УДК517.928

ТИЕШЕЛҮҮ КОЗГОЛБОГОН ТЕҢДЕМЕ РЕГУЛЯРДЫК ӨЗГӨЧӨ АЙЛАНАГА ЭЭ БОЛГОН УЧУРДА НЕЙМАНДЫН МАСЕЛЕСИ

Турсунов Д.А. – ф. - м.и.д., профессор,
Орозов М.О. – ф. - м.и.к.,
Халмурзаев А.К. - ОшМУнун магистранты

Аннотация. *Макалада жогорку тартиптеги туундулардын астында кичине параметр катышкан экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулу дифференциалдык теңдеме каралат. Бул теңдеменин чыгарылышы үчүн Неймандын шарты коюлган. Изилдөөнүн максаты - Неймандын маселесинин чыгарылышына кичинекей параметрдин таасирин аныктоо, б.а. чектик маселенин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу.*

Ачкыч сөздөр*: Нейман маселеси, регулярдык өзгөчө айлана, эллиптикалык типтеги теңдеме, сингулярдык козголгон маселе, бисингулярдык маселе, кичине параметр.*

ЗАДАЧА НЕЙМАНА В СЛУЧАЕ, КОГДА СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ НЕВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ РЕГУЛЯРНУЮ ОСОБУЮ ОКРУЖНОСТЬ

Турсунов Д.А. – д.ф.-м.н., профессор,
Орозов М.О. – к.ф.-м.н.,
Халмурзаев А.К. – магистрант ОшГУ

Аннотация. *В статье рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа, с малым параметром при старших производных. Для решение этого уравнения ставиться условие Неймана. Цель исследования – определение влияния малого параметра на решение задачи Неймана, т.е. построение равномерного асимптотического разделения выхода краевой задачи.*

Ключевые слова*: задача Неймана, регулярная особая окружность, уравнение эллиптического типа, сингулярно возмущенная задача, бисингулярная задача, малый параметр.*

THE NEYMAN PROBLEM IN THE CASE WHEN THE CORRESPONDING UNPERTURBED EQUATION HAS A REGULAR SINGULAR CIRCLE

Tursunov D.A. – Doctor of Ph. and Math. Sciences, Professor,
Orozov M.O. – Candidate of Ph. and Math. Sciences,
Khalmurzaev A.K. – undergraduate of OshSU

Annotation: *The article deals with a linear inhomogeneous partial differential equation of the second order of elliptic type, with a small parameter at the highest derivatives. The Neumann condition is set for the solution of this equation. The purpose of the study is to prove the existence and uniqueness of the solution to the Neumann's problem. Methods used: Determining the effect of a small parameter on the solution of Neumann's problem, i.e. construction of a uniform asymptotic separation of the output of the boundary value problem.*

Keywords*: Neumann's problem, regularly singular circle, elliptic equation, singularly perturbed problem, bisingular problem, small parameter.*

Алкак үчүн Неймандын төмөнкү маселесин изилдейбиз

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right)+(\rho-a)\frac{\partial v}{\partial\rho}-2v=f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}=\psi_1(\varphi),\quad \frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\psi_2(\varphi),\quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{2}$$

мында $0<a<b$ – турактуу сандар, $D=\{(\rho,\varphi)\mid a<\rho<b,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$,

$$v=v(\rho,\varphi,\varepsilon),\ f\in C^\infty(\bar{D}),\ \psi_k\in C^\infty[0,2\pi],\ k=1,2,\ \ f_2(\varphi)\equiv\frac{\partial^2 f(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2}\Big|_{\rho=a}\neq 0.$$

(1)-(2)- маселенин чыгарылышы жашайт, жалгыз жана чектелген. Бизден (1)-(2)- Неймандын маселесинин, кичине параметр нөлгө умтулгандагы, чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу талап кылынат.

Изилдөөнүн максаты – Неймандын маселесинин чыгарылышына кичинекей параметрдин таасирин аныктоо, б.а. (1)-(2)- чектик маселенин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу.

Алгач жардамчы лемманы далилдейбиз.

