опытов испытуемый должен делать то же самое, но он слышит в наушниках шум своей мышцы, что согласно гипотезе экспериментатора служит дополнительной коррекцией его действий. Результаты опытов представлены в следующей таблице:

| Испытуемые | Длины последействий в 1-ой серии опытов (в мсек) | Длины последействий во 2-ой серии опытов (в мсек) |
|---|---|---|
| А | 116 | 120 |
| Б | 117 | 119 |
| В | 145 | 118 |
| Г | 111 | 116 |
| Д | 113 | 117 |
| Е | 106 | 118 |
| Ж | 115 | 123 |

Есть ли различия во временах последействий в обычных опытах и опытах со звуковым контролем?

37. Используя таблицу:

| № опыта | Время опознания одного начертания цифры 7 | Время опознания другого начертания цифры 7 |
|---|---|---|
| 1 | 18 | 17 |
| 2 | 20 | 17 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 22 | 24 |
| 4 | 24 | 26 |
| 5 | 17 | 15 |
| № опыта | Время опознания одного начертания цифры 7 | Время опознания другого начертания цифры 7 |
| 6 | 21 | 22 |
| 7 | 19 | 17 |
| 8 | 22 | 27 |

Решить вопрос о существовании реальных различий в трудности опознания цифры 7 при разных ее начертаниях.

38. Экспериментально проверяется одно из положений модели Терстоуна, а именно, гипотеза о том, что ошибка при опознании стимула имеет дисперсию, не зависящую от интенсивности или другой физической меры стимула. Стимул интенсивности 10 усл.ед. оценивается как 9, 9, 8, 10, 12, 13, 10, 10. Стимул интенсивности 20 усл.ед. оценивается как 15, 16, 17, 23, 22, 20, 21, 24, 27. В пользу проверяемой гипотезы или против нее свидетельствуют приведенные факты?

39. При определении положения цели два оператора радиолокационной установки допустили следующие ошибки (в метрах):

| | |
|---|---|
| 1-й оператор: | -35; -28; -23; -17; -11; -8; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -3; -3; -2; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 4; 5; 13; 15; 19; 33; 77. |
| 2-й оператор: | -11; -7; -5; -5; -4; -3,5; -3,5; -8; -2; -2; -2; -1; -0,5; -0,5; -0,5; 0; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 5; 20. |

Какой оператор работал точнее?

40. Бегуны, ранги которых при построении по росту были 1, 2, …, 10, заняли на состязаниях места: 6, 5, 1, 4, 2, 7, 8, 10, 3, 9. Как велика корреляция между ростом и быстротой бега?

41–50. В задачах №41–№50 требуется проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми генеральными дисперсиями. Желательно к каждой задаче придумать вполне определенное содержание, отражающее психологический смысл.

41.

| Номер испытания | Уровни фактора F | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *i* | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ |
| 1 | 42 | 66 | 35 | 64 | 70 |
| 2 | 55 | 91 | 50 | 70 | 79 |
| 3 | 67 | 96 | 60 | 79 | 88 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 67 | 98 | 69 | 81 | 90 |

42.

| Номер испытания | Уровни фактора F | | | |
|---|---|---|---|---|
| *i* | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ |
| 1 | 6 | 6 | 9 | 7 |
| 2 | 7 | 7 | 12 | 9 |
| 3 | 8 | 11 | 13 | 10 |
| 4 | 11 | 12 | 14 | 10 |

43.

| Номер испытания | Уровни фактора F | | |
|---|---|---|---|
| *i* | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
| 1 | 18,15 | 22,10 | 15,12 |
| 2 | 11,10 | 13,35 | 8,12 |
| 3 | 16,00 | 11,42 | 15,21 |
| 4 | 6,00 | 9,45 | 14,55 |
| 5 | 4,00 | 5,00 | 5,00 |
| 6 | 4,60 | 5,13 | 4,46 |

44.

| Номер испытания | Уровни фактора F | | |
|---|---|---|---|
| *i* | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
| 1 | 97,9 | 50,0 | 52,1 |
| 2 | 100,0 | 52,1 | 45,8 |
| 3 | 97,6 | 50,0 | 64,3 |
| 4 | 89,6 | 52,1 | 66,7 |
| 5 | 91,7 | 58,3 | 65,3 |
| 6 | 92,6 | 57,4 | 51,9 |
| 7 | 90,0 | 53,3 | 63,3 |
| 8 | 92,6 | 57,4 | 72,2 |
| 9 | 98,6 | 51,5 | 54,2 |

45.

| Номер испытания | Уровни фактора F | | | |
|---|---|---|---|---|
| *i* | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 5 |
| 2 | 4 | 19 | 34 | 24 |
| 3 | 0 | 2 | 3 | 3 |
| 4 | 0 | 4 | 3 | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 6 | 3 |
| 6 | 0 | 5 | 5 | 7 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 2 | 2 | 6 | 6 |
| 8 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 9 | 3 | 12 | 14 | 4 |
| 10 | 2 | 18 | 25 | 8 |

46.

| Номер испытания | Уровни фактора F | | |
|---|---|---|---|
| *i* | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
| 1 | 7 | 9 | 11 |
| 2 | 10 | 7 | 16 |
| 3 | 12 | 14 | 20 |
| 4 | 15 | 18 | 17 |

47.

| Номер испытания | Уровни фактора F | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *i* | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ |
| 1 | 200 | 140 | 170 | 145 | 165 |
| 2 | 190 | 150 | 210 | 150 | 10 |
| 3 | 230 | 190 | 200 | 190 | 200 |
| 4 | 150 | 170 | 150 | 170 | 180 |

48.

| Номер испытания | Уровни фактора F | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *i* | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ |
| 1 | 1600 | 1610 | 1650 | 1680 | 1700 |
| 2 | 1580 | 1640 | 1640 | 1700 | 1750 |
| 3 | 1460 | 1550 | 1600 | 1620 | 1640 |
| 4 | 1510 | 1520 | 1530 | 1570 | 1600 |

49.

| Номер испытания | Уровни фактора F | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *i* | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ |
| 1 | 9 | 10 | 9 | 8 | 9 |
| 2 | 8 | 10 | 8 | 7 | 8 |
| 3 | 7 | 9 | 8 | 8 | 8 |
| 4 | 8 | 8 | 9 | 7 | 7 |
| 5 | 17 | 17 | 16 | 15 | 17 |

50.

| Номер испытания | Уровни фактора F | | | |
|---|---|---|---|---|
| *i* | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ |
| 1 | 10 | 8 | 7 | 5 |
| 2 | 12 | 10 | 9 | 8 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 11 | 7 | 6 | 9 |
| 4 | 10 | 9 | 4 | 10 |

***Приложение 1***

## ТАБЛИЦЫ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ

Критические значения критерия Q Розенбаума для уровней статистической значимости $p \leq 0{,}05$ и $p \leq 0{,}01$ (по Гублеру Е.В., Генкину А.А., 1973)

Различия между выборками можно считать достоверными ( $p \leq 0{,}05$ ), если $Q_{эмп}$ равен или выше критического значения $Q_{0,05}$ и тем более достоверными ( $p \leq 0{,}01$ ), если $Q_{эмп}$ равен или выше критического значения $Q_{0,01}$.

*Таблица 1*

| $n\frac{\pi}{2}$ / $n_2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p = 0{,}05$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 6 | 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 6 | 6 | 6 | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 7 | 7 | 6 | 6 | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | | | | | | | | | | | |
| 16 | 8 | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 | | | | | | | | | | |
| 17 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | | | | | | | | | |
| 18 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | | | | | | | | |
| 19 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | | | | | | | |
| 20 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | | | | | | |
| 21 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | | | | | |
| 22 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | | | | |
| 23 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | | | |
| 24 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | | |
| 25 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | |
| 26 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| | $p = 0{,}01$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 9 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 9 | 9 | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 9 | 9 | 9 | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | | | | | | | | | |
| 16 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | | | | | | | | |
| $n\frac{\pi}{2}$ / $n_2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| | $p = 0{,}05$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $p = 0{,}05$ | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | | | | | | | |
| 18 | 10 | 10 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | | | | | | |
| 19 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | | | | | |
| 20 | 10 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | | | | |
| 21 | 11 | 11 | 10 | 10 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | | | |
| 22 | 11 | 11 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | | |
| 23 | 11 | 11 | 10 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | |
| 24 | 12 | 11 | 11 | 10 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | |
| 25 | 12 | 11 | 11 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | |
| 26 | 12 | 12 | 11 | 11 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

*Таблица 2. Продолжение*

| $n_1$ | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 37 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_2$ | *p=0,05* | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 22 | 171 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 180 | 189 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | 188 | 198 | 207 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 25 | 197 | 207 | 217 | 227 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 26 | 206 | 216 | 226 | 237 | 247 | | | | | | | | | | | | | | |
| 27 | 214 | 225 | 236 | 247 | 258 | 268 | | | | | | | | | | | | | |
| 28 | 223 | 234 | 245 | 257 | 268 | 279 | 291 | | | | | | | | | | | | |
| 29 | 232 | 243 | 255 | 267 | 278 | 290 | 302 | 314 | | | | | | | | | | | |
| 30 | 240 | 252 | 265 | 277 | 289 | 301 | 313 | 326 | 338 | | | | | | | | | | |
| 31 | 249 | 261 | 274 | 287 | 299 | 312 | 325 | 337 | 350 | 363 | | | | | | | | | |
| 32 | 258 | 271 | 284 | 297 | 310 | 323 | 336 | 349 | 362 | 375 | 389 | | | | | | | | |
| 33 | 266 | 280 | 293 | 307 | 320 | 334 | 347 | 361 | 374 | 388 | 402 | 415 | | | | | | | |
| 34 | 275 | 289 | 303 | 317 | 331 | 345 | 359 | 373 | 387 | 401 | 415 | 429 | 443 | | | | | | |
| 35 | 284 | 298 | 312 | 327 | 341 | 356 | 370 | 385 | 399 | 413 | 428 | 442 | 457 | 471 | | | | | |
| 36 | 292 | 307 | 322 | 337 | 352 | 367 | 381 | 396 | 411 | 426 | 441 | 456 | 471 | 486 | 501 | | | | |
| 37 | 301 | 316 | 332 | 347 | 362 | 378 | 393 | 408 | 424 | 439 | 454 | 470 | 485 | 501 | 516 | 531 | | | |
| 38 | 310 | 325 | 341 | 357 | 373 | 388 | 404 | 420 | 436 | 452 | 467 | 483 | 499 | 515 | 531 | 547 | 563 | | |
| 39 | 318 | 335 | 351 | 367 | 383 | 399 | 416 | 432 | 448 | 464 | 481 | 497 | 513 | 530 | 546 | 562 | 579 | 595 | |
| 40 | 327 | 344 | 360 | 377 | 394 | 410 | 427 | 444 | 460 | 477 | 494 | 511 | 527 | 544 | 561 | 578 | 594 | 611 | 628 |
| *p=0,01* | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 22 | 142 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 150 | 158 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | 154 | 166 | 174 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 25 | 165 | 174 | 183 | 192 | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 173 | 182 | 191 | 201 | 210 | | | | | | | | | | | | | | |
| 27 | 180 | 190 | 200 | 209 | 219 | 229 | | | | | | | | | | | | | |
| 28 | 188 | 198 | 208 | 218 | 229 | 239 | 249 | | | | | | | | | | | | |
| 29 | 196 | 206 | 217 | 227 | 238 | 249 | 259 | 270 | | | | | | | | | | | |
| 30 | 203 | 214 | 225 | 236 | 247 | 258 | 270 | 281 | 292 | | | | | | | | | | |
| 31 | 211 | 223 | 234 | 245 | 257 | 268 | 280 | 291 | 303 | 314 | | | | | | | | | |
| 32 | 219 | 231 | 242 | 254 | 266 | 278 | 290 | 302 | 314 | 326 | 338 | | | | | | | | |
| 33 | 227 | 239 | 251 | 263 | 276 | 288 | 300 | 313 | 325 | 337 | 350 | 362 | | | | | | | |
| 34 | 234 | 247 | 260 | 272 | 285 | 298 | 311 | 323 | 336 | 349 | 362 | 375 | 387 | | | | | | |
| 35 | 242 | 255 | 268 | 281 | 294 | 308 | 321 | 334 | 347 | 360 | 374 | 387 | 400 | 413 | | | | | |
| 36 | 250 | 263 | 277 | 290 | 304 | 318 | 331 | 345 | 358 | 372 | 386 | 399 | 413 | 427 | 440 | | | | |
| 37 | 258 | 271 | 285 | 299 | 313 | 327 | 341 | 355 | 370 | 384 | 398 | 412 | 426 | 440 | 454 | 468 | | | |
| 38 | 265 | 280 | 294 | 308 | 323 | 337 | 352 | 366 | 381 | 395 | 410 | 424 | 439 | 453 | 468 | 482 | 497 | | |
| 39 | 273 | 288 | 303 | 317 | 332 | 347 | 362 | 377 | 392 | 407 | 422 | 437 | 452 | 467 | 482 | 497 | 512 | 527 | |
| 40 | 281 | 296 | 311 | 326 | 342 | 357 | 372 | 388 | 403 | 418 | 434 | 449 | 465 | 480 | 495 | 511 | 526 | 542 | 557 |

*Таблица 2. Продолжение*

| $n_1$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_2$ | *p=0,05* | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 41 | 40 | 55 | 70 | 86 | 102 | 118 | 135 | 151 | 168 | 184 | 201 | 218 | 234 | 251 | 268 | 285 | 302 | 319 |
| 42 | 41 | 56 | 72 | 88 | 105 | 121 | 138 | 155 | 172 | 189 | 206 | 223 | 240 | 258 | 275 | 292 | 310 | 327 |
| 43 | 42 | 58 | 74 | 91 | 107 | 124 | 142 | 159 | 176 | 194 | 211 | 229 | 247 | 264 | 282 | 300 | 318 | 335 |
| 44 | 43 | 59 | 76 | 93 | 110 | 128 | 145 | 163 | 181 | 199 | 216 | 235 | 253 | 271 | 289 | 307 | 325 | 344 |
| 45 | 44 | 61 | 78 | 95 | 113 | 131 | 149 | 167 | 185 | 203 | 222 | 240 | 259 | 277 | 296 | 315 | 333 | 352 |
| 46 | 45 | 62 | 80 | 97 | 115 | 134 | 152 | 171 | 189 | 208 | 227 | 246 | 265 | 284 | 303 | 322 | 341 | 360 |
| 46 | 46 | 64 | 81 | 100 | 118 | 137 | 156 | 175 | 194 | 213 | 232 | 251 | 271 | 290 | 310 | 329 | 349 | 369 |
| 48 | 46 | 65 | 83 | 102 | 121 | 140 | 159 | 178 | 198 | 218 | 237 | 257 | 277 | 297 | 317 | 337 | 357 | 377 |
| 49 | 48 | 66 | 85 | 104 | 123 | 143 | 163 | 182 | 202 | 222 | 243 | 263 | 283 | 303 | 324 | 344 | 365 | 385 |
| 50 | 49 | 68 | 87 | 106 | 126 | 146 | 166 | 186 | 207 | 227 | 248 | 268 | 289 | 310 | 331 | 352 | 372 | 393 |
| 51 | 50 | 69 | 89 | 109 | 129 | 149 | 170 | 190 | 211 | 232 | 253 | 274 | 295 | 316 | 338 | 359 | 380 | 402 |
| 52 | 51 | 71 | 91 | 111 | 131 | 152 | 173 | 194 | 215 | 237 | 258 | 280 | 301 | 323 | 345 | 366 | 388 | 410 |
| 53 | 52 | 72 | 92 | 113 | 134 | 155 | 177 | 198 | 220 | 241 | 263 | 285 | 307 | 329 | 352 | 374 | 396 | 418 |
| 54 | 53 | 74 | 94 | 115 | 137 | 158 | 180 | 202 | 224 | 246 | 269 | 291 | 303 | 336 | 359 | 381 | 404 | 427 |
| 55 | 54 | 75 | 96 | 118 | 139 | 161 | 184 | 206 | 228 | 251 | 274 | 297 | 319 | 342 | 365 | 389 | 412 | 435 |
| 56 | 55 | 76 | 98 | 120 | 142 | 164 | 187 | 210 | 233 | 256 | 279 | 302 | 326 | 349 | 372 | 396 | 420 | 443 |
| 57 | 57 | 78 | 100 | 122 | 145 | 167 | 191 | 214 | 237 | 261 | 284 | 308 | 332 | 355 | 379 | 403 | 427 | 451 |
| 58 | 58 | 79 | 102 | 124 | 147 | 171 | 194 | 218 | 241 | 265 | 289 | 314 | 338 | 362 | 386 | 411 | 435 | 460 |
| 59 | 59 | 81 | 103 | 127 | 150 | 174 | 198 | 222 | 246 | 270 | 295 | 319 | 344 | 369 | 393 | 418 | 443 | 468 |
| 60 | 60 | 82 | 105 | 129 | 153 | 177 | 201 | 225 | 250 | 275 | 300 | 325 | 350 | 375 | 400 | 426 | 451 | 476 |
| *p=0,01* | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 41 | 23 | 36 | 49 | 63 | 77 | 91 | 106 | 121 | 136 | 151 | 166 | 181 | 196 | 211 | 227 | 242 | 258 | 273 |
| 42 | 23 | 37 | 50 | 65 | 79 | 94 | 109 | 124 | 139 | 155 | 170 | 186 | 201 | 217 | 233 | 249 | 265 | 280 |
| 43 | 24 | 38 | 52 | 66 | 81 | 96 | 112 | 127 | 143 | 159 | 175 | 190 | 207 | 223 | 239 | 255 | 271 | 288 |
| 44 | 25 | 39 | 53 | 68 | 83 | 99 | 115 | 130 | 146 | 163 | 179 | 195 | 212 | 228 | 245 | 262 | 278 | 295 |
| 45 | 25 | 40 | 54 | 70 | 85 | 101 | 117 | 134 | 150 | 167 | 183 | 200 | 217 | 234 | 251 | 268 | 285 | 303 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 26 | 41 | 56 | 71 | 87 | 104 | 120 | 137 | 154 | 171 | 188 | 205 | 222 | 240 | 257 | 275 | 292 | 310 |
| 47 | 27 | 42 | 57 | 73 | 90 | 106 | 123 | 140 | 157 | 175 | 192 | 210 | 228 | 245 | 263 | 281 | 299 | 317 |
| 48 | 27 | 43 | 58 | 75 | 92 | 109 | 126 | 143 | 161 | 179 | 197 | 215 | 233 | 251 | 269 | 288 | 306 | 325 |
| 49 | 28 | 44 | 60 | 77 | 94 | 111 | 129 | 147 | 165 | 183 | 201 | 220 | 238 | 257 | 276 | 294 | 313 | 332 |
| 50 | 29 | 45 | 61 | 78 | 96 | 114 | 132 | 150 | 168 | 187 | 206 | 225 | 244 | 263 | 282 | 301 | 320 | 339 |
| 51 | 29 | 46 | 63 | 80 | 98 | 116 | 135 | 153 | 172 | 191 | 210 | 229 | 249 | 268 | 288 | 307 | 327 | 347 |
| 52 | 30 | 47 | 64 | 82 | 100 | 119 | 137 | 157 | 176 | 195 | 215 | 234 | 254 | 274 | 294 | 314 | 334 | 354 |
| 53 | 31 | 48 | 65 | 83 | 102 | 121 | 140 | 160 | 179 | 199 | 219 | 239 | 259 | 280 | 300 | 320 | 341 | 361 |
| 54 | 31 | 49 | 67 | 85 | 104 | 114 | 143 | 163 | 183 | 203 | 224 | 244 | 265 | 285 | 306 | 327 | 348 | 369 |
| 55 | 32 | 50 | 68 | 87 | 106 | 126 | 146 | 166 | 187 | 207 | 228 | 249 | 270 | 291 | 312 | 333 | 355 | 376 |
| 56 | 33 | 51 | 69 | 89 | 108 | 129 | 149 | 177 | 190 | 211 | 233 | 254 | 275 | 297 | 318 | 340 | 362 | 384 |
| 57 | 33 | 52 | 71 | 90 | 111 | 131 | 152 | 173 | 194 | 215 | 237 | 259 | 281 | 302 | 324 | 347 | 369 | 391 |
| 58 | 34 | 53 | 72 | 92 | 113 | 133 | 155 | 176 | 198 | 220 | 242 | 264 | 286 | 308 | 331 | 353 | 376 | 398 |
| 59 | 34 | 54 | 73 | 94 | 115 | 136 | 158 | 179 | 201 | 224 | 246 | 268 | 291 | 314 | 337 | 360 | 383 | 406 |
| 60 | 35 | 55 | 75 | 96 | 117 | 138 | 160 | 183 | 205 | 228 | 250 | 273 | 296 | 320 | 343 | 366 | 390 | 413 |

