УДК 517.955.8

ТИЕШЕЛҮҮ КОЗГОЛБОГОН ТЕҢДЕМЕ РЕГУЛЯРДЫК ӨЗГӨЧӨ АЙЛАНАГА ЭЭ БОЛГОН УЧУРДА ДИРИХЛЕНИН МАСЕЛЕСИ

Турсунов Д.А., ф.-м.и.д., профессор,
Орозов М.О., ф.-м.и.к.,
Халмурзаев А.К., ОшМУнун магистранты

***Аннотация**: Макалада жогорку тартиптеги туундулардын астында кичине параметр катышкан экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулу дифференциалдык теңдеме каралат. Бул теңдеменин чыгарылышы үчүн Дирихленин шарты коюлган. Изилдөөнүн максаты - Дирихле маселесинин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөө. Колдонулуучу усулдар: өзгөртүп түзүү, дифференциалдык барабарсыздык, кичинекей параметр усулдары.*

***Ачкыч сөздөр**: Дирихле маселеси, регулярдык өзгөчө айлана, эллиптикалык типтеги теңдеме, сингулярдык козголгон маселе, бисингулярдык маселе, кичине параметр.*

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В СЛУЧАЕ, КОГДА СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ НЕВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ РЕГУЛЯРНУЮ ОСОБУЮ ОКРУЖНОСТЬ

Турсунов Д.А., д.ф.-м.н., профессор,
Орозов М.О., к.ф.-м.н.,
Халмурзаев А.К., магистрант ОшГУ

***Аннотация**: В статье рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа, с малым параметром при старших производных. Для решение этого уравнения ставиться условие Дирихле. Цель исследования – доказать существование и единственность решения задачи Дирихле. Используемые методы: преобразования, дифференциальных неравенств, малого параметра.*

***Ключевые слова**: задача Дирихле, регулярная особая окружность, уравнение эллиптического типа, сингулярно возмущенная задача, бисингулярная задача, малый параметр.*

THE DIRICHLET PROBLEM IN THE CASE WHEN THE CORRESPONDING UNPERTURBED EQUATION HAS A REGULAR SINGULAR CIRCLE

Tursunov D.A., Doctor of Ph. and Math. Sciences, Professor,
Orozov M.O., Candidate of Ph. and Math. Sciences,
Khalmurzaev A.K., undergraduate of OshSU

***Annotation:** The article deals with a linear inhomogeneous partial differential equation of the second order of elliptic type, with a small parameter at the highest derivatives. The Dirichlet condition is set for the solution of this equation. The purpose of the study is to prove the existence and uniqueness of the solution to the Dirichlet problem. Methods used: transformations, differential inequalities, small parameter.*

***Key words**: Dirichlet problem, regularly singular circle, elliptic equation, singularly perturbed problem, bisingular problem, small parameter.*

Маселенин коюлушу жана маселени чечүүнүн алгоритми Алкак үчүн Дирихленин төмөнкү маселесин изилдейбиз:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right)+(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial v}{\partial\rho}-q(\varphi)v=F(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D,\ (1)$$

$$v(a,\varphi,\varepsilon)=\psi_1(\varphi),\quad v(b,\varphi,\varepsilon)=\psi_2(\varphi),\quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{2}$$

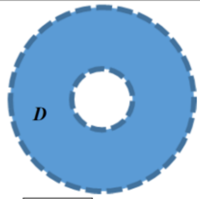
мында 0<ε<<1, $0<a<b$ туруктуулар, $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,\,0\le\varphi<2\pi\}$,

$$q(\varphi)>0\ \varphi\in[0,2\pi],\ \ v=v(\rho,\varphi,\varepsilon), F\in C^{\infty}(\bar{D}),\ q,\psi_k\in C^{\infty}[0,2\pi],\ k=1,2,$$

$$\frac{\partial F(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}\neq 0, \varphi\in[0,2\pi].$$

Дирихленин (1)-(2) маселесинин, кичине параметр нөлгө умтулгандагы, чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу талап кылынат.

Маселени чечүүнүн алгоритми



1- сүрөт

1) Дифференциалдык барабарсыздыктар усулун колдонуп (1)-(2) маселенин чыгарылышынын жашашын, жалгыздыгын жана чыгарылыштын чектелгендин далилдөө.