1-лемма. Төмөнкү маселе жалгыз чыгарылышка ээ

$$(\rho-a)\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-2z(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{3}$$

$$\frac{\partial z(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\psi_2(\varphi),\quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{4}$$

мында $f\in C^\infty(\bar{D}),\ \psi_2\in C^\infty[0,2\pi]$, $D=\{(\rho,\varphi)\mid a<\rho<b,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$,

жана бул чыгарылыш төмөнкүдөй көрүнүштө болот

$$z(\rho,\varphi)=(\rho-a)^2\int_b^\rho\frac{f(s,\varphi)}{(s-a)^3}ds-\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)^2}f(b,\varphi)+\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)}\psi_2(\varphi) \tag{5}$$

(5)- чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө да жазууга болот:

$z(\rho,\varphi)=f_2(\varphi)(\rho-a)^2\ln(\rho-a)+P(\rho,\varphi)$ мында $P\in C^\infty(\bar{D})$.

Далилдөө. (3)- дифференциалдык теңдеме $\rho=a,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ айланада өзгөчөлүккө ээ экендигин байкоо кыйын эмес.

Жогоруда бул $\rho=a,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ айлананы регулярдык өзгөчө айлана деп атап койгонбуз.

(3)- теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{z(\rho,\varphi)}{(\rho-a)^2}\right)=\frac{f(\rho,\varphi)}{(\rho-a)^3},$$

Келип чыккан барабардыкты интегралдайбыз:

$$z(\rho,\varphi)=(\rho-a)^2\int_{\rho_0}^\rho\frac{f(s,\varphi)}{(s-a)^3}ds+C(\varphi)(\rho-a)^2,$$

мында C(φ) – эрктүү функция. Табылган $z(\rho,\varphi)$ чыгарылыштан туунду алабыз:

$$\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}=2(\rho-a)\int_{\rho_0}^\rho\frac{f(s,\varphi)}{(s-a)^3}ds+\frac{f(\rho,\varphi)}{(\rho-a)}+2C(\varphi)(\rho-a),$$

(4)- шартты эске алсак: $\psi_2(\varphi)=2(b-a)\int_{\rho_0}^b\frac{f(s,\varphi)}{(s-a)^3}ds+\frac{f(b,\varphi)}{(b-a)}+2C(\varphi)(b-a)$ болот,

мындан $C(\varphi)=\frac{\psi_2(\varphi)}{2(b-a)}-\int_{\rho_0}^b\frac{f(s,\varphi)}{(s-a)^3}ds-\frac{f(b,\varphi)}{2(b-a)^2}$ келип чыгат.

Ошентип, төмөнкү туюнтманы алабыз:

$$z(\rho,\varphi)=(\rho-a)^2\int_b^\rho\frac{f(s,\varphi)}{(s-a)^3}ds-\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)^2}f(b,\varphi)+\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)}\psi_2(\varphi).$$

Эми интегралдын өзгөчөлүгүн бөлүп алуу максатында интеграл астындагы белгилүү $f(s,\varphi)$ функциясын $s=a,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ айлананын чеке-белинде төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$f(s,\varphi)=f_0(\varphi)+f_1(\varphi)(s-a)+f_2(\varphi)(s-a)^2+(s-a)^3F(s,\varphi), \tag{6}$$

мында $F(s,\varphi)=\sum_{k=3}^{\infty} f_k(\varphi)(s-a)^{k-3},\ f_k(\varphi)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f(s,\varphi)}{\partial s^k}\Big|_{s=a}$.

(6)- барабардыкты пайдаланып, (5)-ни төмөнкүдөй жазып алабыз:

$$z(\rho,\varphi)=(\rho-a)^2\int_b^{\rho}\frac{f_0(\varphi)+f_1(\varphi)(s-a)+f_2(\varphi)(s-a)^2+(s-a)^3F(s,\varphi)}{(s-a)^3}ds-$$

$$-\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)^2}f(b,\varphi)+\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)}\psi_2(\varphi)=$$

$$=f_2(\varphi)(\rho-a)^2 ln(\rho-a)-f_2(\varphi)(\rho-a)^2 ln(b-a)+\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)}\psi_2(\varphi)$$

$$+(\rho-a)^2\int_b^{\rho}\frac{f_0(\varphi)+f_1(\varphi)(s-a)+(s-a)^3F(s,\varphi)}{(s-a)^3}ds-\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)^2}f(b,\varphi).$$

Эгерде төмөнкүдөй белгилөө кийирсек:

$$P(\rho,\varphi)=(\rho-a)^2\int_b^{\rho}\frac{f_0(\varphi)+f_1(\varphi)(s-a)+(s-a)^3F(s,\varphi)}{(s-a)^3}ds-$$

$$-f_2(\varphi)(\rho-a)^2 ln(b-a)-\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)^2}f(b,\varphi)+\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)}\psi_2(\varphi),$$

анда $z(\rho,\varphi)=f_2(\varphi)(\rho-a)^2 ln(\rho-a)+P(\rho,\varphi)$

көрүнүшкө келет, мында $P\in C^{\infty}(\bar{D})$.