*Таблица 3*

Критические значения критерия H. Крускала-Уоллиса для разных сочетаний $n_1$, $n_2$ и $n_3$
Различия между выборками можно считать достоверными на указанном в таблице уровне значимости, если $H_{эмп}$ достигает соответствующего критического значения или превышает его
(по Greene J., D'Olivera M., 1989).

| Объемы выборок | | | | | Объемы выборок | | | | | Объемы выборок | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | H | *p* | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | H | *p* | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | H | *p* |
| 2 | 1 | 1 | 2,7000 | 0,500 | 4 | 4 | 1 | 6,6667 | 0,010 | 5 | 4 | 1 | 6,9545 | 0,008 |
| 2 | 2 | 1 | 3,6000 | 0,200 | | | | 6,1667 | 0,022 | | | | 6,8400 | 0,011 |
| 2 | 2 | 2 | 4,5714 | 0,067 | | | | 4,9667 | 0,048 | | | | 4,9855 | 0,044 |
| 3 | 1 | 1 | 3,2000 | 0,300 | | | | 4,8667 | 0,054 | | | | 4,8600 | 0,056 |
| 3 | 2 | 1 | 4,2857 | 0,100 | | | | 4,1667 | 0,082 | | | | 3,9873 | 0,098 |
| | | | 3,8571 | 0,133 | | | | 4,0667 | 0,102 | | | | 3,9600 | 0,102 |
| 3 | 2 | 2 | 5,3572 | 0,029 | 4 | 4 | 2 | 7,0364 | 0,006 | 5 | 4 | 2 | 7,2045 | 0,009 |
| | | | 4,7143 | 0,048 | | | | 6,8727 | 0,011 | | | | 7,1182 | 0,010 |
| | | | 4,5000 | 0,067 | | | | 5,4545 | 0,046 | | | | 5,2727 | 0,049 |
| | | | 4,4643 | 0,105 | | | | 5,2364 | 0,052 | | | | 5,2682 | 0,050 |
| 3 | 3 | 1 | 5,1429 | 0,043 | | | | 4,5545 | 0,098 | | | | 4,5409 | 0,098 |
| | | | 4,5714 | 0,100 | | | | 4,4455 | 0,103 | | | | 4,5182 | 0,101 |
| | | | 4,0000 | 0,129 | | | | | | | | | | |
| | | | | | 4 | 4 | 3 | 7,1439 | 0,010 | 5 | 4 | 3 | 7,4449 | 0,010 |
| 3 | 3 | 2 | 6,2500 | 0,011 | | | | 7,1364 | 0,011 | | | | 7,3943 | 0,011 |
| | | | 5,3611 | 0,032 | | | | 5,5985 | 0,049 | | | | 5,6564 | 0,049 |
| | | | 5,1389 | 0,061 | | | | 5,5758 | 0,051 | | | | 5,6308 | 0,050 |
| | | | 4,5556 | 0,100 | | | | 4,5455 | 0,099 | | | | 4,5487 | 0,099 |
| | | | 4,2500 | 0,121 | | | | 4,4773 | 0,102 | | | | 4,5231 | 0,103 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 7,2000 | 0,004 | 4 | 4 | 4 | 7,6538 | 0,008 | 5 | 4 | 4 | 7,7604 | 0,009 |
| | | | 6,4889 | 0,011 | | | | 7,5385 | 0,011 | | | | 7,7440 | 0,011 |
| | | | 5,6889 | 0,029 | | | | 5,6923 | 0,049 | | | | 5,6571 | 0,049 |
| | | | 5,6000 | 0,050 | | | | 5,6538 | 0,054 | | | | 5,6176 | 0,050 |
| | | | 5,0667 | 0,086 | | | | 4,6539 | 0,097 | | | | 4,6187 | 0,100 |
| | | | 4,6222 | 0,100 | | | | 4,5001 | 0,104 | | | | 4,5527 | 0,102 |
| 4 | 1 | 1 | 3,5714 | 0,200 | 5 | 1 | 1 | 3,8571 | 0,143 | 5 | 5 | 1 | 7,3091 | 0,009 |
| 4 | 2 | 1 | 4,8214 | 0,057 | 5 | 2 | 1 | 5,2500 | 0,036 | | | | 6,8364 | 0,011 |
| | | | 4,5000 | 0,076 | | | | 5,0000 | 0,048 | | | | 5,1273 | 0,046 |
| | | | 4,0179 | 0,114 | | | | 4,4500 | 0,071 | | | | 4,9091 | 0,053 |
| 4 | 2 | 2 | 6,0000 | 0,014 | | | | 4,2000 | 0,095 | | | | 4,1091 | 0,086 |
| | | | 5,3333 | 0,033 | | | | 4,0500 | 0,119 | | | | 4,0364 | 0,105 |
| | | | 5,1250 | 0,052 | | | | | | | | | | |
| | | | 4,4583 | 0,100 | | | | | | | | | | |
| | | | 4,1667 | 0,105 | | | | | | | | | | |
| | | | | | 5 | 2 | 2 | 6,5333 | 0,008 | 5 | 5 | 2 | 7,3385 | 0,010 |
| | | | | | | | | 6,1333 | 0,013 | | | | 7,2692 | 0,010 |
| | | | | | | | | 5,1600 | 0,034 | | | | 5,3385 | 0,047 |
| 4 | 3 | 1 | 5,8333 | 0,021 | | | | 5,0400 | 0,056 | | | | 5,2462 | 0,051 |
| | | | 5,2083 | 0,050 | | | | 4,3733 | 0,090 | | | | 4,6231 | 0,097 |
| | | | 5,0000 | 0,057 | | | | 4,2933 | 0,122 | | | | 4,5077 | 0,100 |
| | | | 4,0556 | 0,093 | | | | | | | | | | |
| | | | 3,8889 | 0,129 | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 5 | 3 | 1 | 6,4000 | 0,012 | 5 | 5 | 3 | 7,5780 | 0,010 |
| | | | | | | | | 4,9600 | 0,048 | | | | 7,5429 | 0,010 |
| 4 | 3 | 2 | 6,4444 | 0,008 | | | | 4,8711 | 0,052 | | | | 5,7055 | 0,046 |
| | | | 6,3000 | 0,011 | | | | 4,0178 | 0,095 | | | | 5,6264 | 0,051 |
| | | | 5,4444 | 0,046 | | | | 3,8400 | 0,123 | | | | 4,5451 | 0,100 |
| | | | 5,4000 | 0,051 | | | | | | | | | 4,5363 | 0,102 |
| | | | 4,5111 | 0,098 | | | | | | | | | | |
| | | | 4,4444 | 0,102 | | | | | | | | | | |
| | | | | | 5 | 3 | 2 | 6,9091 | 0,009 | | | | | |
| | | | | | | | | 6,8218 | 0,010 | | | | | |
| | | | | | | | | 5,2509 | 0,049 | | | | | |
| | | | | | | | | 5,1055 | 0,052 | | | | | |
| | | | | | | | | 4,6509 | 0,091 | | | | | |
| | | | | | | | | 4,4945 | 0,101 | | | | | |
| | | | | | | | | | | 5 | 5 | 4 | 7,8229 | 0,010 |
| | | | | | | | | | | | | | 7,7914 | 0,010 |
| 4 | 3 | 3 | 6,7455 | 0,010 | | | | | | | | | 5,6657 | 0,049 |
| | | | 6,7091 | 0,013 | | | | | | | | | 5,6429 | 0,050 |
| | | | 5,7909 | 0,046 | | | | | | | | | 4,5229 | 0,099 |
| | | | 5,7273 | 0,050 | | | | | | | | | 4,5200 | 0,101 |
| | | | 4,7091 | 0,092 | 5 | 3 | 3 | 7,0788 | 0,009 | | | | | |
| | | | 4,7000 | 0,101 | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | 6,9818 | 0,011 | 5 | 5 | 5 | 8,0000 | 0,009 |
| | | | | | | | | 5,6485 | 0,049 | | | | 7,9800 | 0,010 |
| | | | | | | | | 5,5152 | 0,051 | | | | 5,7800 | 0,049 |
| | | | | | | | | 4,5333 | 0,097 | | | | 5,6600 | 0,051 |
| | | | | | | | | 4,4121 | 0,109 | | | | 4,5600 | 0,100 |
| | | | | | | | | | | | | | 4,5000 | 0,102 |

*Таблица 4*

Критические значения критерия тенденций S Джонкира для количества групп (c) от трех до шести ($3 \le c \le 6$)
и количества испытуемых в каждой группе от двух до десяти ($2 \le n \le 10$)
Тенденция является достоверной, если $S_{эмп}$ достигает $S_{0,05}$ или превышает его ($\rho \le 0,05$),
и тем более достоверной, если $S_{эмп}$ достигает $S_{0,01}$ или превышает его ($\rho \le 0,01$)
(по Greene J., D'Olivera M., 1989).

| c | N | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| *p*=0,05 | | | | | | | | | |
| 3 | 10 | 17 | 24 | 33 | 42 | 53 | 64 | 76 | 88 |
| 4 | 14 | 26 | 38 | 51 | 66 | 82 | 100 | 118 | 138 |
| 5 | 20 | 34 | 51 | 71 | 92 | 115 | 140 | 166 | 194 |
| 6 | 26 | 44 | 67 | 93 | 121 | 151 | 184 | 219 | 256 |
| *p*=0,01 | | | | | | | | | |
| 3 | - | 23 | 32 | 45 | 59 | 74 | 90 | 106 | 124 |
| 4 | 20 | 34 | 50 | 71 | 92 | 115 | 140 | 167 | 195 |
| 5 | 26 | 48 | 72 | 99 | 129 | 162 | 197 | 234 | 274 |
| 6 | 34 | 62 | 94 | 130 | 170 | 213 | 260 | 309 | 361 |

*Таблица 5*

Критические значения критерия знаков G для уровней статистической значимости $\rho \le 0,05$ и $p \le 0,01$
(по Оуэну Д.Б., 1966)
Преобладание «типичного» сдвига является достоверным, если $G_{эмп}$ ниже или равен $G_{0,01.}$

| n | p | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 5 | 0 | - |
| 6 | 0 | - |
| 7 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 0 |
| 9 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 0 |
| 11 | 2 | 1 |
| 12 | 2 | 1 |
| 13 | 3 | 1 |
| 14 | 3 | 2 |
| 15 | 3 | 2 |
| 16 | 4 | 2 |
| 17 | 4 | 3 |
| 18 | 5 | 3 |

| n | p | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 19 | 5 | 4 |
| 20 | 5 | 4 |
| 21 | 6 | 4 |
| 22 | 6 | 5 |
| 23 | 7 | 5 |
| 24 | 7 | 5 |
| 25 | 7 | 6 |
| 26 | 8 | 6 |

n

| n | p | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 27 | 8 | 7 |
| 28 | 8 | 7 |
| 29 | 9 | 7 |
| 30 | 10 | 8 |
| 31 | 10 | 8 |
| 32 | 10 | 8 |
| 33 | 11 | 9 |
| 34 | 11 | 9 |
| 35 | 12 | 10 |
| 36 | 12 | 10 |
| 37 | 13 | 10 |
| 38 | 13 | 11 |
| 39 | 13 | 11 |
| 40 | 14 | 12 |

| n | p | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 41 | 14 | 12 |
| 42 | 15 | 13 |
| 43 | 15 | 13 |
| 44 | 16 | 13 |
| 45 | 16 | 14 |
| 46 | 16 | 14 |
| 47 | 17 | 15 |
| 48 | 17 | 15 |

*p*

| n | p | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 49 | 18 | 15 |
| 50 | 18 | 16 |
| 52 | 19 | 17 |
| 54 | 20 | 18 |
| 56 | 21 | 18 |
| 58 | 22 | 19 |
| 60 | 23 | 20 |
| 62 | 24 | 21 |
| 64 | 24 | 22 |
| 66 | 25 | 23 |
| 68 | 26 | 23 |
| 70 | 27 | 24 |
| 72 | 28 | 25 |
| 74 | 29 | 26 |

| n | p | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 76 | 30 | 27 |
| 78 | 31 | 28 |
| 80 | 32 | 29 |
| 82 | 33 | 30 |
| 84 | 33 | 30 |
| 86 | 34 | 31 |
| 88 | 35 | 32 |
| 90 | 36 | 33 |

| n | p | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 92 | 37 | 34 |
| 94 | 38 | 35 |
| 96 | 39 | 36 |
| 98 | 40 | 37 |
| 100 | 41 | 37 |
| 110 | 45 | 42 |
| 120 | 50 | 46 |
| 130 | 55 | 51 |
| 140 | 59 | 55 |
| 150 | 64 | 60 |
| 160 | 69 | 64 |
| 170 | 73 | 69 |
| 180 | 78 | 73 |
| 190 | 83 | 78 |

| n | p | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 200 | 87 | 83 |
| 220 | 97 | 92 |
| 240 | 106 | 101 |
| 260 | 116 | 110 |
| 280 | 125 | 120 |
| 300 | 135 | 129 |

*Таблица 6*

Критические значения критерия Т Вилкоксона для уровней статистической значимости $p \le 0{,}05$ и $p \le 0{,}01$

«Типичный» сдвиг является достоверно преобладающим по интенсивности, если $T_{эмп}$ ниже или равен $T_{0,05}$ и тем более достоверно преобладающим, если $T_{эмп}$ ниже или равен $T_{0,01}$ (по Wilcoxon F. et al., 1963).