2) Кичине параметр усулун колдонуп (1)-(2) маселенин бисингулярдуу экендигин көрсөтүү.

3) Жалпыланган чектик функциялар усулун колдонуп формалдуу асимптотикалык ажыралманы тургузуу.

4) Формалдуу асимптотикалык ажыралманын калдык мүчөсүн баалоо.

Маселесинин чыгарылышын жашашы жана жалгыздыгы

1-теорема. (1)-(2) маселенин чыгарылышы жашайт, жалгыз жана бул чыгарылыш чектелген.

Далилдөө. Ыңгайлуу болушу үчүн (2)- бир тектүү эмес чек аралык шарттарды бир тектүүгө алып келебиз. Ал үчүн төмөнкү өзгөртүп түзүүнү аткарабыз

$$v(\rho,\varphi,\varepsilon)=u(\rho,\varphi,\varepsilon)+\frac{\psi_2(\varphi)(\rho-a)+\psi_1(\varphi)(b-\rho)}{b-a},$$

анда (1), (2) маселе төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\varepsilon\Delta u-(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial u}{\partial\rho}-q(\varphi)u=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\qquad (\rho,\varphi)\in D, \tag{3}$$

$$u(a,\varphi,\varepsilon)=0,\ \ u(b,\varphi,\varepsilon)=0,\ \ \varphi\in[0,2\pi], \tag{4}$$

мында $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ - уюлдук координаталар системасындагы Лапластын оператору,

$$f(\rho,\varphi,\varepsilon)=F(\rho,\varphi)+\psi_1(\varphi)q(\varphi)-\frac{\varepsilon(\psi_2(\varphi)-\psi_1(\varphi))}{\rho(b-a)}-\frac{\varepsilon(\psi''_2(\varphi)(\rho-a)+\psi''_1(\varphi)(b-\rho))}{\rho^2(b-a)}.$$

Эгерде (3), (4) маселе жалгыз чыгарылышка ээ болсо, анда (1), (2) маселенин дагы чыгарылышы да жашайт жана ал жалгыз болот.

(3), (4) маселенин жалгыз гана чыгарылышынын жашашын дифференциалдык барабарсыздыктар усулу менен далилдейбиз.

Жогоруда айтып өтүлгөндөй, эгерде $u^{Т}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ жана $u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ функциялар үчүн

$$Lu^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)\ge 0,\ \ Lu^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)\le 0,\ \ (\rho,\varphi)\in D, \tag{5}$$

$$u^{T}(a,\varphi,\varepsilon)\le 0\le u^{Ж}(a,\varphi,\varepsilon),\ u^{T}(b,\varphi,\varepsilon)\le 0\le u^{Ж}(b,\varphi,\varepsilon),\ \varphi\in[0,2\pi],\ 0<\varepsilon<<1, \tag{6}$$

барабарсыздыктары орун алса, анда бул функциялар тиешелүү түрдө *төмөнкү* жана *жогорку* чыгарылыштар деп аталышат, мында L оператору:

$$Lu\equiv\varepsilon\Delta u-(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial u}{\partial\rho}-q(\varphi)u-f(\rho,\varphi,\varepsilon).$$

Эгерде

$$u^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)\le u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon),\ \ (\rho,\varphi)\in\bar{D}, \tag{7}$$

барабарсыздыкты канааттандырган $u^{\text{Т}}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ төмөнкү жана $u^{\text{Ж}}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ жогорку чыгарылыштар жашаса, анда (3), (4) маселенин $u(\rho,\varphi,\varepsilon)$ чыгарылышы жашайт жана ал чыгарылыш төмөнкү барабарсыздыктарды канааттандырат:

$$u^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)\le u(\rho,\varphi,\varepsilon)\le u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in\bar{D}. \qquad (8)$$

Ошондуктан, алгач төмөнкү $u^{\text{Т}}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ жана жогорку $u^{\text{Ж}}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ чыгарылыштарды тургузабыз.