Мындан $z,\ \frac{\partial z}{\partial\rho}\in C(\bar{D})$, бирок $\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\notin C(\bar{D})$ келип чыгат. 1-лемма далилденди.

(1)-(2)- масселенин асимптотикалык чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$v(\rho,\varphi,\varepsilon)=u(\rho,\varphi,\varepsilon)+w(t,\varphi,\mu), \tag{7}$$

мында $t=\frac{\rho-a}{\mu},\ \varepsilon=\mu^2$.

(1)- теңдемеге азырынча белгисиз асимптотикалык катарды кошуп жана кемитип жазып алабыз:

$$\varepsilon\Delta v+(\rho-a)\frac{\partial v}{\partial\rho}-2v=f(\rho,\varphi)-h(\rho,\varphi,\varepsilon)+h(\rho,\varphi,\varepsilon), \tag{8}$$

мында $h(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k h_k(\rho,\varphi)$, $h_k(\rho,\varphi)$ – азырынча белгисиз функциялар.

Бул функцияларды кийиргенибиздин себеби ушул функциялардын жардамында тышкы $u(\rho,\varphi,\varepsilon)$ чыгарылыштагы өзгөчөлүктү ички $w(t,\varphi,\mu)$ чыгарылышка “алып өтөбүз”.

(7)ни (2)- чек аралык шарттарга коебуз:

$$\frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}=\frac{\partial u(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial w(t,\varphi,\mu)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi_1(\varphi),$$

$$\frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\frac{\partial u(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial w(t,\varphi,\mu)}{\partial t}\Big|_{t=\frac{b-a}{\mu}}=\psi_2(\varphi),$$

мындан $u(\rho,\varphi,\varepsilon),\ w(t,\varphi,\mu)$ белгисиз функцияларына төмөнкү шарттарды алабыз:

$$\frac{\partial u(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\psi_2(\varphi),\ \varphi\in[0,2\pi],\tag{9}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial w(t,\varphi,\mu)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi_1(\varphi)-\frac{\partial u(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a},\ \frac{\partial w(t,\varphi,\mu)}{\partial t}\Bigg|_{t=\frac{b-a}{\mu}}=0,\ \varphi\in[0,2\pi].\tag{10}$$

Эми (7)ни (8)ге алып барып коебуз:

$$\varepsilon\Delta u+(\rho-a)\frac{\partial u}{\partial\rho}-2u+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\mu m\frac{\partial w}{\partial t}+\mu^2m^2\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+t\frac{\partial w}{\partial t}-2w=$$
$$=f(\rho,\varphi)-h(\rho,\varphi,\varepsilon)+h(a+\mu t,\varphi,\mu^2),$$

мында $m=\dfrac{1}{a+\mu t}$, $\dfrac{1}{b}<m<\dfrac{1}{a}$, бул жерден эки теңдемени жазып алабыз:

$$\varepsilon\Delta u+(\rho-a)\frac{\partial u}{\partial\rho}-2u=f(\rho,\varphi)-h(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D,\tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\mu m\frac{\partial w}{\partial t}+\mu^2m^2\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+t\frac{\partial w}{\partial t}-2w=h(a+\mu t,\varphi,\mu^2),(t,\varphi)\in D_1,\tag{12}$$

мында $D_1=\{(t,\varphi)\,|\,0<t<(b-a)/\mu,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$.

Натыйжада каралып жаткан (1)-(2)- чектик маселе эки маселеге бөлүнөт: (11), (9) жана (12), (10).

Алгач (11), (9) маселенин асимптотикалык чыгарылышын тургузабыз, чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=u_0(\rho,\varphi)+\varepsilon u_1(\rho,\varphi)+\varepsilon^2u_2(\rho,\varphi)+...+\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi)+...\tag{13}$$

(13)- туюнтманы (11) жана (9) га алып барып коюуп жана кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин чогултуп, төмөнкү маселелерди алабыз:

$$\begin{aligned}&(\rho-a)\frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-2u_0(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D,\\&\frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\psi_2(\varphi),\ \varphi\in[0,2\pi];\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}&(\rho-a)\frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-2u_k(\rho,\varphi)=g_k(\rho,\varphi),\ \ (\rho,\varphi)\in D,\\&\frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=0,\ \ \varphi\in[0,2\pi],\ k\in\mathrm{N},\end{aligned}\tag{15}$$