| | *p* | |
|---|---|---|
| n | 0,05 | 0,01 |
| 5 | 0 | - |
| 6 | 2 | - |
| 7 | 3 | 0 |
| 8 | 5 | 1 |
| 9 | 8 | 3 |
| 10 | 10 | 5 |
| 11 | 13 | 7 |
| 12 | 17 | 9 |
| 13 | 21 | 12 |
| 14 | 25 | 15 |
| 15 | 30 | 19 |
| 16 | 35 | 23 |
| 17 | 41 | 27 |
| 18 | 47 | 32 |
| 19 | 53 | 37 |
| 20 | 60 | 43 |
| 21 | 67 | 49 |
| 22 | 75 | 55 |
| 23 | 83 | 62 |
| 24 | 91 | 69 |
| 25 | 100 | 76 |
| 26 | 110 | 84 |
| 27 | 119 | 92 |

| | *p* | |
|---|---|---|
| n | 0,05 | 0,01 |
| 28 | 130 | 101 |
| 29 | 140 | 110 |
| 30 | 151 | 120 |
| 31 | 163 | 130 |
| 32 | 175 | 140 |
| 33 | 187 | 151 |
| 34 | 200 | 162 |
| 35 | 213 | 173 |
| 36 | 227 | 185 |
| 37 | 241 | 198 |
| 38 | 256 | 211 |
| 39 | 271 | 224 |
| 40 | 286 | 238 |
| 41 | 302 | 252 |
| 42 | 319 | 266 |
| 43 | 336 | 281 |
| 44 | 353 | 296 |
| 45 | 371 | 312 |
| 46 | 389 | 328 |
| 47 | 407 | 345 |
| 48 | 426 | 362 |
| 49 | 446 | 379 |
| 50 | 466 | 397 |

*Таблица 7-А*

Критические значения критерия $\chi_r^2$ Фридмана
для количества условий с=3 и количества испытуемых от двух
до девяти ( $2 \le n \le 9$ )

Различия между условиями можно считать достоверными на указанном в таблице уровне значимости, если $\chi^2_{r\ эмп}$ достигает соответствующего критического значения или превышает его (по Greene J., D Olivera M., 1989).

| $n$=2 | | $n$=3 | | $n$=4 | | $n$=5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ |
| 0 | 1,000 | 0,000 | 1,000 | 0,0 | 1,000 | 0,0 | 1,000 |
| 1 | 0,833 | 0,667 | 0,944 | 0,5 | 0,931 | 0,4 | 0,954 |
| 3 | 0,500 | 2,000 | 0,528 | 1,5 | 0,653 | 1,2 | 0,691 |
| 4 | 0,167 | 2,667 | 0,361 | 2,0 | 0,431 | 1,6 | 0,522 |
| | | 4,667 | 0,194 | 3,5 | 0,273 | 2,8 | 0,367 |
| | | 6,000 | 0,028 | 4,5 | 0,125 | 3,6 | 0,182 |
| | | | | 6,0 | 0.069 | 4,8 | 0,124 |
| | | | | 6,5 | 0,042 | 5,2 | 0,093 |
| | | | | 8,0 | 0,0046 | 6,4 | 0,039 |
| | | | | | | 7,6 | 0,024 |
| | | | | | | 8,4 | 0,0085 |
| | | | | | | 10,0 | 0,00077 |

| $n$=6 | | $n$=7 | | $n$=8 | | $n$=9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ |
| 0,00 | 1,000 | 0,000 | 1,000 | 0,00 | 1,000 | 0,000 | 1,000 |
| 0,33 | 0,956 | 0,286 | 0,964 | 0,25 | 0,967 | 0,222 | 0,971 |
| 1,00 | 0,740 | 0,857 | 0,768 | 0,75 | 0,794 | 0,667 | 0,814 |
| 1,33 | 0,570 | 1,143 | 0,620 | 1,00 | 0,654 | 0,889 | 0,865 |
| 2,33 | 0,430 | 2,000 | 0,486 | 1,75 | 0,531 | 1,556 | 0,596 |
| 3,00 | 0,252 | 2,571 | 0,305 | 2,25 | 0,355 | 2,000 | 0,398 |
| 4,00 | 0,184 | 3,429 | 0,237 | 3,00 | 0,285 | 2,667 | 0,328 |
| 4,33 | 0,142 | 3,714 | 0,192 | 3,25 | 0,236 | 2,889 | 0,278 |
| 5,33 | 0,172 | 4,571 | 0,112 | 4,00 | 0,149 | 3,556 | 0,187 |
| 6,33 | 0,052 | 5,429 | 0,085 | 4,75 | 0,120 | 4,222 | 0,154 |
| 7,00 | 0,029 | 6,000 | 0,052 | 5,25 | 0,079 | 4,667 | 0,107 |
| 8,33 | 0,012 | 7,143 | 0,027 | 6,25 | 0,047 | 5,556 | 0,069 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9,00 | 0,0081 | 7,714 | 0,021 | 6,75 | 0,038 | 6,000 | 0,057 |
| $n$=6 | | $n$=7 | | $n$=8 | | $n$=9 | |
| $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ |
| 9,33 | 0,0055 | 8,000 | 0,016 | 7,00 | 0,030 | 6,222 | 0,048 |
| 10,33 | 0,0017 | 8,857 | 0,0084 | 7,75 | 0,018 | 6,889 | 0,031 |
| 12,00 | 0,00013 | 10,286 | 0,0036 | 9,00 | 0,0099 | 8,000 | 0,019 |
| | | 10,571 | 0,0027 | 9,25 | 0,0080 | 8,222 | 0,016 |
| | | 11,143 | 0,0012 | 9,75 | 0,0048 | 8,667 | 0,010 |
| | | 12,286 | 0,00032 | 10,75 | 0,0024 | 9,556 | 0,0060 |
| | | 14,000 | 0,000021 | 12,00 | 0,0011 | 10,667 | 0,0035 |
| | | | | 12,25 | 0,00086 | 10,889 | 0,0029 |
| | | | | 13,00 | 0,00026 | 11,556 | 0,0013 |
| | | | | 14,25 | 0,000061 | 12,667 | 0,00066 |
| | | | | 16,00 | 0,0000036 | 13,556 | 0,00035 |
| | | | | | | 14,000 | 0,00020 |
| | | | | | | 14,222 | 0,000097 |
| | | | | | | 14,889 | 0,0000054 |
| | | | | | | 16,222 | 0,000011 |
| | | | | | | 18,000 | 0,0000006 |

*Таблица 7-Б*

Критические значения критерия $\chi_r^2$ Фридмана
для количества условий c=4, $2 \le n \le 4$

Различия между условиями можно считать достоверными на указанном в таблице уровне значимости, если $\chi^2_{r\ эмп}$ достигает соответствующего критического значения или превышает его (по Greene J., D'Olivera M., 1989).

| n=2 | | n=3 | | n=4 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ |
| 0,0 | 1,000 | 0,0 | 1,000 | 0,0 | 1,000 | 5,7 | 0,141 |
| 0,6 | 0,958 | 0,0 | 0,958 | 0,3 | 0,992 | 6,0 | 0,105 |
| 1,2 | 0,834 | 1,0 | 0,910 | 0,6 | 0,928 | 6,3 | 0,094 |
| 1,8 | 0,792 | 1,8 | 0,727 | 0,9 | 0,900 | 6,6 | 0,077 |
| 2,4 | 0,625 | 2,2 | 0,608 | 1,2 | 0,800 | 6,9 | 0,068 |
| 3,0 | 0,542 | 2,6 | 0,524 | 1,5 | 0,754 | 7,2 | 0,054 |
| 3,6 | 0,458 | 3,4 | 0,446 | 1,8 | 0,677 | 7,5 | 0,052 |
| 4,2 | 0,375 | 3,8 | 0,342 | 2,1 | 0,649 | 7,8 | 0,036 |
| 4,8 | 0,208 | 4,2 | 0,300 | 2,4 | 0,524 | 8,1 | 0,033 |
| 5,4 | 0,167 | 5,0 | 0,207 | 2,7 | 0,508 | 8,4 | 0,019 |
| n=2 | | n=3 | | n=4 | | | |
| $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ |
| 6,0 | 0,042 | 5,4 | 0,175 | 3,0 | 0,432 | 8,7 | 0,014 |
| | | 5,8 | 0,148 | 3,3 | 0,389 | 9,3 | 0,012 |
| | | 6,6 | 0,075 | 3,6 | 0,355 | 9,6 | 0,0069 |
| | | 7,0 | 0,054 | 3,9 | 0,234 | 9,9 | 0,0062 |
| | | 7,4 | 0,033 | 4,5 | 0,242 | 10,2 | 0,0027 |
| | | 8,2 | 0,017 | 4,8 | 0,200 | 10,8 | 0,0016 |
| | | 9,0 | 0,0017 | 5,1 | 0,190 | 11,1 | 0,00094 |
| | | | | 5,4 | 0,158 | 12,0 | 0,000072 |

*Таблица 8*

Критические значения критерия тенденций L Пейджа для количества условий от трех до шести ($3 \le c \le 6$) и количества испытуемых от двух до двенадцати ($2 \le n \le 12$)

Тенденция является достоверной, если $L_{эмп}$ достигает или превышает $L_{0,01}$ (по Greene J., D'Olivera M., 1989).

| n | c (количество условий) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 5 | 6 | $p$ |
| 2 | - | - | 109 | 178 | 0,001 |
| | - | -60 | 106 | 173 | 0,01 |
| | 28 | 58 | 103 | 166 | 0,05 |
| 3 | - | 89 | 160 | 260 | 0,001 |
| | 42 | 87 | 155 | 252 | 0,01 |
| | 41 | 84 | 150 | 244 | 0,05 |
| 4 | 56 | 117 | 210 | 341 | 0,001 |
| | 55 | 114 | 204 | 331 | 0,01 |
| | 54 | 111 | 197 | 321 | 0,05 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 70 | 145 | 259 | 420 | 0,001 |
| | 68 | 141 | 251 | 409 | 0.01 |
| | 66 | 137 | 244 | 397 | 0,05 |
| 6 | 83 | 172 | 307 | 499 | 0,001 |
| | 81 | 167 | 299 | 486 | 0,01 |
| | 79 | 163 | 291 | 474 | 0,05 |
| 7 | 96 | 198 | 355 | 577 | 0,001 |
| | 93 | 193 | 346 | 563 | 0,01 |
| | 91 | 189 | 338 | 550 | 0,05 |
| 8 | 109 | 225 | 403 | 655 | 0,001 |
| | 106 | 220 | 393 | 640 | 0,01 |
| | 104 | 214 | 384 | 625 | 0,05 |
| n | c (количество условий) | | | | |
| | 3 | 4 | 5 | 6 | *p* |
| 9 | 121 | 252 | 451 | 733 | 0,001 |
| | 119 | 246 | 441 | 717 | 0,01 |
| | 116 | 240 | 431 | 701 | 0,05 |
| 10 | 134 | 278 | 499 | 811 | 0,001 |
| | 131 | 272 | 487 | 793 | 0,01 |
| | 128 | 266 | 477 | 777 | 0,05 |
| 11 | 147 | 305 | 546 | 888 | 0,001 |
| | 144 | 298 | 534 | 869 | 0,01 |
| | 141 | 292 | 523 | 852 | 0,05 |
| 12 | 160 | 331 | 593 | 965 | 0,001 |
| | 156 | 324 | 581 | 946 | 0,01 |
| | 153 | 317 | 570 | 928 | 0,05 |

*Таблица 9*

Критические значения критерия $\chi^2$ для уровней статистической значимости $p \le 0{,}05$ и $p \le 0{,}01$ при разном числе степеней свободы $\nu$

Различия между двумя распределениями могут считаться достоверными, если $\chi^2_{эмп}$ достигает или превышает $\chi^2_{o,05}$ и тем более достоверными, если $\chi^2_{эмп}$ достигает или превышает $\chi^2_{0,01}$ (по Большеву Л.Н., Смирнову Н.В.).

| | *p* | |
|---|---|---|
| $\nu$ | 0,05 | 0,01 |
| 1 | 3,841 | 6,635 |
| 2 | 5,991 | 9,210 |
| 3 | 7,815 | 11,375 |
| 4 | 9,488 | 13,277 |
| 5 | 11,070 | 15,086 |
| 6 | 12,592 | 16,812 |
| 7 | 14,067 | 18,475 |
| 8 | 15,507 | 20,090 |
| 9 | 16,919 | 21,666 |
| 10 | 18,307 | 23,209 |
| 11 | 19,675 | 24,725 |
| 12 | 21,026 | 26,217 |
| 13 | 22,362 | 27,688 |
| 14 | 23,685 | 29,141 |
| 15 | 24,996 | 30,578 |
| 16 | 26,296 | 32,000 |
| | *p* | |

| | *p* | |
|---|---|---|
| $\nu$ | 0,05 | 0,01 |
| 35 | 49,802 | 57,342 |
| 36 | 50,998 | 58,619 |
| 37 | 52,192 | 59,892 |
| 38 | 53,384 | 61,162 |
| 39 | 54,572 | 62,428 |
| 40 | 55,758 | 63,691 |
| 41 | 56,942 | 64,950 |
| 42 | 58,124 | 66,206 |
| 43 | 59,304 | 67,459 |
| 44 | 60,481 | 68,709 |
| 45 | 61,656 | 69,957 |
| 46 | 62,830 | 71,201 |
| 47 | 64,001 | 72,443 |
| 48 | 65,171 | 73,683 |
| 49 | 66,339 | 74,919 |
| 50 | 67,505 | 76,154 |
| | *p* | |

| | *p* | |
|---|---|---|
| $\nu$ | 0,05 | 0,01 |
| 69 | 89,391 | 99,227 |
| 70 | 90,631 | 100,425 |
| 71 | 91,670 | 101,621 |
| 72 | 92,808 | 102,816 |
| 73 | 93,945 | 104,010 |
| 74 | 95,081 | 105,202 |
| 75 | 96,217 | 106,393 |
| 76 | 97,351 | 107,582 |
| 77 | 98,484 | 108,771 |
| 78 | 99,617 | 109,958 |
| 79 | 100,749 | 111,144 |
| 80 | 101,879 | 112,329 |
| 81 | 103,010 | 113,512 |
| 82 | 104,139 | 114,695 |
| 83 | 105,267 | 1158,876 |
| 84 | 106,395 | 117,057 |
| | *p* | |

| $\nu$ | 0,05 | 0,01 |
|---|---|---|
| 17 | 27,587 | 33,409 |
| 18 | 28,869 | 34,805 |
| 19 | 30,144 | 36,191 |
| 20 | 31,410 | 37,566 |
| 21 | 32,671 | 38,932 |
| 22 | 33,924 | 40,289 |
| 23 | 35,172 | 41,638 |
| 24 | 36,415 | 42,980 |
| 25 | 37,652 | 44,314 |
| 26 | 38,885 | 45,642 |
| 27 | 40,113 | 46,963 |
| 28 | 41,337 | 48,278 |
| 29 | 42,557 | 49,588 |
| 30 | 43,773 | 50,892 |
| 31 | 44,985 | 52,191 |
| 32 | 46,191 | 53,486 |
| 33 | 47,400 | 54,776 |
| 34 | 48,602 | 56,061 |
| 51 | 68,669 | 77,386 |
| 52 | 69,832 | 78,616 |
| 53 | 70,993 | 79,843 |
| 54 | 72,153 | 81,069 |
| 55 | 73,311 | 82,292 |
| 56 | 74,468 | 83,513 |
| 57 | 75,624 | 84,733 |
| 58 | 76,778 | 85,950 |
| 59 | 77,931 | 87,166 |
| 60 | 79,082 | 88,379 |
| 61 | 80,232 | 89,591 |
| 62 | 81,381 | 90,802 |
| 63 | 82,529 | 92,010 |
| 64 | 83,675 | 93,217 |
| 65 | 84,821 | 94,422 |
| 66 | 85,965 | 95,626 |
| 67 | 87,108 | 96,828 |
| 68 | 88,250 | 98,028 |
| 85 | 107,522 | 118,236 |
| 86 | 108,648 | 119,414 |
| 87 | 109,773 | 120,591 |
| 88 | 110,898 | 121,767 |
| 89 | 112,022 | 122,942 |
| 90 | 113,145 | 124,116 |
| 91 | 114,268 | 125,289 |
| 92 | 115,390 | 126,462 |
| 93 | 116,511 | 127,633 |
| 94 | 117,632 | 128,803 |
| 95 | 118,752 | 129,973 |
| 96 | 119,871 | 131,141 |
| 97 | 120,990 | 132,309 |
| 98 | 122,108 | 133,476 |
| 99 | 123,225 | 134,642 |
| 100 | 124,342 | 135,807 |

*Таблица 10*

Критические значения $d_{max}$ , соответствующие уровням статистической значимости $\rho \leq 0{,}05$ и $\rho \leq 0{,}01$ при сопоставлении эмпирического распределения с теоретическим.