Мейли $u^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)=-M,\ \ u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)=M$ болсун, мында $M=\max\limits_{\bar{D}}\left|\dfrac{f(\rho,\varphi,\varepsilon)}{q(\varphi)}\right|,\ 0<\varepsilon<<1.$ Анда $(\rho,\varphi)\in D,\ 0<\varepsilon<<1$ болгондо төмөнкү барабарсыздыктарды алабыз:

$$Lu^{T}\equiv\varepsilon\Delta u^{T}-(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial u^{T}}{\partial\rho}-q(\varphi)u^{T}-f(\rho,\varphi,\varepsilon)=Mq(\varphi)-f(\rho,\varphi,\varepsilon)\ge 0\ \Rightarrow$$

$Lu^{T}\ge 0,\ \ (\rho,\varphi)\in D$;

$$Lu^{Ж}\equiv\varepsilon\Delta u^{Ж}-(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial u^{Ж}}{\partial\rho}-q(\varphi)u^{Ж}-f(\rho,\varphi,\varepsilon)=-Mq(\varphi)-f(\rho,\varphi,\varepsilon)\le 0\ \Rightarrow$$

$Lu^{Ж}\le 0,\ \ (\rho,\varphi)\in D$.

Биздин төмөнкү $u^{\text{Т}}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ жана жогорку $u^{\text{Ж}}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ чыгарылыштар үчүн (5) шарттар орун алат экен. Эми (6) шарттарды текшеребиз: $-M\le 0\le M,\ 0<M-const.$

Демек, (6) шарттар дагы аткарылат экен.

Биз тандап алган төмөнкү $u^{\text{Т}}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ жана жогорку $u^{\text{Ж}}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ чыгарылыштар (5), (6) жана (7) шарттарды канааттандыргандыгы үчүн (3), (4) маселенин чыгарылышы жашайт. Чыгарылыштын жалгыздыгын көрсөтүү үчүн $f(\rho,\varphi,\varepsilon)\equiv 0$ болгондо, $u(\rho,\varphi,\varepsilon)\equiv 0$ дун келип чыгышын байкоо жетиштүү болот.

(8) барабарсыздык төмөнкү көрүнүшкө келет: $-M\le u(\rho,\varphi,\varepsilon)\le M,\ (\rho,\varphi)\in\bar{D}$, бул акыркы барабарсыздыктан (3), (4) маселенин чыгарылышы үчүн төмөнкү баа келип чыгат: $|u(\rho,\varphi,\varepsilon)|\le M,\ (\rho,\varphi)\in\bar{D},\ 0<\varepsilon<<1.$ 1-теорема далилденди.

1-лемма. Төмөнкү маселе

$$(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-q(\varphi)z(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D, \qquad (9)$$

$$z(b,\varphi)=\psi_2(\varphi),\quad \varphi\in[0,2\pi], \qquad (10)$$

мында $f\in C^{\infty}(\bar{D}),\ q,\ \psi_2\in C^{\infty}[0,2\pi],\ D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,\ 0\le\varphi<2\pi\}$,
жалгыз чыгарылышка ээ жана бул чыгарылыш төмөнкүдөй көрүнүштө болот

$$z(\rho,\varphi)=\frac{\rho-a}{q(\varphi)}\int_b^{\rho}\frac{f(s,\varphi)}{(s-a)^2}ds+\psi_2(\varphi)\frac{\rho-a}{b-a}, \qquad (11)$$

(11) ди төмөнкү көрүнүштө жазууга болот: $z(\rho,\varphi)=Q_0(\varphi)(\rho-a)ln(\rho-a)+Q_1(\rho,\varphi)$ мында $Q_1\in C^{\infty}(\bar{D}),\ Q_0\in C^{\infty}[0,2\pi].$

2-лемма. (1)-(2) маселе бисингулярдык маселе.

Формалдуу ажыралманы тургузуу

(1)-(2) маселенин асимптотикалык чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$v(\rho,\varphi,\varepsilon)=u(\rho,\varphi,\varepsilon)+w(t,\varphi,\mu) \qquad (12)$$

мында $t=(\rho-a)/\mu,\ \varepsilon=\mu^2.$

(1)- теңдемеге азырынча белгисиз асимптотикалык катарды кошуп жана кемитип жазып алабыз:

$$\varepsilon\Delta v+(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial v}{\partial\rho}-q(\varphi)v=f(\rho,\varphi)-h(\rho,\varphi,\varepsilon)+h(\rho,\varphi,\varepsilon), \qquad (13)$$

мында $h(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(\rho,\varphi)$.