мында $g_k(\rho,\varphi)=-(\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)+h_k(\rho,\varphi)),\ g_k\in C^\infty(\bar{D}),\ k\in\mathrm{N}$.

$$h_1(\rho,\varphi)=-\left(2f_2(\varphi)ln(\rho-a)+\frac{2f_2(\varphi)}{\rho}(\rho-a)ln(\rho-a)+\frac{f''_2(\varphi)}{\rho^2}(\rho-a)^2ln(\rho-a)\right)$$

$$h_2(\rho,\varphi)=-\left(2g_{1,2}(\varphi)+\frac{2g_{1,2}(\varphi)}{\rho}(\rho-a)+\frac{g''_{1,2}(\varphi)}{\rho^2}(\rho-a)^2\right)ln(\rho-a)$$

$$h_{k+1}(\rho,\varphi)=-\left(2g_{k,2}(\varphi)+\frac{2g_{k,2}(\varphi)}{\rho}(\rho-a)+\frac{g''_{k,2}(\varphi)}{\rho^2}(\rho-a)^2\right)ln(\rho-a),$$

Мына ошентип, (14)- катардык бардык мүчөлөрүн жана $h_k(\rho,\varphi),\ k\in N$, функцияларын аныктап алдык. Анда (12)- теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазууга болот

$$\frac{\partial^2 w(t,\varphi,\mu)}{\partial t^2}+t\frac{\partial w(t,\varphi,\mu)}{\partial t}-2w(t,\varphi,\mu)= \\ =-\mu m\frac{\partial w(t,\varphi,\mu)}{\partial t}-\mu^2m^2\frac{\partial^2 w(t,\varphi,\mu)}{\partial\varphi^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{2k}G_k(\mu t,\varphi)ln(\mu t). \quad (16)$$

(16), (10) маселенин асимптотикалык чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$w(t,\varphi,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k w_k(t,\varphi). \quad (17)$$

(17)ни (16) жана (10) алып барып коюуп, кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин чогултуп анан барабардыктын эки жагындагы коэффициенттерди барабарлап, төмөнкү маселелерди алабыз:

$$lw_0\equiv\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+t\frac{\partial w_0}{\partial t}-2w_0=0,(t,\varphi)\in D_1, \\ \frac{\partial w_0(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\ \frac{\partial w_0(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=\frac{b-a}{\mu}}=0,\ \varphi\in[0,2\pi]; \quad (18)$$

$$lw_1=-m\frac{\partial w_0}{\partial t},\ (t,\varphi)\in D_1, \\ \frac{\partial w_1(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi_1(\varphi)-\frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a},\frac{\partial w_1(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=\frac{b-a}{\mu}}=0,\quad \varphi\in[0,2\pi]; \quad (19)$$

$$lw_{2n}=-m\frac{\partial w_{2n-1}}{\partial t}-m^2\frac{\partial^2 w_{2n-2}}{\partial\varphi^2}+G_n(\mu t,\varphi)ln(\mu t),\ (t,\varphi)\in D_1, \\ \frac{\partial w_{2n}(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\ \frac{\partial w_{2n}(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=\frac{b-a}{\mu}}=0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ n\in N; \quad (20)$$

$$lw_{2n+1}=-m\frac{\partial w_{2n}}{\partial t}-m^2\frac{\partial^2 w_{2n-1}}{\partial\varphi^2},\ (t,\varphi)\in D_1, \\ \frac{\partial w_{2n+1}(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=0}=-\frac{\partial u_{2n}(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a},\quad \frac{\partial w_{2n+1}(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=\frac{b-a}{\mu}}=0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ n\in N. \quad (21)$$

(18)-(20) маселелердин чыгарылыштарынын жашайт жана жалгыз.

Адабияттар:

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка [Текст] / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
2. Орозов, М.О. Асимптотическое решение задачи Дирихле для кольца, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую окружность [Текст] / Д.А.*Турсунов, М.О. Орозов // Вестник* Томск. гос. университета. Матем. и мех. – 2020. – № 63. – С. 38–44.
3. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – № 1. – С. 102-112.
2. Orozov M.O. Asymptotics of the Solution to the Roben Problem for a Ring with Regularly Singular Boundary [Текст] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 1. –P. 89–95.