Различия между распределениями могут считаться достоверными, если абсолютная величина максимальной разности $d_{эмп}$ достигает или превышает $d_{0,05}$, и тем более достоверными, если $d_{эмп}$ достигает или превышает $d_{0,01}$ (по Ван дер Вардену Б.Л., 1960).

| *n* | Максимальный модуль разности накопленных частостей $d_{max}$ | |
|---|---|---|
| | *p*=0,05 | *p*=0,01 |
| 5 | 0,6074 | 0,7279 |
| 10 | 0,4295 | 0,5147 |
| 15 | 0,3507 | 0,4202 |
| 20 | 0,3037 | 0,3639 |
| 25 | 0,2716 | 0,3255 |
| 30 | 0,2480 | 0,2972 |
| 40 | 0,2147 | 0,2574 |

| *n* | Максимальный модуль разности накопленных частостей $d_{max}$ | |
|---|---|---|
| | *p*=0,05 | *p*=0,01 |
| 50 | 0,1921 | 0,2302 |
| 60 | 0,1753 | 0,2101 |
| 70 | 0,1623 | 0,1945 |
| 80 | 0,1518 | 0,1820 |
| 90 | 0,1432 | |
| 100 | 0,1358 | |
| >100 | $1{,}36/\sqrt{n}$ | $1{,}63/\sqrt{n}$ |

*Таблица 11*

Критерий $\lambda$ Колмогорова-Смирнова для сопоставления эмпирического распределения с теоретическим (при $n$>50) или двух эмпирических распределений между собой (при $n$>50): уровни статистической значимости разных значений $\lambda_{эмп}$

По полученному значению $\lambda_{эмп}$ определяется уровень значимости различий между двумя распределениями (по Митропольскому А.К., 1971).

| $\lambda$ | $\lambda$ последний десятичный знак | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | $p$ – десятичные знаки («0» опущен) | | | | | | | | | |
| 0,3 | 99999 | 99998 | 99995 | 99991 | 99983 | 99970 | 99949 | 99917 | 99872 | 99807 |
| 0,4 | 99719 | 99603 | 99452 | 99262 | 99027 | 98741 | 98400 | 97998 | 97532 | 96998 |
| 0,5 | 96394 | 95719 | 94969 | 94147 | 93250 | 92282 | 91242 | 90134 | 88960 | 87724 |
| 0,6 | 86428 | 85077 | 83678 | 82225 | 80732 | 79201 | 77636 | 76042 | 74422 | 72781 |
| 0,7 | 71124 | 69453 | 67774 | 66089 | 64402 | 62717 | 61036 | 59363 | 57700 | 56050 |
| 0,8 | 54414 | 52796 | 51197 | 49619 | 48063 | 46532 | 45026 | 43545 | 42093 | 40668 |
| 0,9 | 39273 | 37907 | 36571 | 35266 | 33992 | 32748 | 31536 | 30356 | 29206 | 28087 |
| 1,0 | 27000 | 25943 | 24917 | 23922 | 22957 | 22021 | 211114 | 20236 | 19387 | 18566 |
| 1,1 | 17772 | 17005 | 16264 | 15550 | 14861 | 14196 | 13556 | 12939 | 12345 | 11774 |
| 1,2 | 11225 | 10697 | 10190 | 09703 | 09235 | 08787 | 08357 | 07944 | 07550 | 07171 |
| 1,3 | 06809 | 06463 | 06132 | 05815 | 05513 | 05224 | 04949 | 04686 | 04435 | 04196 |
| 1,4 | 03968 | 03751 | 03545 | 03348 | 03162 | 02984 | 02815 | 02655 | 02503 | 02359 |
| 1,5 | 02222 | 02092 | 01969 | 01852 | 01742 | 01638 | 01539 | 01446 | 01357 | 01274 |
| 1,6 | 01195 | 01121 | 01051 | 00985 | 00922 | 00864 | 00808 | 00756 | 00707 | 00661 |
| 1,7 | 00618 | 00577 | 00539 | 00503 | 00469 | 00438 | 00408 | 00380 | 00354 | 00330 |
| 1,8 | 00307 | 00285 | 00265 | 00247 | 00229 | 00213 | 00198 | 00186 | 00170 | 00158 |

| $\lambda$ | $\lambda$ последний десятичный знак | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | *p* – десятичные знаки («0» опущен) | | | | | | | | | |
| 1,9 | 00146 | 00136 | 00126 | 00116 | 00108 | 00100 | 00092 | 00085 | 00079 | 00073 |
| 2,0 | 00067 | 00062 | 00057 | 00053 | 00048 | 00045 | 00041 | 00038 | 00035 | 00032 |
| 2,1 | 00030 | 00027 | 00025 | 00023 | 00021 | 00019 | 00018 | 00016 | 00015 | 00014 |
| 2,2 | 00013 | 00011 | 00010 | 00010 | 00009 | 00008 | 00007 | 00007 | 00006 | 00006 |
| 2,3 | 00005 | 00005 | 00004 | 00004 | 00004 | 00003 | 00003 | 00003 | 00002 | 00002 |
| 2,4 | 00002 | 00002 | 00002 | 00001 | 00001 | 00001 | 00001 | 00001 | 00001 | 00001 |

*Таблица 12*

Величины угла $\varphi$ (в радианах) для разных процентных долей:
$\varphi = 2 \arcsin \sqrt{P}$ (по Урбаху В.Ю., 1964)

| % доля | %, последний десятичный знак | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | Значения $\varphi = 2\arcsin\sqrt{P}$ | | | | | | | | | |
| 0.0 | 0,000 | 0,020 | 0,028 | 0,035 | 0,040 | 0,045 | 0,049 | 0,053 | 0,057 | 0,060 |
| 0.1 | 0,063 | 0,066 | 0,069 | 0,072 | 0,075 | 0,077 | 0,080 | 0,082 | 0,085 | 0,087 |
| 0.2 | 0,089 | 0,092 | 0,094 | 0,096 | 0,098 | 0,100 | 0,102 | 0,104 | 0,106 | 0,108 |
| 0.3 | 0,110 | 0,111 | 0,113 | 0,115 | 0,117 | 0,118 | 0,120 | 0,122 | 0,123 | 0,125 |
| 0.4 | 0,127 | 0,128 | 0,130 | 0,131 | 0,133 | 0,134 | 0,136 | 0,137 | 0,139 | 0,140 |
| 0.5 | 0,142 | 0,143 | 0,144 | 0,146 | 0,147 | 0,148 | 0,150 | 0,151 | 0,153 | 0,154 |
| 0.6 | 0,155 | 0,156 | 0,158 | 0,159 | 0,160 | 0,161 | 0,163 | 0,164 | 0,165 | 0,166 |
| 0.7 | 0,168 | 0,169 | 0,170 | 0,171 | 0,172 | 0,173 | 0,175 | 0,176 | 0,177 | 0,178 |
| 0.8 | 0,179 | 0,180 | 0,182 | 0,183 | 0,184 | 0,185 | 0,186 | 0,187 | 0,188 | 0,189 |
| 0.9 | 0,190 | 0,191 | 0,192 | 0,193 | 0,194 | 0,195 | 0,196 | 0,197 | 0,198 | 0,199 |
| % доля | %, последний десятичный знак | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | Значения $\varphi = 2\arcsin\sqrt{P}$ | | | | | | | | | |
| 1 | 0,200 | 0,210 | 0,220 | 0,229 | 0,237 | 0,246 | 0,254 | 0,262 | 0,269 | 0,277 |
| 2 | 0,284 | 0,291 | 0,298 | 0,304 | 0,311 | 0,318 | 0,324 | 0,330 | 0,336 | 0,342 |
| 3 | 0,348 | 0,354 | 0,360 | 0,365 | 0,371 | 0,376 | 0,382 | 0,387 | 0,392 | 0,398 |
| 4 | 0,403 | 0,408 | 0,413 | 0,418 | 0,423 | 0,428 | 0,432 | 0,437 | 0,442 | 0,446 |
| 5 | 0,451 | 0,456 | 0,460 | 0,465 | 0,469 | 0,473 | 0,478 | 0,482 | 0,486 | 0,491 |
| 6 | 0,495 | 0,499 | 0,503 | 0,507 | 0,512 | 0,516 | 0,520 | 0,524 | 0,528 | 0,535 |
| 7 | 0,536 | 0,539 | 0,543 | 0,547 | 0,551 | 0,555 | 0,559 | 0,562 | 0,566 | 0,570 |
| 8 | 0,547 | 0,577 | 0,581 | 0,584 | 0,588 | 0,592 | 0,595 | 0,599 | 0,602 | 0,606 |
| 9 | 0,609 | 0,613 | 0,616 | 0,620 | 0,623 | 0,627 | 0,630 | 0,633 | 0,637 | 0,640 |
| 10 | 0,644 | 0,647 | 0,650 | 0,653 | 0,657 | 0,660 | 0,663 | 0,666 | 0,670 | 0,673 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 0,676 | 0,679 | 0,682 | 0,686 | 0,689 | 0,692 | 0,695 | 0,698 | 0,701 | 0,704 |
| 12 | 0,707 | 0,711 | 0,714 | 0,717 | 0,720 | 0,723 | 0,726 | 0,729 | 0,732 | 0,735 |
| 13 | 0,738 | 0,741 | 0,744 | 0,747 | 0,750 | 0,752 | 0,755 | 0,758 | 0,761 | 0,764 |
| 14 | 0,767 | 0,770 | 0,773 | 0,776 | 0,778 | 0,781 | 0,784 | 0,787 | 0,790 | 0,793 |
| 15 | 0,795 | 0,798 | 0,801 | 0,804 | 0,807 | 0,809 | 0,812 | 0,815 | 0,818 | 0,820 |
| 16 | 0,823 | 0,826 | 0,828 | 0,831 | 0,834 | 0,837 | 0,839 | 0,842 | 0,845 | 0,847 |
| 17 | 0,850 | 0,853 | 0,855 | 0,858 | 0,861 | 0,863 | 0,866 | 0,868 | 0,871 | 0,874 |
| 18 | 0,876 | 0,879 | 0,881 | 0,884 | 0,887 | 0,889 | 0,892 | 0,894 | 0,897 | 0,900 |
| 19 | 0,902 | 0,905 | 0,907 | 0,910 | 0,912 | 0,915 | 0,917 | 0,920 | 0,922 | 0,925 |
| 20 | 0,927 | 0,930 | 0,932 | 0,935 | 0,937 | 0,940 | 0,942 | 0,945 | 0,947 | 0,950 |

| % доля | %, последний десятичный знак | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | Значения $\varphi = 2\arcsin\sqrt{P}$ | | | | | | | | | |
| 21 | 0,925 | 0,955 | 0,957 | 0,959 | 0,962 | 0,964 | 0,967 | 0,969 | 0,972 | 0,974 |
| 22 | 0,976 | 0,979 | 0,981 | 0,984 | 0,986 | 0,988 | 0,991 | 0,993 | 0,996 | 0,998 |
| 23 | 1,000 | 1,003 | 1,005 | 1,007 | 1,010 | 1,012 | 1,015 | 1,017 | 1,019 | 1,022 |
| 24 | 1,024 | 1,026 | 1,029 | 1,031 | 1,033 | 1,036 | 1,038 | 1,040 | 1,043 | 1,045 |
| 25 | 1,047 | 1,050 | 1,052 | 1,054 | 1,056 | 1,059 | 1,061 | 1,063 | 1,066 | 1,068 |
| 26 | 1,070 | 1,072 | 1,075 | 1,077 | 1,079 | 1,042 | 1,084 | 1,086 | 1,088 | 1,091 |
| 27 | 1,093 | 1,095 | 1,097 | 1,100 | 1,102 | 1,104 | 1,106 | 1,109 | 1,111 | 1,113 |
| 28 | 1,115 | 1,117 | 1,120 | 1,122 | 1,124 | 1,126 | 1,129 | 1,131 | 1,133 | 1,135 |
| 29 | 1,137 | 1,140 | 1,142 | 1,144 | 1,146 | 1,148 | 1,151 | 1,153 | 1,155 | 1,157 |
| 30 | 1,159 | 1,161 | 1,164 | 1,166 | 1,168 | 1,170 | 1,172 | 1,174 | 1,177 | 1,179 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 1,182 | 1,183 | 1,185 | 1,187 | 1,190 | 1,192 | 1,194 | 1,196 | 1,198 | 1,200 |
| 32 | 1,203 | 1,205 | 1,207 | 1,209 | 1,211 | 1,213 | 1,215 | 1,217 | 1,220 | 1,222 |
| 33 | 1,224 | 1,226 | 1,228 | 1,230 | 1,232 | 1,234 | 1,237 | 1,239 | 1,241 | 1,243 |
| 34 | 1,245 | 1,247 | 1,249 | 1,251 | 1,254 | 1,256 | 1,258 | 1,260 | 1,262 | 1,264 |
| 35 | 1,266 | 1,268 | 1,270 | 1,272 | 1,274 | 1,277 | 1,279 | 1,281 | 1,283 | 1,285 |
| 36 | 1,287 | 1,289 | 1,291 | 1,293 | 1,295 | 1,297 | 1,299 | 1,302 | 1,304 | 1,306 |
| 37 | 1,308 | 1,310 | 1,312 | 1,314 | 1,316 | 1,318 | 1,320 | 1,322 | 1,324 | 1,326 |
| 38 | 1,328 | 1,330 | 1,333 | 1,335 | 1,337 | 1,339 | 1,341 | 1,343 | 1,345 | 1,347 |
| 39 | 1,349 | 1,351 | 1,353 | 1,355 | 1,357 | 1,359 | 1,361 | 1,363 | 1,365 | 1,367 |
| 40 | 1,369 | 1,371 | 1,374 | 1,376 | 1,378 | 1,380 | 1,382 | 1,384 | 1,386 | 1,388 |
| % доля | %, последний десятичный знак | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | Значения $\varphi = 2\arcsin\sqrt{P}$ | | | | | | | | | |
| 41 | 1,390 | 1,392 | 1,394 | 1,396 | 1,398 | 1,400 | 1,402 | 1,404 | 1,406 | 1,408 |
| 42 | 1,410 | 1,412 | 1,414 | 1,416 | 1,418 | 1,420 | 1,422 | 1,424 | 1,426 | 1,428 |
| 43 | 1,430 | 1,432 | 1,434 | 1,436 | 1,438 | 1,440 | 1,442 | 1,444 | 1,446 | 1,448 |
| 44 | 1,451 | 1,453 | 1,455 | 1,457 | 1,459 | 1,461 | 1,463 | 1,465 | 1,467 | 1,469 |
| 45 | 1,471 | 1,473 | 1,475 | 1,477 | 1,479 | 1,481 | 1,483 | 1,485 | 1,487 | 1,489 |
| 46 | 1,491 | 1,493 | 1,495 | 1,497 | 1,499 | 1,501 | 1,503 | 1,505 | 1,507 | 1,509 |
| 47 | 1,511 | 1,513 | 1,515 | 1,517 | 1,519 | 1,521 | 1,523 | 1,525 | 1,527 | 1,529 |
| 48 | 1,531 | 1,533 | 1,535 | 1,537 | 1,539 | 1,541 | 1,543 | 1,545 | 1,547 | 1,549 |
| 49 | 1,551 | 1,553 | 1,555 | 1,557 | 1,559 | 1,561 | 1,563 | 1,565 | 1,567 | 1,569 |
| 50 | 1,571 | 1,573 | 1,575 | 1,577 | 1,579 | 1,581 | 1,583 | 1,585 | 1,587 | 1,589 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 1,591 | 1,593 | 1,595 | 1,597 | 1,599 | 1,601 | 1,603 | 1,605 | 1,607 | 1,609 |
| 52 | 1,611 | 1,613 | 1,615 | 1,617 | 1,619 | 1,621 | 1,623 | 1,625 | 1,627 | 1,629 |
| 53 | 1,631 | 1,633 | 1,635 | 1,637 | 1,639 | 1,641 | 1,643 | 1,645 | 1,647 | 1,649 |
| 54 | 1,651 | 1,653 | 1,655 | 1,657 | 1,659 | 1,661 | 1,663 | 1,665 | 1,667 | 1,669 |
| 55 | 1,671 | 1,673 | 1,675 | 1,677 | 1,697 | 1,681 | 1,683 | 1,685 | 1,687 | 1,689 |
| 56 | 1,691 | 1,693 | 1,695 | 1,697 | 1,699 | 1,701 | 1,703 | 1,705 | 1,707 | 1,709 |
| 57 | 1,711 | 1,713 | 1,715 | 1,717 | 1,719 | 1,721 | 1,723 | 1,725 | 1,727 | 1,729 |
| 58 | 1,731 | 1,734 | 1,736 | 1,738 | 1,740 | 1,742 | 1,744 | 1,746 | 1,748 | 1,750 |
| 59 | 1,752 | 1,754 | 1,756 | 1,758 | 1,760 | 1,762 | 1,764 | 1,766 | 1,768 | 1,770 |
| 60 | 1,772 | 1,774 | 1,776 | 1,778 | 1,780 | 1,782 | 1,784 | 1,786 | 1,789 | 1,791 |