(12)ду (2)- чек аралык шарттарга коебуз:

$$v(a,\varphi,\varepsilon)=u(a,\varphi,\varepsilon)+w(0,\varphi,\mu)=\psi_1(\varphi),$$
$$v(b,\varphi,\varepsilon)=u(b,\varphi,\varepsilon)+w((b-a)/\mu,\varphi,\mu)=\psi_2(\varphi),$$

мындан $u(\rho,\varphi,\varepsilon)$, $w(t,\varphi,\mu)$ белгисиз функциялар үчүн төмөнкү шарттарды алабыз:

$$u(b,\varphi,\varepsilon)=\psi_2(\varphi),\ \varphi\in[0,2\pi], \qquad (14)$$

$$w(0,\varphi,\mu)=\psi_1(\varphi)-u(a,\varphi,\varepsilon),\ w((b-a)/\mu,\varphi,\mu)\to 0,\ \mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi]. \qquad (15)$$

Эми (12) ду (13)га алып барып коебуз:

$$\varepsilon\Delta u+(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial u}{\partial\rho}-q(\varphi)u+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\mu c\frac{\partial w}{\partial t}+\mu^2c^2\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+tq(\varphi)\frac{\partial w}{\partial t}-$$
$$-q(\varphi)w=f(\rho,\varphi)-h(\rho,\varphi,\varepsilon)+h(a+\mu t,\varphi,\mu^2),$$

мында $c=\dfrac{1}{a+\mu t}, \dfrac{1}{b}<c<\dfrac{1}{a}$, бул жерден эки теңдемени жазып алабыз:

$$\varepsilon\Delta u+(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial u}{\partial\rho}-q(\varphi)u=f(\rho,\varphi)-h(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\mu c\frac{\partial w}{\partial t}+\mu^2c^2\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+tq(\varphi)\frac{\partial w}{\partial t}-q(\varphi)w=h(a+\mu t,\varphi,\mu^2),(t,\varphi)\in D_1, \qquad (17)$$

мында $D_1=\{(t,\varphi)\,|\,0<t<(b-a)/\mu,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$.

Натыйжада каралып жаткан (1)-(2) маселе эки маселеге бөлүнөт: (16), (14) жана (17), (15).

(16), (14) маселенин чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=u_0(\rho,\varphi)+\varepsilon u_1(\rho,\varphi)+\varepsilon^2u_2(\rho,\varphi)+\ldots+\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi)+\ldots \qquad (18)$$

(18)- туюнтманы (17) жана (14) га алып барып коюуп жана кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин чогултуп, төмөнкү маселелерди алабыз:

$$(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-q(\varphi)u_0(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D,$$
$$u_0(b,\varphi)=\psi_2(\varphi),\ \varphi\in[0,2\pi]; \qquad (19)$$

$$(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-q(\varphi)u_k(\rho,\varphi)=g_k(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D,$$
$$u_k(b,\varphi)=0,\quad \varphi\in[0,2\pi],\ k\in\mathrm{N}, \qquad (20)$$

мында $g_k(\rho,\varphi)=-(\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)+h_{k-1}(\rho,\varphi)),\ g_k\in C^\infty\left(\bar{D}\right), k\in\mathrm{N}$.

(19)- маселенин чыгарылышы жашайт жана жалгыз болот.

Бизде $g_k(\rho,\varphi)=-(\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)+h_{k-1}(\rho,\varphi)),\ g_k\in C^\infty\left(\bar{D}\right), k\in\mathrm{N}$, ал эми k=1 болгон учурда $g_1(\rho,\varphi)=-(\Delta v_0(\rho,\varphi)+h_0(\rho,\varphi))$, болот $g_1\in C^\infty(\bar{D})$ болушу үчүн

$h_0(\rho,\varphi)=-\dfrac{f_1(\varphi)}{\rho-a}-\dfrac{f_1(\varphi)}{\rho}\ln(\rho-1)-\dfrac{f''_1(\varphi)}{\rho^2}(\rho-1)\ln(\rho-1)$ деп алабыз, ошондо

$g_1(\rho,\varphi)=\tilde{u}_0(\rho,\varphi)$ болуп $g_1\in C^\infty(\bar{D})$ орун алат.