| % доля | %, последний десятичный знак | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | Значения $\varphi = 2\arcsin\sqrt{P}$ | | | | | | | | | |
| 51 | 1,591 | 1,593 | 1,595 | 1,597 | 1,599 | 1,601 | 1,603 | 1,605 | 1,607 | 1,609 |
| 52 | 1,611 | 1,613 | 1,615 | 1,617 | 1,619 | 1,621 | 1,623 | 1,625 | 1,627 | 1,629 |
| 53 | 1,631 | 1,633 | 1,635 | 1,637 | 1,639 | 1,641 | 1,643 | 1,645 | 1,647 | 1,649 |
| 54 | 1,651 | 1,653 | 1,655 | 1,657 | 1,659 | 1,661 | 1,663 | 1,665 | 1,667 | 1,669 |
| 55 | 1,671 | 1,673 | 1,675 | 1,677 | 1,697 | 1,681 | 1,683 | 1,685 | 1,687 | 1,689 |
| 56 | 1,691 | 1,693 | 1,695 | 1,697 | 1,699 | 1,701 | 1,703 | 1,705 | 1,707 | 1,709 |
| 57 | 1,711 | 1,713 | 1,715 | 1,717 | 1,719 | 1,721 | 1,723 | 1,725 | 1,727 | 1,729 |
| 58 | 1,731 | 1,734 | 1,736 | 1,738 | 1,740 | 1,742 | 1,744 | 1,746 | 1,748 | 1,750 |
| 59 | 1,752 | 1,754 | 1,756 | 1,758 | 1,760 | 1,762 | 1,764 | 1,766 | 1,768 | 1,770 |
| 60 | 1,772 | 1,774 | 1,776 | 1,778 | 1,780 | 1,782 | 1,784 | 1,786 | 1,789 | 1,791 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 61 | 1,793 | 1,795 | 1,797 | 1,799 | 1,801 | 1,803 | 1,805 | 1,807 | 1,809 | 1,811 |
| 62 | 1,813 | 1,815 | 1,817 | 1,819 | 1,821 | 1,823 | 1,826 | 1,828 | 1,830 | 1,832 |
| 63 | 1,834 | 1,836 | 1,838 | 1,840 | 1,842 | 1,844 | 1,846 | 1,848 | 1,850 | 1,853 |
| 64 | 1,855 | 1,857 | 1,859 | 1,861 | 1,863 | 1,865 | 1,867 | 1,869 | 1,871 | 1,873 |
| 65 | 1,875 | 1,878 | 1,880 | 1,882 | 1,884 | 1,886 | 1,888 | 1,890 | 1,892 | 1,894 |
| 66 | 1,897 | 1,899 | 1,901 | 1,903 | 1,905 | 1,907 | 1,909 | 1,911 | 1,913 | 1,916 |
| 67 | 1,918 | 1,920 | 1,922 | 1,924 | 1,926 | 1,928 | 1,930 | 1,933 | 1,935 | 1,937 |
| 68 | 1,939 | 1,941 | 1,943 | 1,946 | 1,948 | 1,950 | 1,952 | 1,954 | 1,956 | 1,958 |
| 69 | 1,961 | 1,963 | 1,965 | 1,967 | 1,969 | 1,971 | 1,974 | 1,976 | 1,978 | 1,980 |
| 70 | 1,982 | 1,984 | 1,987 | 1,989 | 1,991 | 1,993 | 1,995 | 1,998 | 2,000 | 2,002 |
| % доля | %, последний десятичный знак | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | Значения $\varphi = 2\arcsin\sqrt{P}$ | | | | | | | | | |
| 71 | 2,004 | 2,006 | 2,009 | 2,011 | 2,013 | 2,015 | 2,018 | 2,020 | 2,022 | 2,024 |
| 72 | 2,026 | 2,029 | 2,031 | 2,033 | 2,035 | 2,038 | 2,040 | 2,042 | 2,044 | 2,047 |
| 73 | 2,049 | 2,051 | 2,053 | 2,056 | 2,058 | 2,060 | 2,062 | 2,065 | 2,067 | 2,069 |
| 74 | 2,071 | 2,074 | 2,076 | 2,078 | 2,081 | 2,083 | 2,085 | 2,087 | 2,090 | 2,092 |
| 75 | 2,094 | 2,097 | 2,099 | 2,101 | 2,104 | 2,106 | 2,108 | 2,111 | 2,113 | 2,115 |
| 76 | 2,118 | 2,120 | 2,122 | 2,125 | 2,127 | 2,129 | 2,132 | 2,134 | 2,136 | 2,139 |
| 77 | 2,141 | 2,144 | 2,146 | 2,148 | 2,151 | 2,153 | 2,156 | 2,158 | 2,160 | 2,163 |
| 78 | 2,165 | 2,168 | 2,170 | 2,172 | 2,175 | 2,177 | 2,180 | 2,182 | 2,185 | 2,187 |
| 79 | 2,190 | 2,192 | 2,194 | 2,197 | 2,199 | 2,202 | 2,204 | 2,207 | 2,209 | 2,212 |
| 80 | 2,241 | 2,217 | 2,219 | 2,222 | 2,224 | 2,227 | 2,229 | 2,231 | 2,234 | 2,237 |

| % доля | %, последний десятичный знак | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | Значения $\varphi = 2\arcsin\sqrt{P}$ | | | | | | | | | |
| 81 | 2,240 | 2,242 | 2,245 | 2,247 | 2,250 | 2,252 | 2,255 | 2,258 | 2,260 | 2,263 |
| 82 | 2,265 | 2,268 | 2,271 | 2,273 | 2,276 | 2,278 | 2,281 | 2,284 | 2,286 | 2,289 |
| 83 | 2,292 | 2,294 | 2,297 | 2,300 | 2,302 | 2,305 | 2,308 | 2,310 | 2,313 | 2,316 |
| 84 | 2,319 | 2,321 | 2,324 | 2,327 | 2,330 | 2,332 | 2,335 | 2,338 | 2,341 | 2,343 |
| 85 | 2,346 | 2,349 | 2,352 | 2,355 | 2,357 | 2,360 | 2,363 | 2,366 | 2,369 | 2,372 |
| 86 | 2,375 | 2,377 | 2,380 | 2,383 | 2,386 | 2,389 | 2,392 | 2,395 | 2,398 | 2,401 |
| 87 | 2,404 | 2,407 | 2,410 | 2,413 | 2,416 | 2,419 | 2,422 | 2,425 | 2,428 | 2,431 |
| 88 | 2,434 | 2,437 | 2,440 | 2,443 | 2,447 | 2,450 | 2,453 | 2,456 | 2,459 | 2,462 |
| 89 | 2,465 | 2,469 | 2,472 | 2,475 | 2,478 | 2,482 | 2,485 | 2,488 | 2,491 | 2,495 |
| 90 | 2,498 | 2,501 | 2,505 | 2,508 | 2,512 | 2,515 | 2,518 | 2,522 | 2,525 | 2,529 |
| 91 | 2,532 | 2,536 | 2,539 | 2,543 | 2,546 | 2,550 | 2,554 | 2,557 | 2,561 | 2,564 |
| 92 | 2,568 | 2,572 | 2,575 | 2,579 | 2,583 | 2,587 | 2,591 | 2,549 | 2,598 | 2,602 |
| 93 | 2,606 | 2,610 | 2,614 | 2,618 | 2,622 | 2,626 | 2,630 | 2,634 | 2,638 | 2,642 |
| 94 | 2,647 | 2,651 | 2,655 | 2,659 | 2,664 | 2,668 | 2,673 | 2,677 | 2,681 | 2,686 |
| 95 | 2,691 | 2,295 | 2,700 | 2,705 | 2,709 | 2,714 | 2,719 | 2,724 | 2,729 | 2,734 |
| 96 | 2,739 | 2,744 | 2,749 | 2,754 | 2,760 | 2,765 | 2,771 | 2,776 | 2,782 | 2,788 |
| 97 | 2,793 | 2,799 | 2,805 | 2,811 | 2,818 | 2,824 | 2,830 | 2,837 | 2,844 | 2,851 |
| 98 | 2,858 | 2,865 | 2,872 | 2,880 | 2,888 | 2,896 | 2,904 | 2,913 | 2,922 | 2,931 |
| 99,0 | 2,941 | 2,942 | 2,943 | 2,944 | 2,945 | 2,946 | 2,948 | 2,949 | 2,950 | 2,951 |
| % доля | %, последний десятичный знак | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | Значения $\varphi = 2\arcsin\sqrt{P}$ | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 99,1 | 2,952 | 2,953 | 2,954 | 2,955 | 2,956 | 2,957 | 2,958 | 2,959 | 2,960 | 2,961 |
| 99,2 | 2,963 | 2,964 | 2,965 | 2,966 | 2,967 | 2,968 | 2,969 | 2,971 | 2,972 | 2,973 |
| 99,3 | 2,974 | 2,975 | 2,976 | 2,978 | 2,979 | 2,980 | 2,981 | 2,983 | 2,984 | 2,985 |
| 99,4 | 2,987 | 2,988 | 2,989 | 2,990 | 2,992 | 2,993 | 2,995 | 2,996 | 2,997 | 2,999 |
| 99,5 | 3,000 | 3,002 | 3,003 | 3,004 | 3,006 | 3,007 | 3,009 | 3,010 | 3,012 | 3,013 |
| 99,6 | 3,015 | 3,017 | 3,018 | 3,020 | 3,022 | 3,023 | 3,025 | 3,027 | 3,028 | 3,030 |
| 99,7 | 3,032 | 3,034 | 3,036 | 3,038 | 3,040 | 3,041 | 3,044 | 3,046 | 3,048 | 3,050 |
| 99,8 | 3,052 | 3,054 | 3,057 | 3,059 | 3,062 | 3,064 | 3,067 | 3,069 | 3,072 | 3,075 |
| 99,9 | 3,078 | 3,082 | 3,085 | 3,089 | 3,093 | 3,097 | 3,101 | 3,107 | 3,113 | 3,122 |
| 100 | 3,142 | | | | | | | | | |

*Таблица 13*

Уровни статистической значимости разных значений
критерия $\varphi^*$ Фишера (по Гублеру Е.В., 1978)

По полученному значению $\varphi^*_{эмп}$ определяется уровень значимости различий процентных долей.

| *P* равно или меньше | *P* равно или меньше (последний десятичный знак) | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,00 | 2,91 | 2,81 | 2,70 | 2,62 | 2,55 | 2,49 | 2,44 | 2,39 | 2,35 | |
| 0,01 | 2,31 | 2,28 | 2,25 | 2,22 | 2,19 | 2,16 | 2,14 | 2,11 | 2,09 | 2,07 |
| 0,02 | 2,05 | 2,03 | 2,01 | 1,99 | 1,97 | 1,96 | 1,94 | 1,92 | 1,91 | 1,89 |
| 0,03 | 1,88 | 1,86 | 1,85 | 1,84 | 1,82 | 1,81 | 1,80 | 1,79 | 1,77 | 1,76 |
| 0,04 | 1,75 | 1,74 | 1,73 | 1,72 | 1,71 | 1,70 | 1,68 | 1,67 | 1,66 | 1,65 |
| 0,05 | 1,64 | 1,64 | 1,63 | 1,62 | 1,61 | 1,60 | 1,59 | 1,58 | 1,57 | 1,56 |
| 0,06 | 1,56 | 1,55 | 1,54 | 1,53 | 1,52 | 1,52 | 1,51 | 1,50 | 1,49 | 1,48 |
| 0,07 | 1,48 | 1,47 | 1,46 | 1,46 | 1,45 | 1,44 | 1,43 | 1,43 | 1,42 | 1,41 |
| 0,08 | 1,41 | 1,40 | 1,39 | 1,39 | 1,38 | 1,37 | 1,37 | 1,36 | 1,36 | 1,35 |
| 0,09 | 1,31 | 1,34 | 1,33 | 1,32 | 1,32 | 1,31 | 1,31 | 1,30 | 1,30 | 1,29 |
| 0,10 | 1,29 | | | | | | | | | |

*Таблица 14*

Критические значения биноминального критерия $m$ при $P$=0,50, $n \leq 300$ (рассчитано по Оуэну Д.В., 1966)

Различия достоверны, если $m_{эмп}$ равен или больше $m_{0,05}$, и тем более достоверны, если $m_{эмп}$ равен или больше $m_{0,01}$

| n | p | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 5 | 5 | - |
| 6 | 6 | - |
| 7 | 7 | 7 |
| 8 | 7 | 8 |
| 9 | 8 | 9 |
| 10 | 9 | 10 |
| 11 | 9 | 10 |
| 12 | 10 | 11 |
| 13 | 10 | 12 |
| 14 | 11 | 12 |
| 15 | 12 | 13 |
| 16 | 12 | 14 |
| 17 | 13 | 14 |
| 18 | 13 | 15 |
| 19 | 14 | 15 |
| 20 | 15 | 16 |
| 21 | 15 | 17 |
| 22 | 16 | 17 |
| 23 | 16 | 18 |
| 24 | 17 | 19 |
| 25 | 18 | 19 |
| 26 | 18 | 20 |

| n | p | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 27 | 19 | 20 |
| 28 | 20 | 21 |
| 29 | 20 | 22 |
| 30 | 20 | 22 |
| 31 | 21 | 23 |
| 32 | 22 | 24 |
| 33 | 22 | 24 |
| 34 | 23 | 25 |
| 35 | 23 | 25 |
| 36 | 24 | 26 |
| 37 | 24 | 27 |
| 38 | 25 | 27 |
| 39 | 26 | 28 |
| 40 | 26 | 28 |
| 41 | 27 | 29 |
| 42 | 27 | 29 |
| 43 | 28 | 30 |
| 44 | 28 | 31 |
| 45 | 29 | 31 |
| 46 | 30 | 32 |
| 47 | 30 | 32 |
| 48 | 31 | 38 |

| n | p | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 49 | 31 | 34 |
| 50 | 32 | 34 |
| 52 | 33 | 35 |
| 54 | 34 | 36 |
| 56 | 35 | 38 |
| 58 | 36 | 39 |
| 60 | 37 | 40 |
| 62 | 38 | 41 |
| 64 | 40 | 42 |
| 66 | 41 | 43 |
| 68 | 42 | 45 |
| 70 | 43 | 46 |
| 72 | 44 | 47 |
| 74 | 45 | 48 |
| 76 | 46 | 49 |
| 78 | 47 | 50 |
| 80 | 48 | 51 |
| 82 | 49 | 52 |
| 84 | 51 | 54 |
| 86 | 52 | 55 |
| 88 | 53 | 56 |

| n | p | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 90 | 54 | 57 |
| 92 | 55 | 58 |
| 94 | 56 | 59 |
| 96 | 57 | 60 |
| 98 | 58 | 61 |
| 100 | 59 | 63 |
| 110 | 65 | 68 |
| 120 | 70 | 74 |
| 130 | 75 | 79 |
| 140 | 81 | 85 |
| 150 | 86 | 90 |
| 160 | 91 | 96 |
| 170 | 97 | 101 |
| 180 | 102 | 107 |
| 190 | 107 | 112 |
| 200 | 113 | 117 |
| 220 | 123 | 128 |
| 240 | 134 | 139 |
| 260 | 144 | 150 |
| 280 | 155 | 160 |
| 300 | 165 | 171 |

*Таблица 15*

Критические значения биноминального критерия $m$ при $P \leq 0{,}50$; $n \leq 50$ (по Руниону Р., 1982)

Различия достоверны, если $m_{эмп}$ равен или больше $m_{0,05}$, и тем более достоверны, если $m_{эмп}$ равен или больше $m_{0,01}$.

| N **P** / Q | 0,01<br>0,99 | 0,02<br>0,98 | 0,03<br>0,97 | 0,04<br>0,96 | 0,05<br>0,95 | 0,06<br>0,94 | 0,07<br>0,93 | 0,08<br>0,92 | 0,09<br>0,91 | 0,10<br>0,90 | 0,11<br>0,89 | 0,12<br>0,88 | 0,13<br>0,87 | 0,14<br>0,86 | 0,15<br>0,85 | 0,16<br>0,84 | 0,17<br>0,83 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$=0,05 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 7 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 8 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 9 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| 10 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 11 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 12 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 13 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 |
| 14 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| 15 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 |
| 16 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 17 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 |
| 18 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| 19 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 |
| 20 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 21 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 |
| 22 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 |
| $p$=0,05 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 |
| 24 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 |
| 25 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| $p$=0,01 | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | - | - | - | - | - | - | - |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 6 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 7 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| 8 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 9 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 10 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| 11 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 12 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 13 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| 14 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 |
| 15 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 16 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 |
| 17 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 |
| 18 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 |
| 19 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 20 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 |
| 21 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 |
| 22 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 |
| 23 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 24 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 |
| 25 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 |

| N | **P**<br>Q | 0,01<br>0,99 | 0,02<br>0,98 | 0,03<br>0,97 | 0,04<br>0,96 | 0,05<br>0,95 | 0,06<br>0,94 | 0,07<br>0,93 | 0,08<br>0,92 | 0,09<br>0,91 | 0,10<br>0,90 | 0,11<br>0,89 | 0,12<br>0,88 | 0,13<br>0,87 | 0,14<br>0,86 | 0,15<br>0,85 | 0,16<br>0,84 | 0,17<br>0,83 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *p*=0,05 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 26 | | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 |
| 27 | | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 |
| 28 | | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 |
| 29 | | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 |
| 30 | | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 |
| 31 | | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 |
| 32 | | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 |
| 33 | | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 |
| 34 | | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 |
| 35 | | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 |
| 36 | | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 |
| 37 | | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 |
| 38 | | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 |
| 39 | | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 |
| 40 | | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 |
| 41 | | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 10 | 11 | 12 | 12 |
| 42 | | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 |
| 43 | | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 |
| 44 | | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 |
| 45 | | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 |
| 46 | | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 |
| 47 | | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 |
| 48 | | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 | 14 |
| 49 | | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 | 14 |
| 50 | | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 | 14 |
| *p*=0,01 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 |
| 27 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 |
| 28 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 11 |
| 29 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 |
| 30 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 |
| 31 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 |
| 32 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 |
| 33 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 |
| 34 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 |
| 35 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 |
| 36 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 |
| 37 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 |
| 38 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 |
| 39 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 |
| 40 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 |
| 41 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 |
| 42 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 |
| 43 | 3 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 |
| 44 | 3 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 | 14 | 14 | 15 |
| 45 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 |
| 46 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 | 14 | 15 | 15 |
| 47 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 |
| 48 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 | 14 | 14 | 15 | 16 |
| 49 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 | 14 | 15 | 15 | 16 |
| 50 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 | 14 | 15 | 15 | 16 |

| N | P | 0,18 | 0,19 | 0,20 | 0,21 | 0,22 | 0,23 | 0,24 | 0,25 | 0,26 | 0,27 | 0,28 | 0,29 | 0,30 | 0,31 | 0,32 | 0,33 | 0,34 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Q | 0,82 | 0,81 | 0,80 | 0,79 | 0,78 | 0,77 | 0,76 | 0,75 | 0,74 | 0,73 | 0,72 | 0,71 | 0,70 | 0,69 | 0,68 | 0,67 | 0,66 |
| *p*=0,05 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 3 | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 6 | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 7 | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 8 | | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 9 | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 10 | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 11 | | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 12 | | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 |
| 13 | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 14 | | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 |
| 15 | | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 16 | | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 |
| 17 | | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 |
| 18 | | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 19 | | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 |
| 20 | | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| 21 | | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 |
| 22 | | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 |
| 23 | | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 |
| 24 | | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 |
| 25 | | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| *p*=0,01 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 3 | | 3 | 3 | 3 | 3 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | - | - | - |
| 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 8 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 9 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 10 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 11 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 |
| 12 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 13 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 |
| 14 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 15 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 16 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 |
| 17 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| 18 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 |
| 19 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |
| 20 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 |
| 21 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 22 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 |
| 23 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 |
| 24 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 |
| 25 | 10 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 |

| N **P** | 0,18 | 0,19 | 0,20 | 0,21 | 0,22 | 0,23 | 0,24 | 0,25 | 0,26 | 0,27 | 0,28 | 0,29 | 0,30 | 0,31 | 0,32 | 0,33 | 0,34 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Q | 0,82 | 0,81 | 0,80 | 0,79 | 0,78 | 0,77 | 0,76 | 0,75 | 0,74 | 0,73 | 0,72 | 0,71 | 0,70 | 0,69 | 0,68 | 0,67 | 0,66 |
| | | | | | | | | | *p*=0,05 | | | | | | | | |
| 26 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 |
| 27 | 9 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 |
| 28 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 |
| 29 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 |
| 30 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 |
| 31 | 10 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 |
| 32 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 |
| 33 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 |
| 34 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 |
| 35 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 |
| 36 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 |
| 37 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 |
| 38 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 |
| 39 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 |
| 40 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 |
| 41 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 |
| 42 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 |
| 43 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 |
| 44 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 |
| 45 | 13 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 |
| 46 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 |
| 47 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 |
| 48 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 |
| 49 | 14 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 |
| 50 | 14 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 |
| | | | | | | | | | *p*=0,01 | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 |
| 27 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 |
| 28 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 |
| 29 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 |
| 30 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 |
| 31 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 18 |
| 32 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 |
| 33 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 |
| 34 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 |
| 35 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 |
| 36 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 |
| 37 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 |
| 38 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 |
| 39 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 |
| 40 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 |
| 41 | 14 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 |
| 42 | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 |
| 43 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 |
| 44 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 |
| 45 | 15 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 |
| 46 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 |
| 47 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 |
| 48 | 16 | 17 | 17 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 |
| 49 | 16 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 | 26 |
| 50 | 16 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 | 26 |

| N | P<br>Q | 0,35<br>0,65 | 0,36<br>0,64 | 0,37<br>0,63 | 0,38<br>0,62 | 0,39<br>0,61 | 0,40<br>0,60 | 0,41<br>0,59 | 0,42<br>0,58 | 0,43<br>0,57 | 0,44<br>0,56 | 0,45<br>0,55 | 0,46<br>0,54 | 0,47<br>0,53 | 0,48<br>0,52 | 0,49<br>0,51 | 0,50<br>0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$=0,05 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 3 | | 3 | 3 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | - | - | - |
| 5 | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 |
| 8 | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 9 | | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 10 | | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 |
| 11 | | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 12 | | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 |
| 13 | | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 14 | | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| 15 | | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 |
| 16 | | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |
| 17 | | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 |
| 18 | | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 19 | | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 |
| 20 | | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 |
| 21 | | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 22 | | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 |
| 23 | | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| 24 | | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 |
| 25 | | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 17 | 18 |
| $p$=0,01 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

| N / P | 0,35 | 0,36 | 0,37 | 0,38 | 0,39 | 0,40 | 0,41 | 0,42 | 0,43 | 0,44 | 0,45 | 0,46 | 0,47 | 0,48 | 0,49 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Q | 0,65 | 0,64 | 0,63 | 0,62 | 0,61 | 0,60 | 0,59 | 0,58 | 0,57 | 0,56 | 0,55 | 0,54 | 0,53 | 0,52 | 0,51 | 0,50 |
| 3 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 4 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | - | - | - | - |
| 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 9 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 10 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 |
| 11 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 12 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| 13 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 |
| 14 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |
| 15 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 |
| 16 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 17 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 18 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 |
| 19 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 20 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| 21 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 |
| 22 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| 23 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 |
| 24 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 18 | 19 |
| 25 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$=0,05 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 26 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 |
| 27 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 18 | 19 |
| 28 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 13 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 |
| 29 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 |
| 30 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| 31 | 16 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 |
| 32 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 |
| 33 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 |
| 34 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 | 23 |
| 35 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 | 23 | 23 | 23 |
| 36 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 |
| 37 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 | 23 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 |
| 38 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 | 25 | 25 |
| 39 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 |
| 40 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 | 25 | 26 | 26 |
| 41 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 26 | 27 |
| 42 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 26 | 27 | 27 |
| 43 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 27 | 26 |
| 44 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 28 |
| 45 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 |
| 46 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 30 |
| 47 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 30 | 30 |
| 48 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 30 | 30 | 31 |
| 49 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 30 | 30 | 31 | 31 |
| 50 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 30 | 30 | 31 | 32 |
| $p$=0,01 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 26 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 |
| 27 | 16 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 20 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 |
| 29 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 21 | 22 |
| 30 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 |
| 31 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 | 23 | 23 |
| 32 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 |
| 33 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 | 23 | 23 | 23 | 24 | 24 |
| 34 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 | 23 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 | 25 |
| 35 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 | 25 | 25 | 25 |
| 36 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 | 23 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 | 25 | 26 | 26 |
| 37 | 21 | 21 | 22 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 | 25 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 |
| 38 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 26 | 27 | 27 |
| 39 | 22 | 22 | 23 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 27 | 28 |
| 40 | 22 | 23 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 28 |
| 41 | 23 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 28 | 29 |
| 42 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 29 |
| 43 | 23 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 28 | 29 | 29 | 30 | 30 |
| 44 | 24 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 28 | 29 | 29 | 30 | 30 | 31 |
| 45 | 24 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 29 | 30 | 30 | 31 | 31 |
| 46 | 25 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 30 | 30 | 30 | 31 | 31 | 32 |
| 47 | 25 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 30 | 30 | 31 | 31 | 31 | 32 | 32 |
| 48 | 26 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 30 | 30 | 31 | 31 | 32 | 32 | 33 | 33 |
| 49 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 30 | 30 | 31 | 31 | 32 | 32 | 33 | 33 | 34 |
| 50 | 26 | 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 30 | 30 | 31 | 31 | 32 | 32 | 33 | 33 | 34 |

*Таблица 16*

Критические значения выборочного коэффициента корреляции рангов

(по В.Ю. Урбаху, 1964)

Связь достоверна, если $r_{s\ эмп} \geq r_{s\ 0,05}$ и тем более достоверна, если $r_{s\ эмп} \geq r_{s\ 0,01}$ .

| *n* | *p* | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 5 | 0,94 | - |
| 6 | 0,85 | - |
| 7 | 0,78 | 0,94 |
| 8 | 0,72 | 0,88 |
| 9 | 0,68 | 0,83 |
| 10 | 0,64 | 0,79 |
| 11 | 0,61 | 0,76 |
| 12 | 0,58 | 0,73 |
| 13 | 0,56 | 0,70 |
| 14 | 0,54 | 0,68 |
| 15 | 0,52 | 0,66 |
| 16 | 0,50 | 0,64 |

| *n* | *p* | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 17 | 0,48 | 0,62 |
| 18 | 0,47 | 0,60 |
| 19 | 0,46 | 0,58 |
| 20 | 0,45 | 0,57 |
| 21 | 0,44 | 0,56 |
| 22 | 0,43 | 0,54 |
| 23 | 0,42 | 0,53 |
| 24 | 0,41 | 0,52 |
| 25 | 0,49 | 0,51 |
| 26 | 0,39 | 0,50 |
| 27 | 0,38 | 0,49 |
| 28 | 0,38 | 0,48 |

| *n* | *p* | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 29 | 0,37 | 0,48 |
| 30 | 0,36 | 0,47 |
| 31 | 0,36 | 0,46 |
| 32 | 0,36 | 0,45 |
| 33 | 0,34 | 0,45 |
| 34 | 0,34 | 0,44 |
| 35 | 0,33 | 0,43 |
| 36 | 0,33 | 0,43 |
| 37 | 0,33 | 0,43 |
| 38 | 0,32 | 0,41 |
| 39 | 0,32 | 0,41 |
| 40 | 0,31 | 0,40 |

*Таблица 17*

Критические значения критерия F Фишера для уровней статистической значимости $p \leq 0{,}05$ и $p \leq 0{,}01$;
$df_1$ – число степеней свободы в числителе, $df_2$ – число степеней свободы в знаменателе
(по Snedecor G.B., 1956)

Влияние фактора или взаимодействия факторов достоверно, если $F_{эмп}$ равен или больше критического значения $F_{0,05}$ и тем более достоверно, если $F_{эмп} \geq 0{,}01$.