(20)ден k=1 болгондо төмөнкү маселени алабыз:

$$(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial u_1(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-q(\varphi)u_1(\rho,\varphi)=g_1(\rho,\varphi),(\rho,\varphi)\in D,$$

$$u_1(b,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi].$$

1-лемманын негизинде бул маселенин чыгарылышы жашайт, жалгыз жана төмөнкү көрүнүшкө ээ болот: $u_1(\rho,\varphi)=\dfrac{\rho-a}{q(\varphi)}\displaystyle\int_b^\rho\frac{g_1(s,\varphi)}{(s-a)^2}ds$.

Бул чыгарылышка Лапластын операторун колдонобуз:

$$\Delta u_1(\rho,\varphi)=\frac{g_{1,1}(\varphi)}{\rho-a}+\frac{g_{1,1}(\varphi)}{\rho}\ln(\rho-a)+\frac{g''_{1,1}(\varphi)}{\rho^2}(\rho-a)\ln(\rho-a)+\tilde{u}_1(\rho,\varphi),$$

мында $\tilde{u}_1\in C^\infty(\bar{D}),\ g_{1,1}(\varphi)=\dfrac{\partial g_1(a,\varphi)}{\partial\rho}$.

Жогорудагыдай ой жүгүртүү менен

$h_1(\rho,\varphi)=-\dfrac{g_{1,1}(\varphi)}{\rho-a}-\dfrac{g_{1,1}(\varphi)}{\rho}\ln(\rho-a)-\dfrac{g''_{1,1}(\varphi)}{\rho^2}(\rho-a)\ln(\rho-a)$ деп алабыз,

анда $g_2(\rho,\varphi)=\tilde{u}_1(\rho,\varphi)$ болот.

Бул процессти аналогиялуу улантып, төмөнкүнү алабыз:

$\Delta u_k(\rho,\varphi)=\dfrac{g_{k,1}(\varphi)}{\rho-a}+\dfrac{g_{k,1}(\varphi)}{\rho}\ln(\rho-a)+\dfrac{g''_{k,1}(\varphi)}{\rho^2}(\rho-a)\ln(\rho-a)+\tilde{u}_k(\rho,\varphi)$, мындан

$$h_k(\rho,\varphi)=-\frac{g_{k,1}(\varphi)}{\rho-a}-\frac{g_{k,1}(\varphi)}{\rho}\ln(\rho-a)-\frac{g''_{k,1}(\varphi)}{\rho^2}(\rho-a)\ln(\rho-a),$$

деп алып $g_{k+1}(\rho,\varphi)=\tilde{u}_k(\rho,\varphi)$ ге ээ болобуз, мында $\tilde{u}_k\in C^\infty(\bar{D}),\ g_{k,1}(\varphi)=\dfrac{\partial g_k(a,\varphi)}{\partial\rho}$.

Мына ошентип, (18)- катардык бардык мүчөлөрүн жана $h_k(\rho,\varphi), k\in N,$ ларды аныктап алдык.

Эми (17), (15) маселеге өтөбүз. Мейли $h_k(a+\mu t,\varphi)=\dfrac{1}{\mu t}G_k(\mu t,\varphi)$ болсун, мында

$$G_0(\mu t,\varphi)=-f_1(\varphi)-cf_1(\varphi)\mu t\ln(\mu t)-c^2\ f''_1(\varphi)(\mu t)^2\ln(\mu t),$$
$$G_k(\mu t,\varphi)=-g_{k,1}(\varphi)-cg_{k,1}(\varphi)\mu t\ln(\mu t)-c^2\ g''_{k,1}(\varphi)(\mu t)^2\ln(\mu t).$$

Анда (12)- теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазууга болот

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w(t,\varphi,\mu)}{\partial t^2}+tq(\varphi)\frac{\partial w(t,\varphi,\mu)}{\partial t}-q(\varphi)w(t,\varphi,\mu)=\\&=-\mu c\frac{\partial w(t,\varphi,\mu)}{\partial t}-\mu^2c^2\frac{\partial^2 w(t,\varphi,\mu)}{\partial\varphi^2}+\frac{\mu}{t}\sum_{k=0}^\infty\mu^{2k}G_k(\mu t,\varphi)\end{aligned}. \qquad (21)$$

(28), (22) маселенин асимптотикалык чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$w(t,\varphi,\mu)=\sum_{k=0}^\infty\mu^k w_k(t,\varphi). \qquad (22)$$