| $df_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $df_2$ | $p \leq 0{,}05$ | | | | | | | | | | | |
| 1 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 | 243 | 244 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,36 | 19,37 | 19,38 | 19,39 | 19,40 | 19,41 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,88 | 8,84 | 8,81 | 8,78 | 8,76 | 8,74 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,93 | 5,91 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,78 | 4,74 | 4,70 | 4,68 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 4,03 | 4,00 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,63 | 3,60 | 3,57 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,34 | 3,31 | 3,28 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,13 | 3,10 | 3,07 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,97 | 2,94 | 2,91 |
| 11 | 4,48 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,86 | 2,82 | 2,79 |
| 12 | 4,75 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,92 | 2,85 | 2,80 | 2,76 | 2,72 | 2,69 |
| 13 | 4,67 | 3,80 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,92 | 2,84 | 2,77 | 2,72 | 2,67 | 2,63 | 2,60 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,77 | 2,70 | 2,65 | 2,60 | 2,56 | 2,53 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,70 | 2,64 | 2,59 | 2,55 | 2,51 | 2,48 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 | 2,452 | 2,42 |
| $p \leq 0{,}01$ | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 4052 | 4999 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5981 | 6022 | 6056 | 6082 | 6106 |
| 2 | 98,49 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,36 | 99,37 | 99,39 | 99,40 | 99,41 | 44,42 |
| 3 | 34,12 | 30,82 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 | 27,34 | 27,23 | 27,13 | 27,05 |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,98 | 14,80 | 14,66 | 14,54 | 14,45 | 14,37 |
| 5 | 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,45 | 10,29 | 10,15 | 10,05 | 9,96 | 9,89 |
| 6 | 13,74 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 | 7,87 | 7,79 | 7,72 |
| 7 | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 7,00 | 6,84 | 6,71 | 6,62 | 6,54 | 6,47 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,19 | 6,03 | 5,91 | 5,82 | 5,74 | 5,67 |
| 9 | 10,56 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,62 | 5,47 | 5,35 | 5,26 | 5,18 | 5,11 |
| 10 | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,21 | 5,06 | 4,95 | 4,85 | 4,78 | 4,71 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 9,65 | 7,20 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,88 | 4,74 | 4,63 | 4,54 | 4,46 | 4,40 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,65 | 4,50 | 4,39 | 4,30 | 4,22 | 4,16 |
| 13 | 9,07 | 6,70 | 5,74 | 5,20 | 4,86 | 4,62 | 4,44 | 4,30 | 4,19 | 4,10 | 4,02 | 3,96 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,03 | 4,69 | 4,46 | 4,28 | 4,14 | 4,03 | 3,94 | 3,86 | 3,80 |
| 15 | 8,68 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4,32 | 4,14 | 4,00 | 3,89 | 3,80 | 3,73 | 3,67 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 | 3,78 | 3,69 | 3,61 | 3,55 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,62 | 2,55 | 2,50 | 2,45 | 2,41 | 2,38 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 | 2,46 | 2,41 | 2,37 | 2,34 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,55 | 2,48 | 2,43 | 2,38 | 2,34 | 2,31 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,52 | 2,45 | 2,40 | 2,35 | 2,31 | 2,28 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,49 | 2,42 | 2,37 | 2,32 | 2,28 | 2,25 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,47 | 2,40 | 2,35 | 2,30 | 2,26 | 2,23 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,45 | 2,38 | 2,32 | 2,28 | 2,24 | 2,20 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,43 | 2,36 | 2,30 | 2,26 | 2,22 | 2,18 |
| 25 | 4,24 | 3,38 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,41 | 2,34 | 2,28 | 2,24 | 2,20 | 2,16 |
| 26 | 4,22 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,39 | 2,32 | 2,27 | 2,22 | 2,18 | 2,15 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,37 | 2,30 | 2,25 | 2,20 | 2,16 | 2,13 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,44 | 2,36 | 2,29 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,12 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,54 | 2,43 | 2,35 | 2,28 | 2,22 | 2,18 | 2,14 | 2,10 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,34 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,12 | 2,09 |
| 32 | 4,15 | 3,30 | 2,90 | 2,67 | 2,51 | 2,40 | 2,32 | 2,25 | 2,19 | 2,14 | 2,10 | 2,07 |
| 34 | 4,13 | 3,28 | 2,88 | 2,65 | 2,49 | 2,38 | 2,30 | 2,23 | 2,17 | 2,12 | 2,08 | 2,05 |
| $p \leq 0,01$ | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 8,40 | 6,11 | 5,18 | 4,67 | 3,34 | 4,10 | 3,93 | 3,79 | 3,68 | 3,59 | 3,52 | 3,45 |
| 18 | 8,28 | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 3,25 | 4,01 | 3,85 | 3,71 | 3,60 | 3,51 | 3,44 | 3,37 |
| 19 | 8,18 | 5,93 | 5,01 | 4,50 | 3,17 | 3,94 | 3,77 | 3,63 | 3,52 | 3,43 | 3,36 | 3,30 |
| 20 | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 3,10 | 3,87 | 3,71 | 3,56 | 3,45 | 3,37 | 3,30 | 3,23 |
| 21 | 8,02 | 5,78 | 4,87 | 4,37 | 3,04 | 3,81 | 3,65 | 3,51 | 3,40 | 3,31 | 3,24 | 3,17 |
| 22 | 7,94 | 5,72 | 4,82 | 4,31 | 3,99 | 3,76 | 3,59 | 3,45 | 3,35 | 3,26 | 3,18 | 3,12 |
| 23 | 7,88 | 5,66 | 4,76 | 4,26 | 3,94 | 3,71 | 3,54 | 3,41 | 3,30 | 3,21 | 3,14 | 3,07 |
| 24 | 7,82 | 5,61 | 4,72 | 4,22 | 3,90 | 3,67 | 3,50 | 3,36 | 3,25 | 3,17 | 3,09 | 3,03 |
| 25 | 7,77 | 5,57 | 4,68 | 4,18 | 3,86 | 3,63 | 3,46 | 3,32 | 3,21 | 3,13 | 3,05 | 2,99 |
| 26 | 7,72 | 5,53 | 4,64 | 4,14 | 3,82 | 3,59 | 3,42 | 3,29 | 3,17 | 3,09 | 3,02 | 2,96 |
| $p \leq 0,01$ | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | 7,68 | 5,49 | 4,60 | 4,11 | 3,79 | 3,56 | 3,39 | 3,26 | 3,14 | 3,06 | 2,98 | 2,93 |
| 28 | 7,64 | 5,45 | 4,57 | 4,07 | 3,76 | 3,53 | 3,36 | 3,23 | 3,11 | 3,03 | 2,95 | 2,90 |
| 29 | 7,60 | 5,42 | 4,54 | 4,04 | 3,73 | 3,50 | 3,33 | 3,20 | 3,08 | 3,00 | 2,92 | 2,87 |
| 30 | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,30 | 3,17 | 3,06 | 2,98 | 2,90 | 2,84 |
| 32 | 7,50 | 5,34 | 4,46 | 3,97 | 3,66 | 3,42 | 3,25 | 3,12 | 3,01 | 2,94 | 2,86 | 2,80 |
| 34 | 7,44 | 5,29 | 4,42 | 3,93 | 3,61 | 3,38 | 3,21 | 3,08 | 2,97 | 2,89 | 2,82 | 2,76 |
| 36 | 4,11 | 3,26 | 2,86 | 2,63 | 2,48 | 2,36 | 2,28 | 2,21 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,03 |
| 38 | 4,10 | 3,25 | 2,85 | 2,62 | 2,46 | 2,35 | 2,26 | 2,19 | 2,14 | 2,09 | 2,05 | 2,02 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,07 | 2,04 | 2,00 |
| 42 | 4,07 | 3,22 | 2,83 | 2,59 | 2,44 | 2,32 | 2,24 | 2,17 | 2,11 | 2,06 | 2,02 | 1,99 |
| 44 | 4,06 | 3,21 | 2,82 | 2,58 | 2,43 | 2,31 | 2,23 | 2,16 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,98 |
| 46 | 4,05 | 3,20 | 2,81 | 2,57 | 2,42 | 2,30 | 2,22 | 2,14 | 2,09 | 2,04 | 2,00 | 1,97 |
| 48 | 4,04 | 3,19 | 2,80 | 2,56 | 2,41 | 2,30 | 2,21 | 2,14 | 2,08 | 2,03 | 1,99 | 1,96 |
| 50 | 4,03 | 3,18 | 2,79 | 2,56 | 2,40 | 2,29 | 2,20 | 2,13 | 2,07 | 2,02 | 1,98 | 1,95 |
| 55 | 4,02 | 3,17 | 2,78 | 2,54 | 2,38 | 2,27 | 2,18 | 2,11 | 2,05 | 2,00 | 1,97 | 1,93 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,52 | 2,37 | 2,25 | 2,17 | 2,10 | 2,04 | 1,99 | 1,95 | 1,92 |
| 65 | 3,99 | 3,14 | 2,75 | 2,51 | 2,36 | 2,24 | 2,15 | 2,08 | 2,02 | 1,98 | 1,94 | 1,90 |
| 70 | 3,98 | 3,13 | 2,74 | 2,50 | 2,35 | 2,23 | 2,14 | 2,07 | 2,01 | 1,97 | 1,93 | 1,89 |
| 80 | 3,96 | 3,11 | 2,72 | 2,48 | 2,33 | 2,21 | 2,12 | 2,05 | 1,99 | 1,95 | 1,91 | 1,88 |
| 100 | 3,94 | 3,09 | 2,70 | 2,46 | 2,30 | 2,19 | 2,10 | 2,03 | 1,97 | 1,92 | 1,88 | 1,85 |
| 125 | 3,92 | 3,07 | 2,68 | 2,44 | 2,29 | 2,17 | 2,08 | 2,01 | 1,95 | 1,90 | 1,86 | 1,83 |
| 150 | 3,91 | 3,06 | 2,67 | 2,43 | 2,27 | 2,16 | 2,07 | 2,00 | 1,94 | 1,89 | 1,85 | 1,82 |
| 200 | 3,89 | 3,04 | 2,65 | 2,41 | 2,26 | 2,14 | 2,05 | 1,98 | 1,92 | 1,87 | 1,83 | 1,80 |
| 400 | 3,86 | 3,02 | 2,62 | 2,39 | 2,23 | 2,12 | 2,03 | 1,96 | 1,90 | 1,85 | 1,81 | 1,78 |
| 1000 | 3,85 | 3,00 | 2,61 | 2,38 | 2,22 | 2,10 | 2,02 | 1,95 | 1,89 | 1,84 | 1,80 | 1,76 |
| ** | 3,84 | 2,99 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,09 | 2,01 | 1,94 | 1,88 | 1,83 | 1,79 | 1,75 |
| $p \leq 0,01$ | | | | | | | | | | | | |
| 36 | 7,39 | 5,25 | 4,38 | 3,89 | 3,58 | 335, | 3,18 | 3,04 | 2,94 | 2,86 | 2,78 | 2,72 |
| 38 | 7,35 | 5,21 | 4,34 | 3,86 | 3,54 | 332, | 3,15 | 3,02 | 2,91 | 2,82 | 2,75 | 2,69 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 7,31 | 5,18 | 4,31 | 3,83 | 3,51 | 329, | 3,12 | 2,99 | 2,88 | 2,80 | 2,73 | 2,66 |
| 42 | 7,27 | 5,15 | 4,29 | 3,80 | 3,49 | 326, | 3,10 | 2,96 | 2,86 | 2,77 | 2,70 | 2,64 |
| 44 | 7,24 | 5,12 | 4,26 | 3,78 | 3,46 | 324, | 3,07 | 2,94 | 2,84 | 2,75 | 2,68 | 2,62 |
| 46 | 7,21 | 5,10 | 4,24 | 3,76 | 3,44 | 322, | 3,05 | 2,92 | 2,82 | 2,73 | 2,66 | 2,60 |
| 48 | 7,19 | 5,08 | 4,22 | 3,74 | 3,42 | 320, | 3,04 | 2,90 | 2,80 | 2,71 | 2,64 | 2,58 |
| 50 | 7,17 | 5,06 | 4,20 | 3,72 | 3,41 | 318, | 3,02 | 2,88 | 2,78 | 2,70 | 2,62 | 2,56 |
| 55 | 7,12 | 5,01 | 4,16 | 3,68 | 3,37 | 315, | 2,98 | 2,85 | 2,75 | 2,66 | 2,59 | 2,53 |
| 60 | 7,08 | 4,98 | 4,13 | 3,65 | 3,34 | 312, | 2,95 | 2,82 | 2,72 | 2,63 | 2,56 | 2,50 |
| 65 | 7,04 | 4,95 | 4,10 | 3,62 | 3,31 | 309, | 2,93 | 2,79 | 2,70 | 2,61 | 2,54 | 2,47 |
| 70 | 7,01 | 4,92 | 4,08 | 3,60 | 3,29 | 307, | 2,91 | 2,77 | 2,67 | 2,59 | 2,51 | 2,45 |
| 80 | 6,96 | 4,88 | 4,04 | 3,56 | 3,25 | 304, | 2,87 | 2,74 | 2,64 | 2,55 | 2,48 | 2,41 |
| 100 | 6,90 | 4,82 | 3,98 | 3,51 | 3,20 | 299, | 2,82 | 2,69 | 2,59 | 2,51 | 2,43 | 2,36 |
| 125 | 6,84 | 4,78 | 3,94 | 3,47 | 3,17 | 295, | 2,79 | 2,65 | 2,56 | 2,47 | 2,40 | 2,33 |
| 150 | 6,81 | 4,75 | 3,91 | 3,44 | 3,14 | 292, | 2,76 | 2,62 | 2,53 | 2,44 | 2,37 | 2,30 |
| 200 | 6,76 | 4,71 | 3,88 | 3,41 | 3,11 | 290, | 2,73 | 2,60 | 2,50 | 2,41 | 2,34 | 2,28 |
| 400 | 6,70 | 4,66 | 3,83 | 3,36 | 3,06 | 285, | 2,69 | 2,55 | 2,46 | 2,37 | 2,29 | 2,23 |
| 1000 | 6,66 | 4,62 | 3,80 | 3,34 | 3,04 | 282, | 2,66 | 2,53 | 2,43 | 2,34 | 2,26 | 2,20 |
| ** | 6,64 | 4,60 | 3,78 | 3,32 | 3,02 | 280, | 2,64 | 2,51 | 2,41 | 2,32 | 2,24 | 2,18 |
| $df_1$ | 14 | 16 | 20 | 24 | 30 | 40 | 50 | 75 | 100 | 200 | 500 | ** |
| $df_2$ | $p \leq 0{,}05$ | | | | | | | | | | | |
| 1 | 245 | 246 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 | 253 | 253 | 254 | 254 | 254 |
| 2 | 19,42 | 19,43 | 19,44 | 19,45 | 19,46 | 19,47 | 19,47 | 19,48 | 19,49 | 19,49 | 19,50 | 19,50 |
| 3 | 8,71 | 8,69 | 5,66 | 5,64 | 5,62 | 5,60 | 5,58 | 5,57 | 5,56 | 5,54 | 5,54 | 5,53 |
| 4 | 5,87 | 5,84 | 5,80 | 5,77 | 5,74 | 5,71 | 5,70 | 5,68 | 5,66 | 5,65 | 5,64 | 5,63 |
| 5 | 4,64 | 4,60 | 4,56 | 4,53 | 4,50 | 4,46 | 4,44 | 4,42 | 4,40 | 4,38 | 4,37 | 4,36 |
| 6 | 3,96 | 3,92 | 3,87 | 3,84 | 3,81 | 3,77 | 3,75 | 3,72 | 3,71 | 3,69 | 3,68 | 3,67 |
| 7 | 3,52 | 3,49 | 3,44 | 3,41 | 3,38 | 3,34 | 3,32 | 3,29 | 3,28 | 3,25 | 3,24 | 3,23 |
| 8 | 3,23 | 3,20 | 3,15 | 3,12 | 3,08 | 3,05 | 3,03 | 3,00 | 2,98 | 2,96 | 2,94 | 2,93 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 3,02 | 2,98 | 2,93 | 2,90 | 2,86 | 2,82 | 2,89 | 2,77 | 2,76 | 2,73 | 2,72 | 2,71 |
| 10 | 2,86 | 2,82 | 2,77 | 2,74 | 2,70 | 2,67 | 2,64 | 2,61 | 2,59 | 2,56 | 2,55 | 2,54 |
| 11 | 2,74 | 2,70 | 2,65 | 2,61 | 2,57 | 2,53 | 2,50 | 2,47 | 2,45 | 2,42 | 2,41 | 2,40 |
| 12 | 2,64 | 2,60 | 2,54 | 2,50 | 2,46 | 2,42 | 2,40 | 2,36 | 2,35 | 2,32 | 2,31 | 2,30 |
| 13 | 2,55 | 2,51 | 2,46 | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,32 | 2,28 | 2,26 | 2,24 | 2,22 | 2,21 |
| 14 | 2,48 | 2,44 | 2,39 | 2,35 | 2,31 | 2,27 | 2,24 | 2,21 | 2,19 | 2,16 | 2,14 | 2,13 |
| 15 | 2,43 | 2,39 | 2,33 | 2,29 | 2,25 | 2,21 | 2,18 | 2,15 | 2,12 | 2,10 | 2,08 | 2,07 |
| 16 | 2,37 | 2,33 | 2,28 | 2,24 | 2,20 | 2,16 | 2,13 | 2,09 | 2,07 | 2,04 | 2,02 | 2,01 |
| $p \leq 0{,}01$ | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 6142 | 6169 | 6208 | 6234 | 6261 | 6286 | 6302 | 6323 | 6334 | 6352 | 6361 | 6366 |
| 2 | 99,43 | 99,44 | 99,45 | 99,46 | 99,47 | 99,48 | 99,48 | 99,49 | 99,49 | 99,49 | 99,50 | 99,50 |
| 3 | 26,92 | 26,83 | 26,69 | 26,60 | 26,50 | 26,41 | 26,35 | 26,27 | 26,23 | 26,18 | 26,14 | 26,12 |
| 4 | 14,24 | 14,15 | 14,02 | 13,93 | 13,83 | 13,74 | 13,69 | 13,61 | 13,57 | 13,52 | 13,48 | 13,46 |
| 5 | 9,77 | 9,68 | 9,55 | 9,47 | 9,38 | 9,29 | 9,24 | 9,17 | 9,13 | 9,07 | 9,04 | 9,02 |
| 6 | 7,60 | 7,52 | 7,39 | 7,31 | 7,23 | 7,14 | 7,09 | 7,02 | 6,99 | 6,94 | 6,90 | 6,88 |
| 7 | 6,35 | 6,27 | 6,15 | 6,07 | 5,98 | 5,90 | 5,85 | 5,78 | 5,75 | 5,70 | 5,67 | 5,65 |
| 8 | 5,56 | 5,48 | 5,36 | 5,28 | 5,20 | 5,11 | 5,06 | 5,00 | 4,96 | 4,91 | 4,88 | 4,86 |
| 9 | 5,00 | 4,92 | 4,80 | 4,73 | 4,64 | 4,56 | 4,51 | 4,45 | 4,41 | 4,36 | 4,33 | 4,31 |
| 10 | 4,60 | 4,52 | 4,41 | 4,33 | 4,25 | 4,17 | 4,12 | 4,05 | 4,01 | 3,96 | 3,93 | 3,91 |
| $p \leq 0{,}01$ | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 4,29 | 4,21 | 4,10 | 4,02 | 3,94 | 3,86 | 3,80 | 3,74 | 3,70 | 3,66 | 3,62 | 3,60 |
| 12 | 3,05 | 3,98 | 3,86 | 3,78 | 3,70 | 3,61 | 3,56 | 3,49 | 3,46 | 3,41 | 3,38 | 3,36 |
| 13 | 3,85 | 3,78 | 3,67 | 3,59 | 3,51 | 3,42 | 3,37 | 3,30 | 3,27 | 3,21 | 3,18 | 3,16 |
| 14 | 3,70 | 3,62 | 3,51 | 3,43 | 3,34 | 3,26 | 3,21 | 3,14 | 3,11 | 3,06 | 3,02 | 3,00 |
| 15 | 3,56 | 3,48 | 3,36 | 3,29 | 3,20 | 3,12 | 3,07 | 3,00 | 2,97 | 2,92 | 2,89 | 2,87 |
| 16 | 3,45 | 3,37 | 3,25 | 3,18 | 3,10 | 3,01 | 2,96 | 2,98 | 2,86 | 2,80 | 2,77 | 2,75 |
| 17 | 2,33 | 2,29 | 2,23 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,08 | 2,04 | 2,02 | 1,99 | 1,97 | 1,96 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 2,29 | 2,25 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,07 | 2,04 | 2,00 | 1,98 | 1,95 | 1,93 | 1,92 |
| 19 | 2,26 | 2,21 | 2,15 | 2,11 | 2,07 | 2,02 | 2,00 | 1,96 | 1,94 | 1,91 | 1,90 | 1,88 |
| 20 | 2,23 | 2,18 | 2,12 | 2,08 | 2,04 | 1,99 | 1,96 | 1,92 | 1,90 | 1,87 | 1,85 | 1,84 |
| 21 | 2,20 | 2,15 | 2,09 | 2,05 | 2,00 | 1,96 | 1,93 | 1,89 | 1,87 | 1,84 | 1,82 | 1,81 |
| 22 | 2,18 | 2,13 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,93 | 1,91 | 1,87 | 1,84 | 1,81 | 1,80 | 1,78 |
| 23 | 2,14 | 2,10 | 2,04 | 2,00 | 1,96 | 1,91 | 1,88 | 1,84 | 1,82 | 1,79 | 1,77 | 1,76 |
| 24 | 2,13 | 2,09 | 2,02 | 1798 | 1,94 | 1,89 | 1,86 | 1,82 | 1,80 | 1,76 | 1,74 | 1,73 |
| 25 | 2,11 | 2,06 | 2,00 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,84 | 1,80 | 1,77 | 1,74 | 1,72 | 1,71 |
| 26 | 2,10 | 2,05 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,85 | 1,82 | 1,78 | 1,76 | 1,72 | 1,70 | 1,69 |
| 27 | 2,08 | 2,03 | 1,97 | 1,93 | 1,88 | 1,84 | 1,80 | 1,76 | 1,74 | 1,71 | 1,68 | 1,67 |
| 28 | 2,06 | 2,02 | 1,96 | 1,91 | 1,87 | 1,81 | 1,78 | 1,75 | 1,72 | 1,69 | 1,67 | 1,65 |
| 29 | 2,05 | 2,00 | 1,94 | 1,90 | 1,85 | 1,80 | 1,77 | 1,73 | 1,71 | 1,68 | 1,65 | 1,64 |
| 30 | 2,04 | 1,99 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,76 | 1,72 | 1,69 | 1,66 | 1,64 | 1,62 |
| 32 | 2,02 | 1,97 | 1,91 | 1,86 | 1,82 | 1,76 | 1,74 | 1,69 | 1,67 | 1,64 | 1,61 | 1,59 |
| 34 | 2,00 | 1,95 | 1,89 | 1,84 | 1,80 | 1,74 | 1,71 | 1,67 | 1,64 | 1,61 | 1,59 | 1,57 |
| $p \leq 0{,}01$ | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 3,35 | 3,27 | 3,16 | 3,08 | 3,00 | 2,92 | 2,86 | 2,79 | 2,76 | 2,70 | 2,67 | 2,65 |
| 18 | 3,27 | 3,19 | 3,07 | 3,00 | 2,91 | 2,83 | 2,78 | 2,71 | 2,68 | 2,62 | 2,59 | 2,57 |
| 19 | 3,19 | 3,12 | 3,00 | 2,92 | 2,84 | 2,76 | 2,70 | 2,63 | 2,60 | 2,54 | 2,51 | 2,49 |
| 20 | 3,13 | 3,05 | 2,94 | 2,86 | 2,77 | 2,69 | 2,63 | 2,56 | 2,53 | 2,47 | 2,44 | 2,42 |
| 21 | 3,07 | 2,99 | 2,88 | 2,80 | 2,72 | 2,63 | 2,58 | 2,51 | 2,47 | 2,42 | 2,38 | 2,36 |
| $p \leq 0{,}01$ | | | | | | | | | | | | |
| 22 | 3,02 | 2,94 | 2,83 | 2,75 | 2,67 | 2,58 | 2,53 | 2,46 | 2,42 | 2,37 | 2,33 | 2,31 |
| 23 | 2,97 | 2,89 | 2,78 | 2,70 | 2,62 | 2,53 | 2,48 | 2,41 | 2,37 | 2,32 | 2,28 | 2,26 |
| 24 | 2,93 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,58 | 2,49 | 2,44 | 2,36 | 2,33 | 2,27 | 2,23 | 2,21 |
| 25 | 2,89 | 2,81 | 2,70 | 2,62 | 2,54 | 2,45 | 2,40 | 2,32 | 2,29 | 2,23 | 2,19 | 2,17 |
| 26 | 2,86 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,50 | 2,41 | 2,36 | 2,28 | 2,25 | 2,19 | 2,15 | 2,13 |
| 27 | 2,83 | 2,74 | 2,63 | 2,55 | 2,47 | 2,38 | 2,33 | 2,25 | 2,21 | 2,16 | 2,12 | 2,10 |
| 28 | 2,80 | 2,71 | 2,60 | 2,52 | 2,44 | 2,35 | 2,30 | 2,22 | 2,18 | 2,13 | 2,09 | 2,06 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 2,77 | 2,68 | 2,57 | 2,49 | 2,41 | 2,32 | 2,27 | 2,19 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,03 |
| 30 | 2,74 | 2,66 | 2,55 | 2,47 | 2,38 | 2,29 | 2,24 | 2,16 | 2,13 | 2,07 | 2,03 | 2,01 |
| 32 | 2,70 | 2,62 | 2,51 | 2,42 | 2,34 | 2,25 | 2,20 | 2,12 | 2,08 | 2,02 | 1,98 | 1,96 |
| 34 | 2,66 | 2,58 | 2,47 | 2,38 | 2,30 | 2,21 | 2,15 | 2,08 | 2,04 | 1,98 | 1,94 | 1,91 |
| $p \leq 0{,}05$ | | | | | | | | | | | | |
| 36 | 1,98 | 1,93 | 1,87 | 1,82 | 1,78 | 1,72 | 1,69 | 1,65 | 1,62 | 1,59 | 1,56 | 1,55 |
| 38 | 1,96 | 1,92 | 1,85 | 1,80 | 1,76 | 1,71 | 1,67 | 1,63 | 1,60 | 1,57 | 1,54 | 1,53 |
| 40 | 1,95 | 1,90 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,69 | 1,66 | 1,61 | 1,59 | 1,55 | 1,53 | 1,51 |
| 42 | 1,94 | 1,89 | 1,82 | 1,78 | 1,73 | 1,68 | 1,64 | 1,60 | 1,57 | 1,54 | 1,51 | 1,49 |
| 44 | 1,92 | 1,88 | 1,81 | 1,76 | 1,72 | 1,66 | 1,63 | 1,58 | 1,56 | 1,52 | 1,50 | 1,48 |
| 46 | 1,91 | 1,87 | 1,80 | 1,75 | 1,71 | 1,65 | 1,62 | 1,57 | 1,54 | 1,51 | 1,48 | 1,46 |
| 48 | 1,90 | 1,86 | 1,79 | 1,74 | 1,70 | 1,64 | 1,61 | 1,56 | 1,53 | 1,50 | 1,47 | 1,45 |
| 50 | 1,90 | 1,85 | 1,78 | 1,74 | 1,69 | 1,63 | 1,60 | 1,55 | 1,52 | 1,48 | 1,46 | 1,44 |
| 55 | 1,88 | 1,83 | 1,76 | 1,72 | 1,67 | 1,61 | 1,58 | 1,52 | 1,50 | 1,46 | 1,43 | 1,41 |
| 60 | 1,86 | 1,81 | 1,75 | 1,70 | 1,65 | 1,59 | 1,56 | 1,50 | 1,48 | 1,44 | 1,41 | 1,39 |
| 65 | 1,85 | 1,80 | 1,73 | 1,68 | 1,63 | 1,57 | 1,54 | 1,49 | 1,46 | 1,42 | 1,39 | 1,37 |
| 70 | 1,84 | 1,79 | 1,72 | 1,67 | 1,62 | 1,56 | 1,53 | 1,47 | 1,45 | 1,40 | 1,37 | 1,35 |
| 80 | 1,82 | 1,77 | 1,70 | 1,65 | 1,60 | 1,54 | 1,51 | 1,45 | 1,42 | 1,38 | 1,35 | 1,32 |
| 100 | 1,79 | 1,75 | 1,68 | 1,63 | 1,57 | 1,51 | 1,48 | 1,42 | 1,39 | 1,34 | 1,30 | 1,28 |
| 125 | 1,77 | 1,72 | 1,65 | 1,60 | 1,55 | 1,49 | 1,45 | 1,39 | 1,36 | 1,31 | 1,27 | 1,25 |
| $p \leq 0{,}05$ | | | | | | | | | | | | |
| 150 | 1,76 | 1,71 | 1,64 | 1,59 | 1,54 | 1,47 | 1,44 | 1,37 | 1,34 | 1,29 | 1,25 | 1,22 |
| 200 | 1,74 | 1,69 | 1,62 | 1,57 | 1,52 | 1,45 | 1,42 | 1,35 | 1,32 | 1,26 | 1,22 | 1,19 |
| 400 | 1,72 | 1,67 | 1,60 | 1,54 | 1,49 | 1,42 | 1,38 | 1,32 | 1,28 | 1,22 | 1,16 | 1,13 |
| 1000 | 1,70 | 1,65 | 1,58 | 1,53 | 1,47 | 1,41 | 1,36 | 1,30 | 1,26 | 1,19 | 1,13 | 1,08 |
| ** | 1,69 | 1,64 | 1,57 | 1,52 | 1,46 | 1,40 | 1,35 | 1,28 | 1,24 | 1,17 | 1,11 | 1,00 |
| $p \leq 0{,}01$ | | | | | | | | | | | | |
| 36 | 2,62 | 2,54 | 2,43 | 2,35 | 2,26 | 2,17 | 2,12 | 2,04 | 2,00 | 1,94 | 1,90 | 1,87 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 2,59 | 2,51 | 2,40 | 2,32 | 2,22 | 2,14 | 2,08 | 2,00 | 1,97 | 1,90 | 1,86 | 1,84 |
| 40 | 2,56 | 2,49 | 2,37 | 2,29 | 2,20 | 2,11 | 2,05 | 1,97 | 1,94 | 1,88 | 1,84 | 1,81 |
| 42 | 2,54 | 2,46 | 2,35 | 2,26 | 2,17 | 2,08 | 2,02 | 1,94 | 1,91 | 1,85 | 1,80 | 1,78 |
| 44 | 2,52 | 2,44 | 2,32 | 2,24 | 2,15 | 2,06 | 2,00 | 1,92 | 1,88 | 1,82 | 1,78 | 1,75 |
| 46 | 2,50 | 2,42 | 2,30 | 2,22 | 2,13 | 2,04 | 1,98 | 1,90 | 1,86 | 1,80 | 1,76 | 1,72 |
| 48 | 2,48 | 2,40 | 2,28 | 2,20 | 2,11 | 2,02 | 1,96 | 1,88 | 1,84 | 1,78 | 1,73 | 1,70 |
| 50 | 2,46 | 2,39 | 2,26 | 2,18 | 2,10 | 2,00 | 1,94 | 1,86 | 1,82 | 1,76 | 1,71 | 1,68 |
| 55 | 2,43 | 2,35 | 2,23 | 2,15 | 2,06 | 1,96 | 1,90 | 1,82 | 1,78 | 1,71 | 1,66 | 1,64 |
| 60 | 2,40 | 2,32 | 2,20 | 2,12 | 2,03 | 1,93 | 1,87 | 1,79 | 1,74 | 1,68 | 1,65 | 1,60 |
| 65 | 2,37 | 2,30 | 2,18 | 2,09 | 2,00 | 1,90 | 1,84 | 1,76 | 1,71 | 1,64 | 1,60 | 1,56 |
| 70 | 2,35 | 2,28 | 2,15 | 2,07 | 1,98 | 1,88 | 1,82 | 1,74 | 1,69 | 1,62 | 1,56 | 1,53 |
| 80 | 2,32 | 2,24 | 2,11 | 2,03 | 1,94 | 1,84 | 1,78 | 1,70 | 1,65 | 1,57 | 1,52 | 1,49 |
| 100 | 2,26 | 2,19 | 2,06 | 1,98 | 1,89 | 1,79 | 1,73 | 1,64 | 1,59 | 1,51 | 1,46 | 1,43 |
| 125 | 2,23 | 2,15 | 2,03 | 1,94 | 1,85 | 1,75 | 1,68 | 1,59 | 1,54 | 1,46 | 1,40 | 1,37 |
| 150 | 2,20 | 2,12 | 2,00 | 1,91 | 1,83 | 1,72 | 1,66 | 1,56 | 1,51 | 1,43 | 1,37 | 1,33 |
| 200 | 2,17 | 2,09 | 1,97 | 1,88 | 1,79 | 1,69 | 1,62 | 1,53 | 1,48 | 1,39 | 1,33 | 1,28 |
| 400 | 2,12 | 2,04 | 1,92 | 1,84 | 1,74 | 1,64 | 1,57 | 1,47 | 1,42 | 1,32 | 1,24 | 1,19 |
| 1000 | 2,09 | 2,01 | 1,89 | 1,81 | 1,71 | 1,61 | 1,54 | 1,44 | 1,38 | 1,28 | 1,19 | 1,11 |
| ** | 2,07 | 1,99 | 1,87 | 1,79 | 1,69 | 1,59 | 1,52 | 1,41 | 1,36 | 1,25 | 1,15 | 1,00 |

*Таблица 18*

Нормальное распределение

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,00000 | 00399 | 00798 | 01197 | 01595 | 01994 | 02392 | 02790 | 03188 | 03586 |
| 0,1 | 3983 | 04380 | 04776 | 05172 | 05567 | 05962 | 06356 | 06749 | 07142 | 07535 |
| 0,2 | 07926 | 08317 | 08706 | 09095 | 09483 | 09871 | 10257 | 10642 | 11026 | 11409 |
| 0,3 | 11791 | 12172 | 12552 | 12930 | 13307 | 13683 | 14058 | 14431 | 14803 | 15173 |
| 0,4 | 15542 | 15910 | 16276 | 16640 | 17003 | 17364 | 17724 | 18082 | 18439 | 18793 |
| 0,5 | 19146 | 19497 | 19847 | 20194 | 20540 | 20884 | 21226 | 21566 | 21904 | 22240 |
| 0,6 | 22575 | 22907 | 23237 | 23565 | 23891 | 24215 | 24537 | 24857 | 25175 | 25490 |
| 0, 7 | 25804 | 26115 | 26424 | 26730 | 27035 | 27337 | 27637 | 27935 | 28230 | 28524 |
| 0,8 | 28814 | 29103 | 29389 | 29673 | 29955 | 30234 | 30511 | 30785 | 31057 | 31327 |
| 0,9 | 31594 | 31859 | 32121 | 32381 | 32639 | 32894 | 33147 | 33398 | 33646 | 33891 |
| 1,0 | 34134 | 34375 | 34614 | 34850 | 35083 | 35314 | 35543 | 35769 | 35993 | 36214 |
| 1,2 | 36433 | 36650 | 36864 | 37076 | 37286 | 37493 | 37698 | 37900 | 38100 | 38298 |
| 1,2 | 38493 | 38686 | 38877 | 39065 | 39251 | 39435 | 39617 | 39796 | 39973 | 40147 |
| 1,3 | 40320 | 40490 | 40658 | 40824 | 40988 | 41149 | 41309 | 41466 | 41621 | 41774 |
| 1,4 | 41924 | 42073 | 42220 | 42364 | 42507 | 42647 | 42786 | 42922 | 43056 | 43189 |
| 1,5 | 43319 | 43448 | 43574 | 43699 | 43822 | 43943 | 44062 | 44179 | 44295 | 44408 |
| 1,6 | 44520 | 44630 | 44738 | 44845 | 44950 | 45053 | 45154 | 45254 | 45352 | 45449 |
| 1,7 | 45543 | 45637 | 45728 | 45818 | 45907 | 45994 | 46080 | 46164 | 46246 | 46327 |
| 1,8 | 46407 | 46485 | 46562 | 46638 | 46712 | 46784 | 46856 | 46926 | 46995 | 47062 |
| 1,9 | 47128 | 47193 | 47257 | 47320 | 47381 | 47441 | 47500 | 47558 | 47615 | 47670 |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2,0 | 47725 | 47778 | 47831 | 47882 | 47932 | 47982 | 48030 | 48077 | 48124 | 48169 |
| 2,1 | 48214 | 48257 | 48300 | 48341 | 48382 | 48422 | 48461 | 48500 | 48537 | 48574 |
| 2,2 | 48610 | 48645 | 48679 | 48713 | 48745 | 48778 | 48809 | 48840 | 48870 | 48899 |
| 2,3 | 48928 | 48956 | 48983 | 49010 | 49036 | 49061 | 49086 | 49111 | 49134 | 49158 |
| 2,4 | 49180 | 49202 | 49224 | 49245 | 49266 | 49286 | 49305 | 49324 | 49343 | 49361 |
| 2,5 | 49379 | 49396 | 49413 | 49430 | 49446 | 49461 | 49477 | 49492 | 49506 | 49520 |
| 2,6 | 49534 | 49547 | 49560 | 49573 | 49585 | 49598 | 49609 | 49621 | 49632 | 49643 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,7 | 49653 | 49664 | 49674 | 49683 | 49696 | 49702 | 49711 | 49720 | 49728 | 49736 |
| 2,8 | 49744 | 49752 | 49760 | 49767 | 49774 | 49781 | 49788 | 49795 | 49801 | 49807 |
| 2,9 | 49813 | 49819 | 49825 | 49831 | 49836 | 49841 | 49846 | 49851 | 49856 | 49861 |

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Артемьева Е.Ю.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для психологов. – М.: МГУ, 1969.
2. *Дворяшина М.Д., Пехлецкий И.Д.* Основные математические процедуры психодиагностического исследования // Психодиагностические методы (в комплексном лонгитюдном исследовании студентов). – Л.: ЛГУ, 1976.
3. *Голикова Т.И., Никитина Е.П., Терехин А.Т.* Математическая статистика. – М.: МГУ, 1981.
4. *Захаров В.П.* Применение математических методов в социально-психологических исследованиях. Учебное пособие. – Л.: ЛГУ, 1985.
5. Кенуй М.Г. Быстрые статистические вычисления. Упрощенные методы оценивания и проверки / Пер. с англ. и предисловие Д.Л. Астринского. – М.: Статистика, 1979.
6. *Лакин Г.Ф.* Биометрия. – М.: Высшая школа, 1980.
7. *Мельников В.М., Ямпольский Л.Г.* Введение в экспериментальную психологию личности. Учебное пособие для слушателей ИПК преподавателей педагогических дисциплин университетов и педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1985.
8. *Митропольский А.К.* Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971.
9. *Михеев В.Н.* Методика получения и обработки экспериментальных данных в психолого-педагогических исследованиях. – М.: РУДН, 1986.
10. Общий курс высшей математики (для экономистов). / Под ред. проф. В.И. Ермакова. – М: ИНФРА, 2001, разд. С, II. – С. 463–516.
11. *Оуэн Д.В.* Сборник статистических таблиц / пер. с англ. Л.П. Большева и В.Ф. Котельниковой. Изд. 2-е испр. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1973.
12. Психология и математика. – М.: Наука,1976.
13. *Пустыльнина Е.И.* Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, 1986.
14. *Рокицкий П.Ф.* Биологическая статистика. – Минск: Высшая школа, 1987.

15. *Сидоренко Е.В.* Методы математической обработки в психологии. Речь. – СПб., 2000.
16. *Суходольский Г.В.* Основы математической статистики для психологов. – Л.:ЛГУ, 1972.
17. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.Л.* Анализ данных на компьютере / Под ред. В.В. Фигурнова. – М.:Финансы и статистика, 1995.
18. *Урбах В.Ю.* Биометрические методы. – М.: Наука, 1964.
19. *Холлендер М., Вулф Д.А.* Непараметрические методы статистики / Пер. с англ.; Под ред. Ю.П. Адлера и Ю.Н. Тюрина. – М.: Финансы и статистика, 1983.

*Е.С. Федорова, Н.С. Ткаченко*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ПСИХОЛОГИИ

Методическое пособие
по специальности «Психология»

Редактор И.С. Волоскова
Технический редактор О.А. Матвеева
Компьютерная верстка Э.Ю. Вислевской

Подписано в печать 02.03.2005. Формат 60×84 1/16
Офсетная печать. Объем 10,75 п.л.
Тираж 200 экз. Заказ 55.

Издательство Кыргызско-Российского
Славянского университета
720000, Бишкек, ул. Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720000, Бишкек, ул. Шопокова, 68