(22)ду (21) жана (15)ге алып барып коюуп, кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин чогултуп анан барабардыктын эки жагындагы коэффициенттерди барабарлап, төмөнкү маселелерди алабыз:

$$\begin{aligned}&lw_0\equiv\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+tq(\varphi)\frac{\partial w_0}{\partial t}-q(\varphi)w_0=0,(t,\varphi)\in D_1,\\&w_0(0,\varphi)=\psi_1(\varphi)-u_0(a,\varphi),\ w_0((b-a)/\mu,\varphi)\to 0,\ \mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi];\end{aligned} \qquad (23)$$

$$lw_1 = -c\frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{1}{t}G_0(\mu t,\varphi),\ (t,\varphi)\in D_1,$$
$$w_1(0,\varphi)=0,\ w_1((b-a)/\mu,\varphi)\to 0,\ \mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi]; \tag{24}$$

$$lw_{2n} = -c\frac{\partial w_{2n-1}}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 w_{2n-2}}{\partial\varphi^2},\ (t,\varphi)\in D_1,$$
$$w_{2n}(0,\varphi)=-u_n(a,\varphi),\ w_{2n}((b-a)/\mu,\varphi)\to 0,\ \mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ n\in N; \tag{25}$$

$$lw_{2n+1} = -c\frac{\partial w_{2n}}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 w_{2n-1}}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{t}G_n(\mu t,\varphi),\ (t,\varphi)\in D_1,$$
$$w_{2n+1}(0,\varphi)=0,\ w_{2n+1}((b-a)/\mu,\varphi)\to 0,\ \mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ n\in N. \tag{26}$$

3-лемма. Төмөнкү маселенин чыгарылышы жашайт жана жалгыз:

$$lz = G(\mu t,\varphi), (t,\varphi)\in D_1,\ z(0,\varphi)=\gamma(\varphi),\ z\left(\frac{b-a}{\mu},\varphi\right)\to 0,\ \mu\to 0, \varphi\in[0,2\pi], \tag{27}$$

мында G – үзгүлтүксүз функция.

3-лемманын негизинде (23)-(26) маселелердин чыгарылыштарынын жашашы жана жалгыздыгы келип чыгат. (23)-(26) маселелердин чыгарылыштары үчүн төмөнкү асимптотикалык баалар орун алат: $w_{2n+1}(t,\varphi)=O\left(t^{-1}\right),\ w_{2n}(t,\varphi)=O\left(t^{-2}\right),\ t\to\infty,\ \varphi\in[0,2\pi]$.

Мына ушинтип (22)- катардын да бардык мүчөлөрү аныкталды. Эми $v(\rho,\varphi,\varepsilon)=u(\rho,\varphi,\varepsilon)+w(t,\varphi,\mu)$ формалдуу асимптотикалык катардын калдык мүчөсүн баалайбыз. Натыйжада, биз төмөнкү теореманы далилдедик

2-теорема. (1)-(2) маселенин чыгарылышы үчүн төмөнкү бир калыптагы асимптотикалык ажыралма орун алат

$$v(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{2n}\varepsilon^{k/2}w_k(t,\varphi)+O(\varepsilon^{n+1}),\ \varepsilon\to 0,\ (\rho,\varphi)\in\bar{D}.$$

мында $w_{2k+1}(t,\varphi)=O\left(t^{-1}\right),\ \ w_{2k}(t,\varphi)=O\left(t^{-2}\right),\ t\to\infty,\ \varphi\in[0,2\pi],\ u_k\in C(\bar{D}),\ u_k\in C^\infty(D).$

Адабияттар:

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка [Текст] / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
2. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач [Текст] / А.М. Ильин. – М.: Наука, 1989. – 334 с.
3. Орозов, М.О. Асимптотическое решение задачи Дирихле для кольца, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую окружность [Текст] / Д.А.*Турсунов, М.О. Орозов // Вестник* Томск. гос. университета. Матем. и мех. – 2020. – № 63. – С. 38–44.
4. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений второго порядка в кольце [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев. – Ош. «Билим», 2016. – 112 с.
2. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – № 1. – С. 102-112.
3. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения [Текст] / Д.А. Турсунов // Вестник ТомГУ. Математика и механика. – 2013. – Т. – № 26. – С. 37–44.
4. Orozov M.O. Asymptotics of the Solution to the Roben Problem for a Ring with Regularly Singular Boundary [Текст] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 1. –P. 89–95.